FINITUDE UNIFORME POUR LES CYCLES DE CODIMENSION 2 SUR LES CORPS DE NOMBRES

FRANÇOIS CHARLES ET ALENA PIRUTKA

Résumé. Soit X une variété projective et lisse, définie sur un corps de nombres. Sous l'hypothèse $H^2(X, \mathcal{O}_X) = 0$, Colliot-Thélène et Raskind ont démontré que le sous-groupe de torsion $CH^2(X)_{tors}$ du groupe de Chow en codimension 2 est fini. Dans cette note, on donne des bornes uniformes pour le groupe fini $CH^2(X)_{tors}$ quand X varie en famille.

Abstract. Let X be a smooth projective variety defined over a number field. Assuming $H^2(X, \mathcal{O}_X) = 0$, Colliot-Thélène and Raskind proved that the torsion subgroup $CH^2(X)_{tors}$ in the Chow group of cycles of codimension 2 is finite. In this note, we give uniform bounds for the finite group $CH^2(X)_{tors}$ when X varies in a family.

1. Introduction

1.1. **Contexte.** Soit k un corps de nombres. Si E est une courbe elliptique sur k, le théorème de Mordell-Weil garantit que le sous-groupe $E(k)_{tors}$ des points de torsion de E est fini. D'importants résultats permettent d'exhiber des bornes pour la taille de ce groupe de torsion. Si $k = \mathbb{Q}$, un théorème de B. Mazur [26] donne une liste finie de toutes les possibilités pour le groupe $E(\mathbb{Q})_{tors}$. les travaux de S. Kamienny, M.A. Kenku, et F. Momose [19, 21] étendent le théorème de Mazur au cas où k est un corps quadratique. Dans le cas général, un théorème de L. Merel [27] donne une borne uniforme $B(d)$ qui ne dépend que du degré d de k sur $\mathbb{Q}$, telle que $|E(k)_{tors}| \leq B(d)$.

Soit maintenant C une courbe projective lisse sur k de genre $g \geq 2$; l'ensemble $C(k)$ est fini d'après la conjecture de Mordell, démontrée par Faltings. Des travaux récents de V. Dimitrov, Z. Gao, et Ph. Habegger [13] permettent de donner une borne uniforme pour le cardinal $|C(k)|$ qui ne dépend que des invariants g, d, et du rang du groupe des points rationnels de la Jacobienne de C.

En dimension supérieure, soit A une variété abélienne sur k de dimension au moins 1. Le groupe de torsion $A(k)_{tors}$ est fini, et on conjecture l'existence d'une borne uniforme pour la taille de ce groupe, qui ne dépend que de la dimension de A et du degré d de k sur $\mathbb{Q}$. Cette conjecture est largement ouverte en générale. Un théorème d'A. Cadoret et A. Tamagawa [2, 3] donne un résultat partiel dans cette direction pour la torsion ℓ-primaire dans les familles à un paramètre : si S est une courbe sur k, $\mathcal{A} \to S$ est une famille de variétés abéliennes sur S, et ℓ est nombre premier, alors pour tout $s \in S(k)$ le sous-groupe de torsion ℓ-primaire $\mathcal{A}_s(k)\{\ell\}$ est d'ordre borné par une constante qui ne dépend que de $\mathcal{A}$, d et de ℓ, mais pas de choix du point s. Pour obtenir l'uniformité de tout le groupe de torsion dans ce cas, il resterait donc à borner l'exposant du groupe $\mathcal{A}_s(k)_{tors}$: on ne sait pas le faire en général, même pour une famille sur une courbe.

Le groupe $A(k)_{tors}$ s'identifie au groupe de Picard de la variété abélienne duale de A. Le but de cet article est d'exposer quelques résultats de finitude uniforme pour les cycles de codimension supérieure.

Soit X une variété projective lisse sur k. Soit $i > 0$ et soit $CH^i(X)$ le groupe de Chow des cycles de codimension i sur X. Une version forte de la conjecture de Bass prédit que le groupe $CH^i(X)$ est de type fini ; son sous-groupe de torsion $CH^i(X)_{tors}$ serait donc un groupe fini. J.-L. Colliot-Thélène et W. Raskind [9] ont établit la conjecture de finitude de la torsion pour les cycles de codimension 2 dans le cas suivant :

Théorème 1.1. *(Colliot-Thélène – Raskind,* [9]*) Soit X une variété projective lisse géométriquement intègre sur un corps de nombres. Supposons que $H^2(X, \mathcal{O}_X) = 0$. Alors le groupe $CH^2(X)_{tors}$ est fini.*

En dehors de ce résultat, on ne connait pas d'autres cas généraux où l'on sait établir la finitude des groupes $CH^i(X)_{tors}$ pour les cycles de codimension $i \geq 2$ (voir cependant [22],[23],[24],[25] pour des cas particuliers).

1.2. **L'exemple des surfaces de Châtelet.** On donne un exemple où le calcul explicite de la torsion dans CH^2 montre que l'on ne peut pas espérer borner uniformément la torsion sans imposer de condition supplémentaire.

Soit $d \in \mathbb{Q}$ sans facteur carré et soit $\pi : \mathcal{X} \to \mathcal{S}$ la famille projective et lisse de surfaces de Châtelet donnée par l'équation

$$y^2 - dz^2 = x(x - t_1)(x - t_2), \tag{1.2.1}$$

sur un ouvert affine. Ici t_1, t_2 sont des coordonnées de $\mathbb{A}^2_{\mathbb{Z}}$ et $\mathcal{S} \subset \mathbb{A}^2_{\mathbb{Z}}$ est l'ouvert de lissité de la famille (1.2.1). Notons que l'hypothèse $H^2(\mathcal{X}_s, \mathcal{O}_{\mathcal{X}_s}) = 0$ est satisfaite car les fibres de π sont des variétés rationnellement connexes.

On prend $k = \mathbb{Q}$, $s \in \mathcal{S}(k)$ et on pose $X = \mathcal{X}_s$. Alors on sait calculer $CH^2(X)_{tors}$. En effet, d'après [7, Thm.8.13], [11], [12] le groupe $CH^2(X)_{tors}$ coïncide avec le groupe $A_0(X)$ des zéro-cycles sur X de degré 0. D'après une conjecture de J.-L. Colliot-Thélène et J.-J. Sansuc ([5, Conjecture A], [7], [17]) pour X, on a une suite exacte (voir [4, IV, p.231] pour l'injectivité de la première flèche)

$$0 \to A_0(X) \to \oplus_v A_0(X_{k_v}) \to H^1(k, \hat{S})$$

où la somme de milieu est une somme sur toutes les places v de k et le groupe de droite s'identifie à $(\mathbb{Z}/2)^3$. Les groupes $A_0(X_{k_v})$ sont calculés dans [11]. Ici on a besoin du cas particulier suivant : on a que $A_0(X_{k_v}) \simeq (\mathbb{Z}/2)^2$ sous conditions que l'extension $k_v(\sqrt{d})/k_v$ est non-ramifiée, et que $v(t_1) = v(t_2)$ est un entier positif impair.

Ainsi, si $s = (n_1, n_2) \in \mathcal{S}(\mathbb{Q})$, où n_1, n_2 sont deux entiers impairs sans facteur carré, premiers à d, avec m diviseurs premiers communs, on a $|CH^2(\mathcal{X}_s)_{tors}| \geq 2^{2m-3}$.

1.3. **Énoncé des résultats.** On se place dans le cadre suivant. Soit $\mathcal{S}$ un schéma géométriquement intègre de type fini sur $\operatorname{Spec} \mathbb{Z}$, soit S la fibre générique de $\mathcal{S}$ sur $\mathbb{Q}$, soit $\pi : \mathcal{X} \to \mathcal{S}$ un morphisme projectif et lisse, et soit $\bar{\eta}$ le point générique géométrique de $\mathcal{S}$. On suppose $H^2(\mathcal{X}_s, \mathcal{O}_{\mathcal{X}_s}) = 0$ pour tout point $s \in \mathcal{S}$. Notons que si le corps résiduel k de s est de caractéristique zéro, alors cette condition est impliquée par la condition $b_2(\mathcal{X}_{\bar{\eta}}) = \rho(\mathcal{X}_{\bar{\eta}})$.

On s'intéresse à trouver des bornes uniformes pour les groupes finis $CH^2(\mathcal{X}_s)_{tors}$ qui dépendent de π, de degré de k sur $\mathbb{Q}$, mais pas de choix du point s. En effet, les méthodes développées dans [9] permettent de relier le groupe de Chow des cycles de codimension 2 avec des invariants de nature cohomologique (cohomologie étale, cohomologie des faisceaux $\mathcal{K}_1$ et $\mathcal{K}_2$ venant de la K-théorie, et autres) : on peut donc espérer contrôler ces invariants en famille.

Soient $\bar{k}$ une clôture algébrique de k et $\bar{s}$ le $\bar{k}$-point de $\mathcal{S}$ correspondant. Soit $G_k = Gal(\bar{k}/k)$ le groupe de Galois absolu de k. La donnée de la famille arithmétique sur $\mathcal{S}$ permet naturellement de considérer les groupes suivants :

(1) l'image $\operatorname{Im}[CH^2(\mathcal{X}_s)_{tors} \to CH^2(\mathcal{X}_{\bar{s}})^{G_k}]$;
(2) le noyau $\operatorname{Ker}[CH^2(\mathcal{X}_s)_{tors} \to CH^2(\mathcal{X}_{\bar{s}})^{G_k}]$;
(3) l'image $\operatorname{Im}[CH^2(\mathcal{X}_U)_{tors} \to CH^2(\mathcal{X}_s)]$ si $s : \operatorname{Spec} k \longrightarrow \mathcal{S}$ s'étend en un morphisme $U \longrightarrow \mathcal{S}$ où $\mathcal{O}_k$ est l'anneau des entiers de k, et où $U \subset \operatorname{Spec} \mathcal{O}_k$ est un ouvert.

Nous appellerons le premier de ces groupes la *partie géométrique* de $CH^2(X)_{tors}$. Le second est la *partie arithmétique*.

On étudie la premiere partie géométrique dans la section 2.1 (voir Théorème 2.2 et Proposition 2.3) – comme il est habituel, c'est le théorème de Merkurjev-Suslin qui en permet l'étude cohomologique. Quand la base S est une courbe, les méthodes d'A. Cadoret et A. Tamagawa [2, 3] permettent d'obtenir des résultats uniformes pour la partie ℓ-primaire. Dans la section 2.2 on utilise les arguments de J.-L. Colliot-Thélène et W. Raskind pour trouver des bornes uniformes pour l'exposant du deuxième groupe ci-dessus ci-dessus (voir Théorème 2.10 et corollaire 2.12). En particulier, on obtient :

Théorème 1.2. *Soit k un corps de nombres, et soit S une courbe quasi-projective, géométriquement intègre sur k. Soit*

$$\pi : \mathcal{X} \longrightarrow S$$

un morphisme projectif lisse à fibres géométriquement intègres. Supposons que $H^2(\mathcal{X}_s, \mathcal{O}_{\mathcal{X}_s}) = 0$ pour tout point $s \in S$. Soit ℓ un nombre premier. Pour tout entier strictement positif d, il existe un entier $N = N(\pi, \ell, d)$ qui ne dépend que de π, ℓ, et d, tel que, pour toute extension finie K de k de degré au plus d, et tout K-point s de S, on a :

$$\ell^N CH^2(\mathcal{X}_s)\{\ell\} = 0.$$

Ce dernier résultat motive la question suivante :

Question 1.3. *Soit S un schéma de type fini sur $\mathbb{Q}$, et soit $\pi : \mathcal{X} \to S$ un morphisme projectif et lisse. Soient d, i deux entiers strictement positifs. Existe-t-il un entier $N = N(\pi, d, i)$ qui ne dépend que de π, d, et i, tel que, pour tout k-point s de S, où k est un corps de nombres de degré $[k : \mathbb{Q}] = d$, on ait*

$$NCH^i(\mathcal{X}_s)_{tors} = 0?$$

La section 1.2 montre que, déjà dans le cas des familles de surfaces de Châtelet, on ne peut pas s'attendre à ce que le Théorème 1.2 s'étende en une bonne uniforme sur la torsion : étant donné n, le sous-groupe de n-torsion peut n'être pas uniformément borné.

Nous obtenons un tel résultat en fixant des modèles entiers des variétés considérées comme suit. Soit U un ouvert non vide de $\operatorname{Spec} \mathcal{O}_k$.

Dans la section 4, on s'intérèsse aux U-points de $\mathcal{S}$ avec U fixé. On utilise les méthodes de J.-L. Colliot-Thélène et W. Raskind, et M. Somekawa pour étudier le groupe $\operatorname{Im}[CH^2(\mathcal{X}_U)_{tors} \to CH^2(\mathcal{X}_s)]$. On déduit de cette étude le résultat suivant :

Théorème 1.4. *Soit $\mathcal{S}$ un schéma intègre, séparé, de type fini sur $\mathbb{Z}$. Soit $\pi : \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{S}$ un morphisme projectif lisse à fibres géométriquement intègres. Supposons que $H^2(\mathcal{X}_s, \mathcal{O}_{\mathcal{X}_s}) = 0$ pour tout point $s \in \mathcal{S}$. Soit k un corps de nombres et soit $\mathcal{O}_k$ son anneau des entiers, soit $U \subset \operatorname{Spec} \mathcal{O}_k$ un ouvert non vide. Soit $s : \operatorname{Spec} k \longrightarrow \mathcal{S}$ l'image du point générique d'un U-point de $\mathcal{S}$. Il existe un entier $N = N(\pi, U)$ tel que :*

$$|CH^2(\mathcal{X}_s)_{tors}| \leq N.$$

1.4. **Notations.** Si A est un ensemble fini, on écrit $\#A$ ou $|A|$ pour le nombre des éléments de A. Si A est un groupe abélien, $n > 0$ est un entier positif et ℓ est un nombre premier, on définit $A[n] = \{x \in A \,|\, nx = 0\}$ le sous-groupe des éléments de n-torsion, $A\{\ell\} = \{x \in A \,|\, \exists n \; \ell^n x = 0\}$ le sous-groupe des éléments de torsion ℓ-primaire, et $A_{tors} = \{x \in A \,|\, \exists n, \; nx = 0\}$ le sous-groupe des éléments de torsion.

Soit X un schéma noethérien. Si n est un entier inversible sur X, on note μ_n le faisceau étale sur X défini par les racines n-ièmes de l'unité. Pour j un entier positif, on note $\mu_n^{\otimes j} = \mu_n \otimes \ldots \otimes \mu_n$ (j fois). On pose $\mu_n^{\otimes j} = Hom(\mu_n^{\otimes(-j)}, \mathbb{Z}/n)$ si j est négatif et $\mu_n^{\otimes 0} = \mathbb{Z}/n$. On note $H^i_{ét}(X, \mu_n^{\otimes j})$ les groupes de cohomologie étale de X à valeurs dans $\mu_n^{\otimes j}$. Les groupes $H^i_{ét}(X, \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(j))$, resp. $H^i_{ét}(X, \mathbb{Z}_\ell(j))$

sont obtenus par passage à la limite inductive, resp. projective dans les groupes $H^i_{ét}(X,\mu_n^{\otimes j})$ lorsque n varie parmi les puissances d'un nombre premier ℓ inversible sur X. On écrit $\mathbb{G}_m$ pour le groupe multiplicatif et le faisceau étale ainsi défini sur le schéma X ; on a $\mathrm{Pic}(X)\simeq H^1_{ét}(X,\mathbb{G}_m)$.

Si i est un entier positif, on note $X^{(i)}$ l'ensemble des points de X de codimension i et on note $CH^i(X)$ le groupe des cycles de codimension i modulo l'équivalence rationnelle [14]. Si j est un entier positif, on note $\mathcal{K}_j$ le faisceau de Zariski associé au préfaisceau $U\mapsto K_j(H^0(U,\mathcal{O}_U))$, le groupe $K_j(A)$ étant celui associé par Quillen à l'anneau A.

Si k est un corps, on écrit $\bar{k}$ pour désigner une clôture algébrique de k, on écrit k^s pour une clôture séparable de k, $G_k = Gal(k^s/k)$ est le groupe de Galois absolu. Si X est une variété algébrique définie sur un corps k, on note $\bar{X}=X_{\bar{k}}=X\times_k\bar{k}$. Si X est intègre, on note $k(X)$ son corps des fonctions.

Si k est un corps de nombres, on écrit $\mathcal{O}_k$ pour l'anneau des entiers de k. Si $U\subset \mathrm{Spec}\,\mathcal{O}_k$ est un ouvert, les places *à l'infini* de U sont les places finies de $\mathcal{O}_k$ qui correspondent aux idéaux premiers du complémentaire de U dans $\mathrm{Spec}\,\mathcal{O}_k$.

Si X est une variété projective lisse sur un corps k séparablement clos, on écrit $b_2(X)=\rho(X)$ si pour tout premier ℓ différent de la caractéristique de k, l'application naturelle $\mathrm{Pic}(X)\otimes\mathbb{Q}_\ell\to H^2_{ét}(X,\mathbb{Q}_\ell(1))$ est surjective. Notons qu'il suffit de le vérifier pour un seul premier ℓ. Cette propriété est stable par spécialisation. Si k est de caractéristique nulle, le théorème de Lefschetz sur les classes de type $(1,1)$ montre que $b_2(X)=\rho(X)$ si et seulement si $H^2(X,\mathcal{O}_X) = 0$.

Remerciements. Le premier auteur remercie l'Institut Courant, NYU pour son hospitalité. Il est soutenu par le projet ERC AlgTateGro (Horizon 2020 Research and Innovation Programme, grant agreement No 715747).

Les auteurs remercient Anna Cadoret pour plusieurs discussions et commentaires sur le manuscrit, ainsi que Jean-Louis Colliot-Thélène pour plusieurs discussions.

2. Uniformité de l'exposant

Soit k un corps de nombres et soit X une variété projective et lisse sur k. Dans cette section on s'intéresse à l'exposant du groupe $CH^2(X)_{tors}$. Le but est de démontrer le théorème 1.2. On commence par borner l'exposant de la partie géométrique de ce groupe, à savoir son image dans le groupe $CH^2(\bar{X})$; on étudie ce dernier groupe via l'application d'Abel-Jacobi ℓ-adique.

2.1. Image de $CH^i(X)_{tors}$ par l'application d'Abel-Jacobi.

2.1.1. Soit S une courbe quasi-projective sur k, et soit $\pi:\mathcal{X}\to S$ un morphisme projectif lisse. Soit ℓ un nombre premier. Soit $\overline{\eta}$ un point générique géométrique de S.

Soit K une extension du corps k. Si s est un K-point de S, et $\overline{s}$ est un point géométrique de S au-dessus de s, le groupe de Galois absolu G_K de K agit naturellement sur les groupes de cohomologie étale

$$H^i_{ét}(\mathcal{X}_{\overline{s}},\mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(j))$$

où i est un entier positif et j un entier arbitraire.

Le résultat suivant suit du théorème principal de [3].

Proposition 2.1. *Soit d un entier strictement positif. Soient i et j deux entiers avec $i\geq 0$ et $i\neq 2j$. Il existe un entier $N=N(\pi,i,j,d)$ tel que, pour toute extension finie K de k de degré au plus d, tout K-point s de S, et tout point géométrique $\overline{s}$ de S au-dessus de s, on ait :*

$$|H^i_{ét}(\mathcal{X}_{\overline{s}},\mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(j))^{G_K}|\leq \ell^N.$$

Démonstration. On applique [3, Corollary 4.2] à la représentation du groupe fondamental étale $\pi^1(S,\overline{\eta})$ de S sur $M=H^i_{ét}(X_{\overline{\eta}},\mathbb{Z}_\ell(j))$, en prenant pour χ le caractère trivial – les conjectures de

Weil assurant l'hypothèse sur χ. On en déduit un entier N_1 tel que, pour toute extension K de k de degré au plus d et tout K-point s de S, on ait

$$(H^i_{ét}(\mathcal{X}_{\overline{s}}, \mathbb{Z}_\ell(j)) \otimes \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell)^{G_K} \subset H^i_{ét}(\mathcal{X}_{\overline{s}}, \mathbb{Z}_\ell(j))/\ell^{N_1}.$$

Considérons par ailleurs la suite exacte G_K-équivariante (voir par exemple [6, p.781]) :

$$0 \longrightarrow H^i_{ét}(\mathcal{X}_{\overline{s}}, \mathbb{Z}_\ell(j)) \otimes \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell \longrightarrow H^i_{ét}(\mathcal{X}_{\overline{s}}, \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(j)) \longrightarrow H^{i+1}_{ét}(\mathcal{X}_{\overline{s}}, \mathbb{Z}_\ell(j))_{tors} \longrightarrow 0.$$

On en déduit une suite exacte

$$0 \longrightarrow (H^i_{ét}(\mathcal{X}_{\overline{s}}, \mathbb{Z}_\ell(j)) \otimes \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell)^{G_K} \longrightarrow H^i_{ét}(\mathcal{X}_{\overline{s}}, \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(j))^{G_K} \longrightarrow H^{i+1}_{ét}(\mathcal{X}_{\overline{s}}, \mathbb{Z}_\ell(j))_{tors}.$$

Le terme de droite étant un groupe fini dont la classe d'isomorphisme est indépendante de s, cela conclut la preuve. $\square$

2.1.2. *Finitude pour l'application d'Abel-Jacobi de Bloch et conséquence en codimension* 2. Soit X une variété projective lisse sur un corps k. Soit ℓ un nombre premier inversible dans k.

Dans [1], Bloch définit une application d'Abel-Jacobi, fonctorielle en X pour l'action des correspondances :

$$AJ^i_\ell : CH^i(X_{\overline{k}})\{\ell\} \longrightarrow H^{2i-1}_{ét}(X_{\overline{k}}, \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(i)).$$

Par fonctorialité on obtient une application, que nous noterons aussi AJ^i_ℓ :

$$AJ^i_\ell : CH^i(X)\{\ell\} \longrightarrow H^{2i-1}_{ét}(X_{\overline{k}}, \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(i))^{G_k}.$$

Si k est algébriquement clos, l'application AJ^d est un isomorphisme et l'application AJ^2 est injective (voir [1], [10, Théorème 4.3]). On déduit immédiatement de la Proposition 2.1 l'énoncé suivant :

Théorème 2.2. *Soit S une courbe quasi-projective sur un corps de nombres k, et soit $\pi : \mathcal{X} \to S$ un morphisme projectif lisse. Soit ℓ un nombre premier.*

Soit d un entier strictement positif. Il existe un entier $N = N(\pi, d)$ tel que, pour toute extension finie K de k de degré au plus d, tout K-point s de S, et tout point géométrique $\overline{s}$ de S au-dessus de s, on ait :

$$|\mathrm{Im}(CH_0(\mathcal{X}_s) \longrightarrow CH_0(\mathcal{X}_{\overline{s}}))\{\ell\}| \leq \ell^N$$

et :

$$|\mathrm{Im}(CH^2(\mathcal{X}_s) \longrightarrow CH^2(\mathcal{X}_{\overline{s}}))\{\ell\}| \leq \ell^N.$$

La remarque suivante permet, sous des hypothèses plus fortes, de traiter le cas du groupe de torsion tout entier et d'un schéma de base de dimension arbitraire.

Proposition 2.3. *Soit $\mathcal{S}$ un schéma séparé intègre de type fini sur $\mathbb{Z}$ et soit $\pi : \mathcal{X} \to \mathcal{S}$ un morphisme projectif lisse. Soient $d, r > 0$ des entiers. Il existe une constante $N = N(\pi, d, r)$, qui vérifie la propriété suivante : soit k un corps de nombres de degré au plus d, soient s un k-point de $\mathcal{S}$ et $\overline{s}$ un point géométrique de $\mathcal{S}$ au-dessus de s ; si le morphisme*

$$s : \mathrm{Spec}\, k \longrightarrow \mathcal{S}$$

s'étend en un morphisme

$$U \longrightarrow \mathcal{S}$$

au-dessus d'un ouvert $U \subset \mathrm{Spec}\, \mathcal{O}_k$ tel que U admet au plus r places à l'infini, alors

$$|\mathrm{Im}(CH^2(\mathcal{X}_s) \longrightarrow CH^2(\mathcal{X}_{\overline{s}}))_{tors}| \leq N$$

Démonstration. Puisque l'application AJ^2_ℓ est injective, il suffit de borner la taille du groupe de cohomologie étale $H^3_{\acute{e}t}(\mathcal{X}_{\bar{s}}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))^{G_k}$. Soit s_0 un point fermé de U de corps résiduel un corps fini $\mathbb{F}$ de caractéristique p. On a alors l'inclusion de groupes finis :

$$\oplus_{\ell\neq p} H^3_{\acute{e}t}(\mathcal{X}_{\bar{s}}, \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(2))^{G_k} \subset \oplus_{\ell\neq p} H^3_{\acute{e}t}(\mathcal{X}_{\bar{s}_0}, \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(2))^{G_{\mathbb{F}}} \tag{2.1.1}$$

(voir [8, Theorem 5]). On applique le lemme 2.4 ci-dessous : puisque le degré de k est borné par d, et le nombre de places à l'infini de U est borné par r, on peut choisir un nombre fini de fibres $\mathcal{X}_{s_0}$ qui donnent donc une borne pour la taille du groupe $H^3_{\acute{e}t}(\mathcal{X}_{\bar{s}}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))^{G_k}$ d'après l'inclusion (2.1.1). □

Lemme 2.4. *Soit $\mathcal{S}$ un schéma séparé de type fini sur $\mathbb{Z}$. Soient $n, d, r > 0$ des entiers. Il existe une constante m, qui ne dépend que de $n, d, r > 0$ et m points $s_1, \dots, s_m \in \mathcal{S}$ tels que :*

(1) les corps résiduels $\kappa(s_1), \dots \kappa(s_m)$ sont finis, de caractéristiques premières à n ;

(2) si k est un corps de nombres de degré au plus d, si $U \subset \operatorname{Spec} \mathcal{O}_k$ est un ouvert tel que U admet au plus r places à l'infini, et si $U \to \mathcal{S}$ est un U-point de $\mathcal{S}$, alors il existe $1 \leq i < j \leq m$ tels que les caractéristiques de corps résiduels de $\kappa(s_i)$ et $\kappa(s_j)$ sont différentes, et les fibres de U au-dessus de s_i et s_j sont non vides.

Démonstration. On choisit un ensemble fini $P \subset \mathbb{Z}$ de premiers qui ne divisent pas n, tel que $\#P \geq r+2$. On prend pour $s_1, \dots, s_m$ tous les points fermés de $\mathcal{S}_p$ pour $p \in P$ de degré au plus d sur $\mathbb{F}_p$. Notons qu'on n'a qu'un nombre fini de tels points.

Soit U comme dans l'énoncé du lemme. Puisque le nombre de places à l'infini de U est au plus r, et puisque $\#P \geq r+2$, il existent deux premiers $p_1, p_2 \in P$ tels que les fibres de U au-dessus de p_1 et p_2 sont non vides, et elles correspondent donc aux points $s_i \in \mathcal{S}$ au-dessus de p_1 et $s_j \in \mathcal{S}$ au-dessus de p_2, pour certains $1 \leq i \neq j \leq m$, puisque $[k : \mathbb{Q}] \leq d$. □

2.2. Exposant de la partie arithmétique.

2.2.1. *Cycles de codimension* 2 *et $\mathcal{K}_2$-cohomologie : rappels.* On rappelle d'abord quelques résultats généraux sur la torsion dans le groupe de Chow des cycles de codimension 2 et la structure des groupes de $\mathcal{K}_2$-cohomologie.

Proposition 2.5. *Soit X une variété projective lisse géometriquement intègre sur un corps k de caractéristique* 0*. Alors il existe des suites exactes :*

(1) $0 \to H^1(X, \mathcal{K}_2) \otimes \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \to NH^3_{\acute{e}t}(X, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) \to CH^2(X)_{tors} \to 0$,
où $NH^3_{\acute{e}t}(X, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) = \operatorname{Ker}[H^3_{\acute{e}t}(X, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) \to H^3(k(X), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))]$;

(2) $0 \to H^1(X, \mathcal{K}_2) \otimes \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \to \operatorname{Ker} \tau \to \operatorname{Ker}[CH^2(X) \to CH^2(\bar{X})^{G_k}] \to 0$,
où τ est la flèche $\tau : H^3_{\acute{e}t}(X, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) \to [H^3_{\acute{e}t}(\bar{X}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))^{G_k} \oplus H^3(k(X), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))]$.

(3) $0 \to \varinjlim_n (\operatorname{Pic}^0_{X/k}(\bar{k})[n] \otimes \mu_n) \to H^1_{\acute{e}t}(\bar{X}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) \to F_X \to 0$,
où le groupe F_X de droite est fini, de même ordre que le groupe $\oplus_\ell H^2_{\acute{e}t}(\bar{X}, \mathbb{Z}_\ell(2))\{\ell\}$.

Si de plus $H^2(X, \mathcal{O}_X) = 0$, on a une suite exacte :

(4) $0 \to \operatorname{Pic}(\bar{X}) \otimes \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \to H^2_{\acute{e}t}(\bar{X}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(1)) \to \oplus_\ell H^3_{\acute{e}t}(\bar{X}, \mathbb{Z}_\ell(1))\{\ell\} \to 0$,
et le groupe de droite est fini.

Démonstration. Pour la suite (1) voir [10] (3.11). Pour obtenir la suite (2) on compare les suites (1) pour X et $\bar{X}$, et on utilise que $H^1(\bar{X}, \mathcal{K}_2) \otimes \mathbb{Q}/\mathbb{Z} = 0$ d'après [8, Thm. 2.2]. La suite (4) est [8, Proposition 2.11].

Pour la suite (3) on utilise l'isomorphisme $H^0(\bar{X}, \mathcal{K}_2)_{tors} \simeq H^1_{\acute{e}t}(\bar{X}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))$ de Suslin (voir [33, Corollary 5.3]). Ensuite, [8, Théorème 1.8 et sa preuve] identifie le sous-groupe divisible maximal du groupe $H^0(\bar{X}, \mathcal{K}_2)_{tors}$ avec le groupe de gauche $\varinjlim_n (\operatorname{Pic}^0_{X/k}(\bar{k})[n] \otimes \mu_n)$. Le quotient du groupe $H^0(\bar{X}, \mathcal{K}_2)_{tors}$ par son sous-groupe divisible maximal est (non canoniquement) isomorphe à $\mathrm{NS}(\bar{X})_{tors}$, isomorphe lui-même au groupe $\oplus_\ell H^2(\bar{X}, \mathbb{Z}_\ell(2))\{\ell\}$ (voir [8, Remarque 1.9, Lemma 1.4]). □

2.2.2. *Invariants.* Soit k un corps et soit X une variété projective lisse géométriquement intègre sur k. On peut considérer les invariants suivants de la variété X :

(i) $d_i(X)$ est le degré minimal d'une extension finie K de k telle que l'ensemble des K-points $X(K)$ de X est non vide [1] ;

(ii) $d_{NS}(X)$ est le degré minimal d'une extension finie K de k telle que l'application naturelle $\mathrm{Pic}(X_K) \to \mathrm{NS}(\bar{X})$ est surjective, où $\mathrm{NS}(\bar{X})$ est le groupe de Néron-Severi de $\bar{X}$ – c'est un groupe abélien de type fini ;

(iii) Si $(i,j) \in \{(2,1),(2,2),(3,2)\}$, $n_{ij}(X)$ est l'ordre du groupe abélien fini $\bigoplus_\ell H^i(\overline{X}, \mathbb{Z}_\ell(j))_{tors}$.

Notons que les invariants $n_{i,j}(X)$ sont des invariants cohomologiques, constants dans les familles projectives lisses. Pour contrôler la variaition de $d_i(X)$ et $d_{NS}(X)$ en famille, on dispose des deux lemmes faciles ci-dessous :

Lemme 2.6. *Soit $\mathcal{S}$ un schéma séparé de type fini sur $\mathbb{Z}$ et soit $\pi : \mathcal{X} \to \mathcal{S}$ un morphisme projectif lisse à fibres géométriquement intègres. Il existe une constante $N = N(\pi)$ telle que pour tout point $s \in \mathcal{S}$, la variété $\mathcal{X}_s$ sur le corps résiduel $\kappa(s)$ de s vérifie : $d_i(\mathcal{X}_s) \leq N$.*

Démonstration. Soit η un point générique de $\mathcal{S}$, et soit $k(\eta)$ son corps résiduel. Choisissant un point de $\mathcal{X}_\eta$ à valeurs dans une extension finie L de $k(\eta)$, le morphisme $\mathrm{Spec}\, L \to \mathcal{S}$ s'étend en un morphisme quasi-fini dominant $f_1 : \mathcal{S}_1 \to \mathcal{S}$, où $\mathcal{S}_1$ est séparé, de type fini sur $\mathbb{Z}$. Par construction, quitte à remplacer $\mathcal{S}_1$ par un ouvert non vide, il existe un morphisme $i_1 : \mathcal{S}_1 \to \mathcal{X}$ tel que $\pi \circ i_1 = f_1$. On conclut par récurrence noethérienne en considérant l'image de f_1. □

Lemme 2.7. *Soit k un corps de nombres. Soit S un schéma séparé de type fini sur k et soit $\pi : \mathcal{X} \to S$ un morphisme projectif lisse à fibres géométriquement intègres, tel que $H^2(\mathcal{X}_s, \mathcal{O}_{\mathcal{X}_s}) = 0$ pour tout point $s \in S$. Il existe une constante $N = N(\pi)$ telle que pour tout point $s \in S$ on a que la variété $\mathcal{X}_s$ sur le corps résiduel $\kappa(s)$ de s vérifie : $d_{NS}(\mathcal{X}_s) \leq N$.*

Démonstration. L'hypothèse d'annulation des groupes $H^2(\mathcal{X}_s, \mathcal{O}_{\mathcal{X}_s})$ garantit que si $\bar{\eta}$ est un point générique géométrique de S, les applications de spécialisation

$$\mathrm{NS}(\mathcal{X}_{\bar{\eta}}) \to \mathrm{NS}(\mathcal{X}_{\bar{s}})$$

sont des isomorphismes comme on peut le voir en identifiant ces deux groupes aux groupes de cohomologie singulière de changements de base à $\mathbb{C}$ de $\mathcal{X}_{\bar{s}}$ et $\mathcal{X}_{\bar{\eta}}$ respectivement.

On peut trouver un schéma S' séparé, de type fini sur k, $S' \to S$ quasi-fini dominant, et des sections $\{l_i\}_i \in \mathrm{Pic}(\mathcal{X}_{S'})$ qui engendrent le groupe $\mathrm{NS}(\mathcal{X}_{\bar{\eta}})$. Par spécialisation, ces sections engendrent les groupes $\mathrm{NS}(\mathcal{X}_{\bar{s}'})$ pour tout point s' de S'. On conclut par récurrence noethérienne. □

Outre les invariants ci-dessus, on va aussi considérer des invariants obtenus à partir de diviseurs amples dans X. Soit K une extension finie de k telle que $X(K) \neq \emptyset$. On se donne une courbe projective lisse et géométriquement intègre C dans X_K, avec $C(K) \neq \emptyset$, intersection complète de diviseurs amples. Le théorème de Bertini garantit l'existence d'une telle courbe. On a alors une application injective de variétés abéliennes :

$$\mathrm{Pic}^0_{X_K/K} \to \mathrm{Pic}^0_{C/K}.$$

1. Ici cet invariant convient mieux que l'indice de X.

Par le théorème de complète réductibilité de Poincaré [28, Chap. IV, Theorem 1, p.173], il existe un morphisme $\mathrm{Pic}^0_{C/K} \to \mathrm{Pic}^0_{X_K/K}$ tel que la composition :

$$\tau_C : \mathrm{Pic}^0_{X_K/K} \to \mathrm{Pic}^0_{C/K} \to \mathrm{Pic}^0_{X_K/K}$$

est une isogénie.

Dans les arguments ci-dessous, on aura besoin de contrôler le cardinal du noyau de τ_C, ainsi que l'invariant $n_{22}(C)$ en famille. Pour ce faire, il est commode d'introduire la notation suivante :

Definition 2.8. On écrit $d_{h,22}(X)$ pour le plus petit entier qui apparaît comme le produit du cardinal du noyau d'une isogénie τ_C construite comme ci-dessus, et de $n_{22}(C)$. Plus précisément, $d_{h,22}(X)$ est le plus petit produit $d_{h,22}(X) = d \cdot n$, tel qu'il existe une extension finie K/k de degré $d_i(X)$ avec $X(K) \neq \emptyset$, une courbe lisse $C \subset X_K$ obtenue par sections hyperplanes successives, telle que $C(K) \neq \emptyset$, $n_{22}(C) = n$, et telle que la flèche composée

$$\tau_C : \mathrm{Pic}^0_{X_K/K} \to \mathrm{Pic}^0_{C/K} \to \mathrm{Pic}^0_{X_K/K}$$

est une isogénie dont le noyau est de cardinal d.

Lemme 2.9. *Soit k un corps de nombres. Soit S un schéma séparé de type fini sur k et soit $\pi : \mathcal{X} \to S$ un morphisme projectif lisse, à fibres géometriquement intègres. Il existe une constante $N = N(\pi)$ telle que pour tout point fermé $s \in S$ on a :*

$$d_{h,22}(\mathcal{X}_s) \leq N.$$

Démonstration. Comme dans le lemme 2.6, on va utiliser un argument de récurrence noethérienne sur le schéma de base S. Il suffit donc de trouver une borne N après un changement de base quasi-fini dominant $S' \to S$. En particulier, on peut supposer que π a une section et que S est intègre de point générique η.

Soit $\mathcal{C}_\eta$ une courbe lisse, obtenue par des sections hyperplanes successives de la fibre générique $\mathcal{X}_\eta$. Quitte à remplacer S par un schéma quasi-fini sur S, on peut supposer que $\mathcal{C}_\eta(\eta)$ est non vide et que $\mathcal{C}_\eta$ s'étend en une courbe relative lisse $\mathcal{C} \subset \mathcal{X} \to S$ intersection complète de sections hyperplanes relatives de $\mathcal{X}$, qui admet une section sur S. L'application $\mathrm{Pic}^0_{\mathcal{X}_\eta} \to \mathrm{Pic}^0_{\mathcal{C}_\eta}$ est injective. D'après le théorème de complète réductibilité de Poincaré [28, Chap. IV, Thm.1, p. 173], il existe une application $\mathrm{Pic}^0_{\mathcal{C}_\eta} \to \mathrm{Pic}^0_{\mathcal{X}_\eta}$ telle que l'application composée

$$\mathrm{Pic}^0_{\mathcal{X}_\eta} \to \mathrm{Pic}^0_{\mathcal{C}_\eta} \to \mathrm{Pic}^0_{\mathcal{X}_\eta} \tag{2.2.1}$$

est une isogénie. Quitte à remplacer S par un ouvert non-vide, on peut supposer que la construction ci-dessus s'étend sur S. Ainsi, en utilisant la compatibilité des schémas $\mathrm{Pic}_{\mathcal{X}/S}$ et $\mathrm{Pic}_{\mathcal{C}/S}$ au changement de base, on peut supposer que pour tout point s de S, on a une isogénie

$$\mathrm{Pic}^0_{\mathcal{X}_s} \to \mathrm{Pic}^0_{\mathcal{C}_s} \to \mathrm{Pic}^0_{\mathcal{X}_s}$$

dont le cardinal du noyau est borné par le cardinal du noyau de l'isogénie générique (2.2.1). Puisque $n_{22}(\mathcal{C}_s)$ est constant dans la famille $\mathcal{C}/S$, le lemme est démontré. □

2.2.3. *Une version effective d'un résultat de Colliot-Thélène–Raskind–Salberger.* Soit X une variété projective, lisse, géométriquement intègre, définie sur un corps de nombres k, telle que $H^2(X, \mathcal{O}_X) = 0$. La finitude du groupe

$$Ker[CH^2(X) \to CH^2(\bar{X})^{G_k}]$$

est démontrée par J.-L. Colliot-Thélène - W. Raskind - P. Salberger ([9, Théorème 4.3], voir aussi [10, Théorème 9.1]).

Dans les paragraphes qui suivent, nous reprenons la preuve de [9] afin d'en dégager une version effective et de donner une borne sur le noyau ci-dessus qui ne dépende que des invariants de la section 2.2.2 ci-dessus. Les arguments ci-dessous sont repris de [9] et y apparaissent intégralement. Dans le cas $H^1(X, \mathcal{O}_X) = H^2(X, \mathcal{O}_X) = 0$, une borne explicite est donnée dans [18, Théorème A.1].

Théorème 2.10. *Le groupe* $Ker[CH^2(X) \to CH^2(\bar{X})^{G_k}]$ *est d'exposant fini* N*, borné par le degré de* k *et les invariants décrits en section 2.2.2 :* $d_i(X), d_{NS}(X)$*,* $n_{ij}(X)$*, et* $d_{h,22}(X)$*.*

Démonstration. Par un argument de restriction-corestriction, quitte à multiplier l'exposant N par $d_i(X)$, $d_{NS}(X)$ et $d_{h,22}(X)$, on peut supposer que $X(k) \neq \emptyset$, que $\mathrm{NS}(X) = \mathrm{NS}(\bar{X})$, et qu'on a une courbe lisse $C \subset X$ intersection complète de sections hyperplanes, telle que $C(k) \neq \emptyset$ et telle que la flèche composée $\mathrm{Pic}^0_{X/k} \to \mathrm{Pic}^0_{C/k} \to \mathrm{Pic}^0_{X/k}$ est une isogenie dont le noyau est de cardinal d, et qu'on a $d_{h,22}(X) = dn_{22}(C)$.

Dans les notations de la Proposition 2.5(2) il suffit de montrer que le groupe

$$I = \mathrm{coker}\,[H^1(X, \mathcal{K}_2) \otimes \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \xrightarrow{\psi} \mathrm{Ker}\ \tau]$$

est d'exposant fini, borné par les invariants de la section 2.2.2.

Pour ce faire, J.-L. Colliot-Thélène et W. Raskind [9] utilisent la suite spectrale de Hochschild-Serre qui donne une filtration sur le groupe $\mathrm{Ker}[H^3_{ét}(X, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) \to H^3_{ét}(\bar{X}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))^{G_k}]$: on obtient une suite exacte

$$0 \to F_1(X) \to \mathrm{Ker}\,[H^3_{ét}(X, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) \to H^3_{ét}(\bar{X}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))^{G_k}] \xrightarrow{\psi} H^1(k, H^2_{ét}(\bar{X}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)).$$

Par composition avec ψ, on obtient ainsi l'application

$$H^1(X, \mathcal{K}_2) \otimes \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \xrightarrow{\phi} H^1(k, H^2_{ét}(\bar{X}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))).$$

Il suffit donc de borner les exposants des groupes $\mathrm{coker}\,(\phi)$ et $F_1(X) \cap NH^3_{ét}(X, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))$:

(1) D'après [10, Théorème 7.3] et sa preuve, on dispose d'une inclusion

$$\mathrm{coker}\,(\phi) \subset \mathrm{coker}\,[H^1(k, \mathrm{NS}(\bar{X}) \otimes \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(1)) \to H^1(k, H^2_{ét}(\bar{X}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)))], \tag{2.2.2}$$

où la flèche de droite est induite par la flèche

$$\mathrm{NS}(\bar{X}) \otimes \mathbb{Q}/\mathbb{Z} = \mathrm{Pic}(\bar{X}) \otimes \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \to H^2_{ét}(\bar{X}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(1)).$$

de la proposition 2.5(4). L'exposant du groupe de droite dans (2.2.2) est donc borné par l'exposant du groupe $\oplus H^3_{ét}(\bar{X}, \mathbb{Z}_\ell(1))_{tors}$. Ainsi l'exposant du groupe $\mathrm{coker}\,(\phi)$ est borné par la constante $n_{31}(X)$.

(2) Pour le groupe $F_1(X)$, on utilise la courbe C définie au début de la preuve. Soit $F_1(C)$ la partie de la filtration sur $H^3_{ét}(C, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))$ définie de la même manière que $F_1(X)$. Par fonctorialité, tout élément du groupe $F_1(X) \cap NH^3_{ét}(X, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))$ se restreint à un élement de $F_1(C)$ dans $F_1(C) \cap NH^3_{ét}(C, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))$. On a une suite exacte

$$H^3(k, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) \to F_1(*) \to H^2(k, H^1_{ét}(\bar{*}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)))$$

pour $* = C, X$.

Dans le cas des courbes, l'hypothèse $C(k) \neq \emptyset$ implique que le noyau de la flèche naturelle

$$H^2(k, H^1_{ét}(\bar{C}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))) \to H^2(k, H^1_{ét}(\bar{k}(C), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)))$$

est nul [30, Thm. 3.7 et sa preuve]. Ainsi, l'image du groupe $F_1(X) \cap NH^3_{ét}(X, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))$ dans $H^2(k, H^1_{ét}(\bar{C}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)))$ est nulle. En utilisant l'égalité $H^3(k, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) = (\mathbb{Z}/2)^r$ où r est le nombre de places réelles de k, inférieur au degré de k, on se ramène à borner l'exposant du noyau de la flèche de restriction

$$H^2(k, H^1_{ét}(\bar{X}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))) \to H^2(k, H^1_{ét}(\bar{C}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))).$$

C'est l'objet du Lemme 2.11 ci-dessous, qui conclut la preuve.

□

Lemme 2.11. *Soit X une variété projective lisse géométriquement intègre définie sur un corps de nombres k et soit $C \subset X$ une courbe, section hyperplane lisse de X, telle que $C(k) \neq \emptyset$. Supposons que l'on a un morphisme $\mathrm{Pic}^0_{C/k} \to \mathrm{Pic}^0_{X/k}$ tel que la flèche composée $\mathrm{Pic}^0_{X/k} \to \mathrm{Pic}^0_{C/k} \to \mathrm{Pic}^0_{X/k}$ est une isogénie dont le noyau est d'exposant d. Alors le groupe*

$$\mathrm{Ker}[H^2(k, H^1_{ét}(\bar{X}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))) \to H^2(k, H^1_{ét}(\bar{C}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)))]$$

est d'exposant fini, et cet exposant ne dépend que de d, de $n_{22}(X)$ et de $n_{22}(C)$.

Démonstration. La Proposition 2.5(3) appliquée à X et à C donne le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \varinjlim_n (\mathrm{Pic}^0_{X/k}(\bar{k})[n] \otimes \mu_n) \arrow[r] \arrow[d] & H^1_{ét}(\bar{X}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) \arrow[r] \arrow[d] & F_X \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \varinjlim_n (\mathrm{Pic}^0_{C/k}(\bar{k})[n] \otimes \mu_n) \arrow[r] & H^1_{ét}(\bar{C}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) \arrow[r] & F_C \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

Prenant les suites exactes longues de cohomologie, on trouve le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
H^1(k, F_X) \arrow[r] \arrow[d] & H^2(k, \varinjlim_n (\mathrm{Pic}^0_{X/k}(\bar{k})[n] \otimes \mu_n)) \arrow[r] \arrow[d, "\iota"] & H^2(k, H^1_{ét}(\bar{X}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))) \arrow[r] \arrow[d] & H^2(k, F_X) \arrow[d] \\
H^1(k, F_C) \arrow[r] & H^2(k, \varinjlim_n (\mathrm{Pic}^0_{C/k}(\bar{k})[n] \otimes \mu_n)) \arrow[r] & H^2(k, H^1_{ét}(\bar{C}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))) \arrow[r] & H^2(k, F_C).
\end{tikzcd}$$

Par chasse au diagramme on obtient que l'exposant du groupe

$$\mathrm{Ker}[H^2(k, H^1_{ét}(\bar{X}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))) \to H^2(k, H^1_{ét}(\bar{C}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)))]$$

de l'énoncé est borné par les exposants des groupes $H^2(k, F_X)$, $H^2(k, F_C)$, et $\mathrm{Ker}\, \iota$. L'exposant du premier groupe est borné par $n_{22}(X)$ puisque le groupe fini F_X est de même cardinal que $\oplus_\ell H^2_{ét}(\bar{X}, \mathbb{Z}_\ell(2))\{\ell\}$). L'exposant du deuxième est borné par $n_{22}(C)$ par la même raison.

Pour borner l'exposant du troisième groupe, soit K le noyau de la surjection composée

$$\varinjlim_n (\mathrm{Pic}^0_{X/k}(\bar{k})[n] \otimes \mu_n) \to \varinjlim_n (\mathrm{Pic}^0_{C/k}(\bar{k})[n] \otimes \mu_n) \to \varinjlim_n (\mathrm{Pic}^0_{X/k}(\bar{k})[n] \otimes \mu_n).$$

Alors K est tué par d par hypothèse, ce qui implique que le noyau de la composée

$$H^2(k, \varinjlim_n (\mathrm{Pic}^0_{X/k}(\bar{k})[n] \otimes \mu_n)) \to H^2(k, \varinjlim_n (\mathrm{Pic}^0_{C/k}(\bar{k})[n] \otimes \mu_n)) \to H^2(k, \varinjlim_n (\mathrm{Pic}^0_{X/k}(\bar{k})[n] \otimes \mu_n))$$

est tué par d. Cela termine la preuve du lemme.

□

2.2.4. *Bornes uniformes pour la partie arithmétique.* L'énoncé suivant donne une borne uniforme pour l'exposant de la partie arithmétique $Ker[CH^2(\mathcal{X}_s) \to CH^2(\mathcal{X}_{\bar{s}})]$ du groupe $CH^2(\mathcal{X}_s)_{tors}$.

Corollaire 2.12. *Soit k un corps de nombres. Soit S un schéma séparé de type fini sur k et soit $\pi : \mathcal{X} \to S$ un morphisme projectif lisse, à fibres géometriquement intègres. Supposons que $H^2(\mathcal{X}_s, \mathcal{O}_{\mathcal{X}_s}) = 0$ pour tout point $s \in S$. Soit d un entier positif. Il existe une constante $N = N(\pi, d)$, qui ne dépend que de d et de π et qui vérifie la propriété suivante : si K est une extension de k de degré au plus d et s un K-point de S, alors :*

$$N \cdot Ker[CH^2(\mathcal{X}_s) \to CH^2(\mathcal{X}_{\bar{s}})] = 0.$$

Démonstration. Il suffit d'appliquer le théorème 2.10 à la variété $\mathcal{X}_s$ sur le corps de nombres K de degré au plus $d[k : \mathbb{Q}]$ sur $\mathbb{Q}$ et de remarquer que les invariants 2.2.2 sont bornés indépendamment de s grâce aux Lemmes 2.6, 2.7 et 2.9. □

2.3. **Exposant uniforme.**

Preuve du Théorème 1.2. Soient $\pi : \mathcal{X} \to S, s \in S, \ell$ comme dans l'énoncé. D'après le corollaire 2.12, on a un entier $N_1 = N_1(\pi, d)$ qui borne l'exposant du groupe $\mathrm{Ker}[CH^2(\mathcal{X}_s) \to CH^2(\bar{\mathcal{X}}_s)]$. Puisque S est une courbe, on peut appliquer le théorème 2.2 qui donne une borne $N_2 = N_2(\pi, d, \ell)$ pour l'exposant du groupe $|\mathrm{Im}(CH^2(\mathcal{X}_s) \longrightarrow CH^2(\mathcal{X}_{\bar{s}}))\{\ell\}|$. Il suffit donc de prendre $N = N_1 N_2$.

Dans le cas où le schéma de base S est de dimension supérieure, on peut trouver une borne pour l'exposant de la torsion, qui dépend aussi du nombre de places à l'infini d'un modèle entier :

Théorème 2.13. *Soit $\mathcal{S}$ un schéma séparé de type fini sur $\mathbb{Z}$ et soit $\pi : \mathcal{X} \to \mathcal{S}$ un morphisme projectif lisse, à fibres géometriquement intègres. Supposons que $H^2(\mathcal{X}_s, \mathcal{O}_{\mathcal{X}_s}) = 0$ pour tout point $s \in \mathcal{S}$. Soient $d, r > 0$ des entiers. Il existe une constante $N = N(\pi, d, r)$ qui vérifie la propriété suivante : soit k un corps de nombres de degré $[k : \mathbb{Q}] \leq d$ et soit s un k-point de $\mathcal{S}$; si le morphisme*

$$s : \mathrm{Spec}\, k \longrightarrow \mathcal{S}$$

s'étend en un morphisme

$$U \longrightarrow \mathcal{S}$$

au-dessus d'un ouvert $U \subset \mathrm{Spec}\, \mathcal{O}_k$ tel que U admet au plus r places à l'infini, alors

$$NCH^2(\mathcal{X}_s)_{tors} = 0$$

Démonstration. Il suffit d'appliquer le Corollaire 2.12 et la Proposition 2.3. □

3. Rappels sur la méthode de Saito-Somekawa-Colliot-Thélène-Raskind

Soit X une variété projective lisse géométriquement intègre sur un corps de nombres k, telle que $H^2(X, \mathcal{O}_X) = 0$. Pour montrer la finitude du groupe $CH^2(X)_{tors}$ on procède en deux étapes : on trouve une borne sur l'exposant (ce qui est fait dans la section précédente), et on trouve une borne sur le sous-groupe de n-torsion $CH^2(X)[n]$ pour n fixé. Pour la deuxième étape, J.-L. Colliot-Thélène et W. Raskind utilisent la méthode de *localisation* qui permet de relever les éléments du groupe $CH^2(X)[n]$ en des éléments du groupe $CH^2(\mathcal{X}_U)[N]$ où $\mathcal{X}_U$ est un modèle de X sur un ouvert $U \subset \mathrm{Spec}\, \mathcal{O}_k$ pour un certain entier N.

Dans cette section, on reprend certaines variantes des arguments précédents en les adaptant de façon à pouvoir les utiliser de manière effective dans la section suivante. L'enjeu principal est la dépendance des constantes qui apparaissent dans la torsion dans CH^2 en le groupe fondamental étale de la base U. Cette dépendance rend délicat le fait de remplacer U par un revêtement ramifié fini qui, même lorsque l'on en borne le degré, peut avoir un groupe fondamental étale arbitrairement grand. C'est cette raison qui rend nécessaire d'adapter certains arguments.

3.1. **Une suite de localisation.**

La suite exacte suivante est le point de départ du contrôle de la torsion dans CH^2.

Lemme 3.1. *(*[29, Proposition 1.2] *; voir* [9, suite ($\mathcal{L}$) p.231]*) Soit X une variété projective et lisse, géométriquement intègre, définie sur un corps de nombres k et soit $\mathcal{X}_U \to U$ un modèle projectif et lisse de X sur un ouvert $U \subset \mathrm{Spec}\, \mathcal{O}_k$. On a une suite exacte*

$$H^1(X, \mathcal{K}_2) \to \bigoplus_{s \in U^{(1)}} \mathrm{Pic}(\mathcal{X}_s) \to CH^2(\mathcal{X}_U) \to CH^2(X) \to 0. \tag{3.1.1}$$

On s'intéresse à comprendre le conoyau de l'application de gauche de la suite ci-dessus. La première étape est le lemme suivant, adapté de [9, Lemme 3.2].

Lemme 3.2. *Soit X une variété projective, lisse, géométriquement intègre définie sur un corps de nombres k et soit $\mathcal{X}_U \to U$ un modèle projectif et lisse de X sur un ouvert U de l'anneau des entiers $\mathcal{O}_k$ de k. On suppose que $H^2(\mathcal{X}_s, \mathcal{O}_{\mathcal{X}_s}) = 0$ pour tout point $s \in U$.*

Suposons qu'il existe un entier strictement positif N tel que pour tout point $s \in U$ et pour tout point géométrique $\bar{s}$ au-dessus de s, le conoyau de la flèche naturelle $\mathrm{Pic}(\mathcal{X}_U) \to \mathrm{NS}(\mathcal{X}_{\bar{s}})$ est tué par N. Alors le conoyau de l'application composée

$$H^1(X, \mathcal{K}_2) \to \bigoplus_{s \in U^{(1)}} \mathrm{Pic}(\mathcal{X}_s) \to \bigoplus_{s \in U^{(1)}} \mathrm{NS}(\mathcal{X}_{\bar{s}})$$

est d'exposant fini, tué par l'entier

$$N \cdot \#Cl(U).$$

Démonstration. Soit $\{l_s\}_{s \in U^{(1)}} \in \bigoplus_{s \in U^{(1)}} \mathrm{NS}(\mathcal{X}_{\bar{s}})$. D'après l'hypothèse, la classe Nl_s se relève en un élèment $L_s \in \mathrm{Pic}(\mathcal{X}_U)$.

On écrit $U = \mathrm{Spec}\, B$. Soit $d = \#Cl(U)$. Pour tout idéal premier $s \in \mathrm{Spec}\, B$ l'idéal s^d est principal et l'on peut donc écrire $s^d = (\pi_s)$ pour un certain $\pi_s \in B$. Soit $v : k^* \to \mathbb{Z}$ la valuation associée à s. On a $v(\pi_s) = d$ et $v_{s'}(\pi_s) = 0$ pour $s' \neq s$.

Comme dans [9, Lemme 3.2] on trouve que $\{l_s\}^{\otimes Nd}_{s \in U^{(1)}} \in \bigoplus_{s \in U^{(1)}} \mathrm{NS}(\mathcal{X}_{\bar{s}})$ est l'image de $\sum L_s \otimes \pi_s$ par la flèche composée

$$\mathrm{Pic}(\mathcal{X}_U) \otimes k^* \to \mathrm{Pic}(X) \otimes k^* \to H^1(X, \mathcal{K}_2) \to \bigoplus_{s \in U^{(1)}} \mathrm{Pic}(\mathcal{X}_s) \to \bigoplus_{s \in U^{(1)}} \mathrm{NS}(\mathcal{X}_{\bar{s}}).$$

□

Pour comprendre la partie qui vient du groupe $\bigoplus_{s \in U^{(1)}} \mathrm{Pic}^0(\mathcal{X}_s)$ dans la suite (3.1.1), on va utiliser les techniques développées par M. Somekawa dans [32]. On rappelle ces techniques dans le paragraphe suivant pour pouvoir les utiliser de manière effective.

3.2. **Bornes uniformes dans la suite exacte de Bloch-Kato-Saito-Somekawa.**

3.2.1. *Le groupe $K(k, A, \mathbb{G}_m)$.* Soit k un corps et soit A une variété abélienne sur k. Somekawa [32] a défini le groupe $K(k, A, \mathbb{G}_m)$ comme un quotient du groupe

$$\bigoplus_{L/k \text{ fini}} A(L) \otimes_{\mathbb{Z}} L^*$$

par des relations de deux types : formule de projection, et réciprocité à la Weil. Dans ce texte, on n'aura pas besoin de préciser ces relations. Notons par ailleurs que la construction de Somekawa est plus générale : elle est en particulier valable pour une famille de variétés semi-abéliennes sur k.

Si n est un entier inversible dans k, on dispose d'une application naturelle [32, Proposition 1.5] :

$$K(k, A, \mathbb{G}_m)/n \to H^2_{\acute{e}t}(k, A(1)[n]). \quad (3.2.1)$$

3.2.2. *Résidus dans le cas local.* Supposons maintenant k local de caractéristique 0 et soit $\mathcal{A}$ un schéma abélien sur l'anneau des entiers $\mathcal{O}_k$ de k. Soit $A = \mathcal{A}_k$ la fibre générique de $\mathcal{A}/\mathcal{O}_k$. Soit κ le corps résiduel de $\mathcal{O}_k$ et soit $\mathcal{A}_\kappa$ la fibre spéciale de $\mathcal{A}$. Si L/k est une extension finie de k de corps résiduel κ_L, on dispose d'une flèche de bord $A(L) \otimes L^* \to \mathcal{A}_\kappa(\kappa)$ obtenue par la composition

$$A(L) \otimes L^* \to \mathcal{A}_{\kappa_L}(\kappa_L) \to \mathcal{A}_\kappa(\kappa). \quad (3.2.2)$$

La première flèche envoie $x \otimes \alpha \in \mathcal{A}(L) \otimes L^* = \mathcal{A}(\mathcal{O}_L) \otimes L^*$ sur $v_L(\alpha)\bar{x}$ où $\bar{x}$ est l'image de x dans $\mathcal{A}_{\kappa_L}(\kappa_L)$ et où v_L est la valuation de L. La deuxième flèche est induite par la norme. La flèche (3.2.2) ci-dessus passe au quotient par les relations et induit une flèche [32, p.114]

$$\partial : K(k, A, \mathbb{G}_m) \to \mathcal{A}_\kappa(\kappa).$$

Soit $T(A) = \varprojlim_n A(\bar{k})[n]$ le module de Tate de A, et soit $T_\ell(A) = \varprojlim_r A(\bar{k})[\ell^r]$ où ℓ est un nombre premier. Soit $G_k = Gal(\bar{k}/k)$ le groupe de Galois absolu de k et soit $T(A)_{G_k}$ le module des coinvariants. Puisque $\mathcal{A}$ est lisse sur $\mathcal{O}_k$, on dispose d'une surjection $\alpha : T(A)_{G_k} \to \mathcal{A}_\kappa(\kappa)$.

La composée de la flèche (3.2.1) avec la dualité locale (*loc .cit.*) $H^2_{\acute{e}t}(k, A(1)[n]) \simeq A(\bar{k})[n]_{G_k}$ donne une flèche $K(k, A, \mathbb{G}_m)/n \to A(\bar{k})[n]_{G_k}$. En passant à la limite on obtient ainsi une application

$$c(k) : K(k, A, \mathbb{G}_m) \to T(A)_{G_k}. \tag{3.2.3}$$

Si $\mathcal{A}$ est un schéma abélien comme ci-dessus, on a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd} \bigoplus_{L/k \text{ fini}} A(L) \otimes L^* \arrow[r, two heads, "\pi"] \arrow[d] & K(k, A, \mathbb{G}_m) \arrow[r, "c(k)"] \arrow[d, "\partial"] & T(A)_{G_k} \arrow[d, two heads, "\alpha"] \\ \mathcal{A}_\kappa(\kappa) \arrow[r, equal] & \mathcal{A}_\kappa(\kappa) \arrow[r, equal] & \mathcal{A}_\kappa(\kappa), \end{tikzcd} \tag{3.2.4}$$

où les applications π, α, ∂, et $c(k)$ sont surjectives (voir [32, Theorem 3.3] pour l'application $c(k)$).

3.2.3. *Cas global.* Supposons maintenant que k est un corps de nombres. Soit S un ensemble fini de places de k qui contient les places archimédiennes et les places de mauvaise réduction de A. Comme ci-dessus, on écrit $T(A)_{G_k}$ pour le module de Tate de A. Pour toute place v de k on note k_v le complété de k, $A_v = A_{k_v}$, $G_v = G_{k_v}$ et $T(A_v)_{G_v}$ le module de Tate de A_v.

D'après un résultat de Katz et Lang, $T(A)_{G_k}$ est fini. Plus précisément, on a la borne suivante :

Proposition 3.3 ([20], Theorem 1(bis), Theorem 1(ter))**.** *Soit v une place finie de k, de corps résiduel $\kappa(v)$, en laquelle A a bonne réduction $A_{\kappa(v)}$. Alors*

(1) on a une surjection

$$T_\ell(A_{\kappa(v)})_{G_{\kappa(v)}} \twoheadrightarrow T_\ell(A)_{G_k}$$

pour tout premier $\ell \neq car(\kappa(v))$;

(2) on a l'égalité de cardinaux des groupes fini

$$\#T(A_{\kappa(v)})_{G_{\kappa(v)}} = \#A_{\kappa(v)}(\kappa(v)).$$

Corollaire 3.4. *Supposons que A a bonne réduction en deux places v_1, v_2 de caractéristiques résiduelles différentes. Alors le groupe $T(A)_{G_k}$ est fini, de cardinal au plus*

$$\#T(A)_{G_k} \leq \#A_{\kappa(v_1)}(\kappa(v_1))\#A_{\kappa(v_2)}(\kappa(v_2)).$$

Démonstration. Pour $i = 1, 2$, soit p_i la caractéristique résiduelle de v_i. La proposition précédente montre que la partie première à p_i de $T(A)_{G_k}$ est bornée supérieurement par $\#A_{\kappa(v_i)}(\kappa(v_i))$, ce qui conclut. $\square$

Somekawa a établi la suite de réciprocité suivante.

Théorème 3.5 ([32], Theorem 4.1)**.** *Soit n un entier divisible par l'ordre du groupe fini $T(A)_G$. Alors on a une suite exacte*

$$K(k,A,\mathbb{G}_m) \xrightarrow{\theta} \prod_{v\notin S} T(A_v)_{G_v} \oplus \prod_{v\in S} K(k_v,A_v,\mathbb{G}_m)/n \xrightarrow{R} T(A)_G \to 0,$$

où les flèches θ, R sont induites par les applications $c(k_v)$ de (3.2.3).

Dans la suite, on aura besoin du corollaire suivant (cf. [9, Théorème 2.1]).

Corollaire 3.6. *Soit $U \subset \operatorname{Spec}\mathcal{O}_k$ un ouvert non vide. Soit $\mathcal{A}$ un U-schéma abélien. Soit A la fibre générique de $\mathcal{A}$. Soit*

$$\gamma : \bigoplus_{L/k\, fini} A(L)\otimes_{\mathbb{Z}} L^* \to \bigoplus_{s\in U^{(1)}} \mathcal{A}_s(\kappa(s))$$

la flèche induite par les applications (3.2.2). Alors le conoyau de γ est fini, borné supérieurement par $\#\mathcal{A}_{s_1}(\kappa(s_1))\#\mathcal{A}_{s_2}(\kappa(s_2))$, où s_1, s_2 sont deux points quelconques de U de caractéristiques résiduelles différentes.

Démonstration. On applique le Théorème 3.5 avec S le complémentaire de l'ensemble des places sur U dans l'ensemble des places de k. Ainsi, on a le diagramme commutatif suivant

$$\begin{tikzcd}
K(k,\mathcal{A},\mathbb{G}_m) \arrow[r, "\theta_0"] \arrow[d, equal] & \prod_{v\in U} T(\mathcal{A}_v)_{G_v} \arrow[r] \arrow[d] & \operatorname{coker}(\theta_0) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
K(k,\mathcal{A},\mathbb{G}_m) \arrow[r, "\theta"] & \prod_{v\in U} T(\mathcal{A}_v)_{G_v} \oplus \prod_{v\in S} K(k_v,\mathcal{A}_v,\mathbb{G}_m)/n \arrow[r] & T(A)_{G_v} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

dans lequel la flèche verticale du milieu est injective. Ainsi, $\operatorname{coker}(\theta_0)$ est fini, et on a une injection

$$\operatorname{coker}(\theta_0) \hookrightarrow T(A)_{G_k}. \tag{3.2.5}$$

D'après (3.2.4), l'application γ se factorise en

$$\bigoplus_{L/k\,\text{fini}} A(L)\otimes L^* \twoheadrightarrow K(k,\mathcal{A},\mathbb{G}_m) \xrightarrow{\theta_0} \prod_{v\in U} T(\mathcal{A}_v)_{G_v} \twoheadrightarrow \bigoplus_{v\in U} \mathcal{A}(\kappa(v))$$

où la première et la dernière flèches sont surjectives. Ainsi

$$\#\operatorname{coker}(\gamma) \leq \#\operatorname{coker}(\theta_0), \tag{3.2.6}$$

d'où $\#\operatorname{coker}(\gamma) \leq \#T(A)_{G_k}$ par (3.2.5) et (3.2.6). Il ne reste qu'à appliquer le Corollaire 3.4. □

4. Relèvements entiers

Le but de cette section est de prouver le Théorème 1.4 en s'appuyant sur les résultats de la section précédente.

On se donne $\mathcal{S}$ un schéma intègre, séparé, de type fini sur $\mathbb{Z}$. Soit $\pi : \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{S}$ un morphisme projectif lisse à fibres géométriquement intègres.

4.1. **Préliminaires.** Soit η le point générique de $\mathcal{S}$ et soit $\bar{\eta}$ un point géométrique de $\mathcal{S}$ au-dessus de η. Soit $K = \kappa(\eta)$ le corps résiduel de η, i.e., le corps des fonctions de $\mathcal{S}$. Par fonctorialité du groupe fondamental étale, on dispose d'une application naturelle

$$G_K \to \pi_1(\mathcal{S}, \bar{\eta})$$

du groupe de Galois absolu de K vers le groupe fondamental étale de $\mathcal{S}$.

Lemme 4.1. *Soit ℓ un nombre premier inversible sur $\mathcal{S}$. L'action naturelle de G_K sur $\mathrm{NS}(\mathcal{X}_{\bar{\eta}}) \otimes \mathbb{Z}_\ell$ se factorise par $\pi_1(\mathcal{S}, \bar{\eta})$.*

Démonstration. L'application classe de cycle définit une injection G_K-équivariante :

$$\mathrm{NS}(\mathcal{X}_{\bar{\eta}}) \otimes \mathbb{Z}_\ell \to H^2_{ét}(\mathcal{X}_{\bar{\eta}}, \mathbb{Z}_\ell(1)),$$

ce qui prouve le résultat car l'action de G_K sur $H^2_{ét}(\mathcal{X}_{\bar{\eta}}, \mathbb{Z}_\ell(1))$ se factorise par $\pi_1(\mathcal{S}, \bar{\eta})$ car $H^2_{ét}(\mathcal{X}_{\bar{\eta}}, \mathbb{Z}_\ell(1))$ est la fibre en $\bar{\eta}$ du faisceau localement constant $R^2\pi_*\mathbb{Z}_\ell(1)$. □

Lemme 4.2. *Soit ℓ un nombre premier inversible sur $\mathcal{S}$. Il existe un revêtement*

$$p : \mathcal{S}' \to \mathcal{S}$$

fini étale connexe tel que, si η' est le point générique de $\mathcal{S}'$ et $\bar{\eta}'$ est un point géométrique de $\mathcal{S}'$ au-dessus de η', alors l'action du groupe de Galois absolu $G_{\kappa(\eta')}$ sur le groupe $\mathrm{NS}(\mathcal{X}_{\bar{\eta}'}) \otimes \mathbb{Z}_\ell$ est triviale.

Démonstration. Le lemme 4.1 montre que le groupe profini $\pi_1(\mathcal{S}, \bar{\eta})$ agit continûment sur le $\mathbb{Z}_\ell$-module de type fini $\mathrm{NS}(\mathcal{X}_{\bar{\eta}}) \otimes \mathbb{Z}_\ell$, cette action se factorise donc par un groupe fini, ce qui conclut en prenant pour $\mathcal{S}'$ le revêtement de $\mathcal{S}$ correspondant à ce quotient fini du groupe fondamental étale. □

Lemme 4.3. *Soit η' le point générique de $\mathcal{S}'$ et $\bar{\eta}'$ un point géométrique au-dessus de η'. Avec les notations du Lemme 4.2, le conoyau de l'inclusion naturelle*

$$i_{\eta'} : \mathrm{NS}(\mathcal{X}_{\bar{\eta}'})^{G_{\kappa(\eta')}} \to \mathrm{NS}(\mathcal{X}_{\bar{\eta}'})$$

est de torsion.

Démonstration. Le noyau de l'application

$$\mathrm{NS}(\mathcal{X}_{\bar{\eta}'}) \to \mathrm{NS}(\mathcal{X}_{\bar{\eta}'}) \otimes \mathbb{Z}_\ell$$

est le sous-groupe de torsion première à ℓ. Soit M un entier strictement positif qui annule ce noyau. Alors si α est un élément de $\mathrm{NS}(\mathcal{X}_{\bar{\eta}'})$ et si σ est un élément de $G_{\kappa(\eta')}$, l'image de α dans $\mathrm{NS}(\mathcal{X}_{\bar{\eta}'}) \otimes \mathbb{Z}_\ell$ est invariante par σ par construction, donc on a :

$$M(\sigma(\alpha) - \alpha) = 0.$$

Cela montre que $M\alpha$ est invariant sous $G_{\kappa(\eta')}$, ce qui conclut.

□

Lemme 4.4. *Supposons que le morphisme structurel $\mathcal{S} \to \operatorname{Spec} \mathbb{Z}$ n'est pas surjectif, i.e. qu'il existe un nombre premier ℓ inversible sur $\mathcal{S}$. Alors il existe un revêtement*

$$p : \mathcal{S}' \to \mathcal{S}$$

fini étale connexe tel que, si η' est le point générique de $\mathcal{S}'$ le conoyau de l'application de spécialisation

$$\mathrm{Pic}(\mathcal{X} \times_{\mathcal{S}} \mathcal{S}') \to \mathrm{NS}(\mathcal{X}_{\bar{\eta}'})$$

est de torsion.

Démonstration. On choisit $p : \mathcal{S}' \to \mathcal{S}$ comme dans le lemme 4.3 dont on garde les notations. On note $\mathcal{X}' = \mathcal{X} \times_{\mathcal{S}} \mathcal{S}'$.

Soit $\overline{\eta}'$ un point géométrique de $\mathcal{S}'$ au-dessus de η'. Soient $L_{1,\overline{\eta}'}, \ldots, L_{\rho,\overline{\eta}'}$ des éléments de $\mathrm{Pic}(\mathcal{X}_{\overline{\eta}'})$ dont les images l_i dans $\mathrm{NS}(\mathcal{X}_{\overline{\eta}'})^{G_{\kappa(\eta')}}$ forment une famille génératrice de $\mathrm{NS}(\mathcal{X}_{\overline{\eta}'})^{G_{\kappa(\eta')}}$.

On peut trouver une extension finie Galoisienne K du corps résiduel $\kappa(\eta')$ telle que les $L_{i,\overline{\eta}'}$ soient tous définis sur K. Soit $L_{i,\eta'} \in \mathrm{Pic}(\mathcal{X}_{\overline{\eta}})^{G_{\kappa(\eta')}}$ le produit tensoriel des conjugués de $L_{i,\overline{\eta}'}$ par les éléments du groupe de Galois de $K/\kappa(\eta')$. Le conoyau de la flèche naturelle

$$\mathrm{Pic}(\mathcal{X}_{\eta'}) \to \mathrm{Pic}(\mathcal{X}_{\overline{\eta}})^{G_{\kappa(\eta')}}$$

est tué par l'indice $i_{\eta'}$ de la fibre générique $\mathcal{X}_{\eta'}$. En particulier, le fibré en droites

$$L'_{i,\eta'} := L_{i,\eta'}^{\otimes i_{\eta'}}$$

provient de $\mathrm{Pic}(\mathcal{X}_{\eta'})$. Soit L'_i un élément de $\mathrm{Pic}(\mathcal{X}')$ qui s'envoie sur $L'_{i,\eta'}$.

Soit $r_{\eta'}$ l'application composée

$$\mathrm{Pic}(\mathcal{X}') \to \mathrm{Pic}(\mathcal{X}_{\eta'}) \to \mathrm{NS}(\mathcal{X}_{\overline{\eta}'}).$$

Par hypothèse, l'image l_i de $L_{i,\overline{\eta}'}$ dans $\mathrm{NS}(\mathcal{X}_{\overline{\eta}'})$ est Galois-invariante. Par construction, on a donc

$$r_{\eta'}(L'_i) = [K : \kappa(\eta')] i_{\eta'} l_i.$$

En particulier, les images des L'_i par $r_{\eta'}$ engendrent un sous-groupe qui contient

$$[K : \kappa(\eta')] i_{\eta'} \mathrm{NS}(\mathcal{X}_{\overline{\eta}'})^{G_{\kappa(\eta')}}.$$

Appliquant le Lemme 4.3, on trouve que le conoyau de

$$r_{\eta'} : \mathrm{Pic}(\mathcal{X}') \longrightarrow \mathrm{NS}(\mathcal{X}_{\overline{\eta}'})$$

est de torsion. □

Proposition 4.5. *Supposons que $H^2(\mathcal{X}_s, \mathcal{O}_{\mathcal{X}_s}) = 0$ pour tout point $s \in \mathcal{S}$. Supposons que le morphisme structurel $\mathcal{S} \to \mathrm{Spec}\,\mathbb{Z}$ n'est pas surjectif, i.e. qu'il existe un nombre premier ℓ inversible sur $\mathcal{S}$. Alors il existe un revêtement*

$$p : \mathcal{S}' \to \mathcal{S}$$

fini étale connexe, et un entier N tel que pour tout point géométrique $\overline{s}'$ de $\mathcal{S}'$, le conoyau de l'application de spécialisation

$$\mathrm{Pic}(\mathcal{X} \times_{\mathcal{S}} \mathcal{S}') \to \mathrm{NS}(\mathcal{X}_{\overline{s}'})$$

est tué par N.

Démonstration. Soit $\overline{s}'$ un point géométrique de $\mathcal{S}'$. On dispose des applications de spécialisation

$$r_{s'} : \mathrm{Pic}(\mathcal{X} \times_{\mathcal{S}} \mathcal{S}') \to \mathrm{NS}(\mathcal{X}_{\overline{s}'})$$

et

$$r_{s'}^{\mathrm{NS}} : \mathrm{NS}(\mathcal{X}_{\overline{\eta}'}) \to \mathrm{NS}(\mathcal{X}_{\overline{s}'}),$$

où $r_{s'}^{\mathrm{NS}}$ est surjective. C'est ici que l'on utilise l'hypothèse d'annulation de $H^2(\mathcal{X}_{s'}, \mathcal{O}_{X_{s'}})$ via [16, Corollaire 1 de la Proposition 3 p.11] qui garantit l'existence de relèvements de fibrés en droites, voir l'argument de [9, Lemme 3.1]. On a un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Pic}(\mathcal{X} \times_{\mathcal{S}} \mathcal{S}') \arrow[r, "r_{\eta'}"] \arrow[dr, "r_{s'}"'] & \mathrm{NS}(\mathcal{X}_{\overline{\eta}'}) \arrow[d, "r_{s'}^{\mathrm{NS}}"] \\
& \mathrm{NS}(\mathcal{X}_{\overline{s}'}).
\end{tikzcd}$$

Il suit immédiatement que le conoyau de $r_{\eta'}$ se surjecte sur le conoyau de $r_{s'}$, ce qui conclut grâce au Lemme 4.4. □

4.2. **Preuve du Théorème 1.4.**

4.2.1. L'énoncé qui suit est une variante effective de [9, Lemme 3.3], dont on va rappeler les arguments.

Soit X une variété projective, lisse, géométriquement intègre, définie sur un corps de nombres k. Soit $\mathcal{X}_U \to U$ un modèle projectif et lisse de X sur un ouvert $U \subset \operatorname{Spec} \mathcal{O}_k$. Supposons que $H^2(\mathcal{X}_s, \mathcal{O}_{\mathcal{X}_s}) = 0$ pour tout point $s \in U$.

Suposons qu'il existe un entier strictement positif N tel que pour tout point $s \in U$ et pour tout point géométrique $\bar{s}$ au-dessus de s, le conoyau de la flèche naturelle $\operatorname{Pic}(\mathcal{X}_U) \to \operatorname{NS}(\mathcal{X}_{\bar{s}})$ est tué par N.

Proposition 4.6. *Soit $\mathcal{J}$ le schéma abélien $Pic^0_{\mathcal{X}_U/U}$. On fixe $s_1, s_2 \in U$ deux points fermés de U de caractéristiques résiduelles différentes. Il existe un entier n' qui ne dépend que de N, $\#Cl(U)$ et des fibres $\mathcal{J}_{s_1}, \mathcal{J}_{s_2}$ tel que le noyau de la restriction $CH^2(\mathcal{X}_U) \to CH^2(X)$ est tué par n'. En particulier, pour tout entier strictement positif n, l'image de l'application naturelle $CH^2(\mathcal{X}_U)[nn'] \to CH^2(X)[nn']$ contient le groupe $CH^2(X)[n]$.*

Démonstration. Soit $K = \ker[CH^2(\mathcal{X}_U) \to CH^2(X)]$. On va prendre pour n' l'exposant de K, dont on va montrer qu'il est bien fini et borné par une constante ne dépendant que de N, U et des fibres $\mathcal{J}_{s_1}$ et $\mathcal{J}_{s_2}$.

De la suite de localisation (3.1.1) on déduit :

$$K = \operatorname{coker}[H^1(X, \mathcal{K}_2) \to \bigoplus_{s \in U^{(1)}} \operatorname{Pic}(\mathcal{X}_s)].$$

Soit J la fibre générique de $\mathcal{J}$. D'après le corollaire 3.6 appliqué au schéma abélien $\mathcal{J}$ on a une suite exacte :

$$\bigoplus_{F/k \text{ fini}} J(F) \otimes_{\mathbb{Z}} F^* \xrightarrow{\gamma} \bigoplus_{s \in U^{(1)}} \mathcal{J}_s(\kappa(s)) \xrightarrow{\delta} \operatorname{coker}(\gamma) \to 0,$$

où l'exposant du groupe de droite est borné par une constante qui ne dépend que de $\mathcal{J}_{s_1}$ et $\mathcal{J}_{s_2}$.

Remarquons que les groupes $\mathcal{J}_s(\kappa(s))$ ne sont pas nécessairement des sous-groupes des groupes $\operatorname{Pic}(\mathcal{X}_s)$ car on n'a pas supposé que $\mathcal{X}_s$ a un point rationnel. Toutefois, $\mathcal{J}_s(\overline{\kappa(s)}) = \operatorname{Pic}^0(\mathcal{X}_{\bar{s}})$, la flèche $\operatorname{Pic}(\mathcal{X}_s) \to \operatorname{Pic}(\mathcal{X}_{\bar{s}})$ est injective, et l'inclusion $\mathcal{J}_s(\kappa(s)) \cap \operatorname{Pic}(\mathcal{X}_s) \subset \mathcal{J}_s(\overline{\kappa(s)}) \cap \operatorname{Pic}(\mathcal{X}_s)$ est une égalité.

On dispose donc d'une suite exacte :

$$0 \to \bigoplus_{s \in U^{(1)}} \mathcal{J}_s(\kappa(s)) \cap \operatorname{Pic}(\mathcal{X}_s) \to \bigoplus_{s \in U^{(1)}} \operatorname{Pic}(\mathcal{X}_s) \to \bigoplus_{s \in U^{(1)}} \operatorname{NS}(\mathcal{X}_{\bar{s}}).$$

Soient

$$A = \gamma^{-1}\Big(\bigoplus_{s \in U^{(1)}} \mathcal{J}_s(\kappa(s)) \cap \operatorname{Pic}(\mathcal{X}_s)\Big) \text{ et } C = \delta\Big(\bigoplus_{s \in U^{(1)}} \mathcal{J}_s(\kappa(s)) \cap \operatorname{Pic}(\mathcal{X}_s)\Big),$$

de sorte que C est un sous-groupe du conoyau de γ.

Comme dans [9, Lemme 3.3], on a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & & \\
A \arrow[r] \arrow[d] & \bigoplus_{s\in U^{(1)}} \mathcal{J}_s(\kappa(s)) \cap \mathrm{Pic}(\mathcal{X}_s) \arrow[r] \arrow[d] & C \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
H^1(X,\mathcal{K}_2) \arrow[r] \arrow[dr] & \bigoplus_{s\in U^{(1)}} \mathrm{Pic}(\mathcal{X}_s) \arrow[r] \arrow[d] & K \arrow[r] & 0 \\
 & \bigoplus_{s\in U^{(1)}} \mathrm{NS}(\mathcal{X}_{\bar{s}}) & &
\end{tikzcd}$$

Une chasse aux diagramme montre que l'exposant de K est borné par le produit de l'exposant de C et de l'exposant du conoyau de la flèche diagonale. Le lemme 3.2 pour la flèche diagonale, et le corollaire 3.6 permettent de conclure. $\square$

4.2.2. On peut maintenant donner la preuve du Théorème 1.4. On fixe un schéma $\mathcal{S}$ intègre, séparé, de type fini sur $\mathbb{Z}$ et un morphisme $\pi : \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{S}$ un morphisme projectif lisse à fibres géométriquement intègres. Supposons que $H^2(\mathcal{X}_s, \mathcal{O}_{\mathcal{X}_s}) = 0$ pour tout point $s \in \mathcal{S}$.

Soit k un corps de nombres, $\mathcal{O}_k$ son anneau des entiers, et soit $U \subset \mathrm{Spec}\,\mathcal{O}_k$ un ouvert non vide. Soit $s : \mathrm{Spec}\,k \longrightarrow \mathcal{S}$ l'image du point générique d'un U-point de $\mathcal{S}$. On cherche un entier N ne dépendant que de U et de π tel que

$$|CH^2(\mathcal{X}_s)_{tors}| \leq N.$$

Soit ℓ un nombre premier. Quitte à remplacer U par $U \times_{\mathrm{Spec}\,\mathbb{Z}} \mathrm{Spec}\,\mathbb{Z}[1/\ell]$ et $\mathcal{S}$ par $\mathcal{S} \times_{\mathrm{Spec}\,\mathbb{Z}} \mathrm{Spec}\,\mathbb{Z}[1/\ell]$, on peut supposer que ℓ est inversible sur U.

Proposition 4.7. *Il existe un entier N' ne dépendant que de U et de π tel que, pour tout entier n, l'image de l'application naturelle $CH^2(\mathcal{X}_U)[nN'] \to CH^2(\mathcal{X}_s)[nN']$ contient le groupe $CH^2(\mathcal{X}_s)[n]$.*

Démonstration. La Proposition 4.5 montre l'existence d'un morphisme

$$p : \mathcal{S}' \to \mathcal{S}$$

fini étale et d'un entier N_1' ne dépendant que de π tel que, pour tout point géométrique $\bar{m}'$ de $\mathcal{S}'$, le conoyau de l'application de spécialisation

$$\mathrm{Pic}(\mathcal{X} \times_{\mathcal{S}} \mathcal{S}') \to \mathrm{NS}(\mathcal{X}_{\bar{m}'})$$

est tué par N_1'.

Soit V une composante connexe de $U \times_{\mathcal{S}} \mathcal{S}'$. On a un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & K \arrow[r] \arrow[d] & CH^2(\mathcal{X}_U) \arrow[r] \arrow[d] & CH^2(X) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & K_L \arrow[r] & CH^2(\mathcal{X}_V) \arrow[r] & CH^2(X_L) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

où L est le corps des fonctions de V. Le degré $d_L = [L : k]$ est borné par le degré de p, et annule le groupe $\mathrm{Ker}[CH^2(\mathcal{X}_U) \to CH^2(\mathcal{X}_V)]$ (voir [15, Theorem 7.22] pour la construction de la norme dans ce cas). Une chasse au diagramme montre que l'exposant du groupe K est borné par le produit de d_L et de l'exposant du groupe K_L.

L'hypothèse de la Proposition 4.6 est satisfaite sur $\mathcal{S}'$ par construction. L'exposant de K_L est donc borné par une constante N_2' qui ne dépend que de V, et π. En effet, le Lemme 2.4 garantit que, avec les notations de la Proposition 4.6, on peut choisir les fibres $\mathcal{J}_{s_1'}$ et $\mathcal{J}_{s_2'}$ d'une manière qui ne dépend que de $\mathcal{S}'$.

Le corps k n'admet qu'un nombre fini d'extensions finies non ramifiées de degré borné sur U, voir par exemple [31, II.6, Lemme 6]. En particulier, le schéma V ci-dessus ne peut prendre qu'un nombre fini de valeurs, ce qui conclut. □

Proposition 4.8. *Soit n un entier strictement positif, inversible sur U. Il existe un entier N'' ne dépendant que de n, U et π tel que*

$$|CH^2(\mathcal{X}_U)[n]| \leq N''.$$

Démonstration. Comme dans la proposition 2.5(1), le groupe $CH^2(\mathcal{X}_U)[n]$ est un sous-quotient du groupe (fini) $H^3_{ét}(\mathcal{X}_U, \mu_n^{\otimes 2})$ (voir [10, (3.11), Théorème 6.2]).

On va borner la taille du groupe $H^3_{ét}(\mathcal{X}_U, \mu_n^{\otimes 2})$. On utilise la suite spectrale de Leray pour $\pi_U : \mathcal{X}_U \to U$:

$$H^p_{ét}(U, R^q\pi_{U*}\mu_n^{\otimes 2}) \Rightarrow H^{p+q}_{ét}(\mathcal{X}_U, \mu_n^{\otimes 2}).$$

Il suffit donc pour conclure de borner la taille des groupes $H^i_{ét}(U, R^j\pi_{U*}\mu_n^{\otimes 2})$ où $i + j = 3$. Les fibres géométriques du faisceau $\mathcal{F} = R^j\pi_{U*}\mu_n^{\otimes 2}$ sont isomorphes à $H^j_{ét}(\mathcal{X}_{\bar{s}}, \mu_n^{\otimes 2})$, elles sont donc constantes dans la famille $\pi : \mathcal{X} \to \mathcal{S}$.

Puisque le morphisme π est lisse, le faisceau $\mathcal{F}$ est localement constant. Il existe donc un morphisme fini étale $\tau : U' \to U$ tel que le faisceau $\mathcal{F}_{U'}$ est constant, de fibre $H^j_{ét}(\mathcal{X}_{\bar{s}}, \mu_n^{\otimes 2})$. Soit F le corps des fonctions de U' : c'est une extension finie de k.

Notons que le groupe de Galois G du revêtement τ est un sous-groupe du groupe des automorphismes de $H^j_{ét}(\mathcal{X}_{\bar{s}}, \mu_n^{\otimes 2})$, on n'a donc qu'un nombre fini de tels groupes, et le cardinal $|G|$ est borné. Ainsi l'extension F/k est de degré borné. Comme cette extension est non-ramifiée au-dessus de l'ouvert fixé U de $\mathcal{O}_k$ par construction, on n'a qu'un nombre fini de possibilités pour le corps F.

Ainsi seul un nombre fini de groupes de cohomologie $H^i_{ét}(U, R^j\pi_{U*}\mu_n^{\otimes 2})$ peuvent apparaître comme on le voit en considérant la suite spectrale $H^p(G, H^q(U', \mathcal{F}_{U'})) \Rightarrow H^{p+q}(U, \mathcal{F})$ où l'on n'a qu'un nombre fini de possibilités pour G, U', et les groupes finis $H^q(U', \mathcal{F}_{U'})$ d'après ce qui précède. On peut donc borner la taille des groupes $H^i_{ét}(U, R^j\pi_{U*}\mu_n^{\otimes 2})$ par une constante qui ne dépend que de π et de U, d'où le résultat. □

Démonstration du Théorème 1.4. Le Théorème 2.13 montre qu'il existe un entier N''' ne dépendant que du degré de k sur $\mathbb{Q}$ et de π tel que l'exposant du groupe $CH^2(\mathcal{X}_s)_{tors}$ est borné par N'''. La Proposition 4.7 dont on garde les notations montre que l'application naturelle $CH^2(\mathcal{X}_U)[N'N'''] \to CH^2(\mathcal{X}_s)_{tors}$ est surjective. C'est encore le cas si l'on remplace U par $U \times_{\operatorname{Spec}\mathbb{Z}} \operatorname{Spec}\mathbb{Z}[1/N'N''']$.

Appliquer la Proposition 4.8 à $U \times_{\operatorname{Spec}\mathbb{Z}} \operatorname{Spec}\mathbb{Z}[1/N'N''']$ et $n = N'N'''$ conclut la preuve.

□

Références

[1] S. Bloch, *Torsion algebraic cycles and a theorem of Roitman*, Math. Comp. **39** (1979), pp. 107–127.

[2] A. Cadoret, A. Tamagawa *Uniform boundedness of p-primary torsion of abelian schemes*, Invent. Math. **188** (2012), no. 1, 83–125.

[3] A. Cadoret, A. Tamagawa, *A uniform open image theorem for ℓ-adic representations, II*, Duke Math. J. **162** (2013), no. 12, 2301–2344.

[4] J.-L. Colliot-Thélène, J.-J. Sansuc, *La descente sur les variétés rationnelles,* dans Journées de Géométrie algébrique d'Anger, Alpen aan den Rijn : Sijthoff & Noordhoff, 1980.

[5] J.-L. Colliot-Thélène, J.-J. Sansuc, *On the Chow groups of certain rational surfaces : a sequel to a paper of S. Bloch*, Duke Math. J., **48** (2), 1981, 421–447.

[6] J.-L. Colliot-Thélène, J.-J. Sansuc, C. Soulé, *Torsion dans le groupe de Chow de codimension deux*, Duke Math. J. **50**, 1983, 763–801.

[7] J.-L. Colliot-Thélène, J.-J. Sansuc, Sir P. Swinnerton-Dyer, *Intersections of two quadrics and Châtelet surfaces. I, II.* J. Reine Angew. Math. **373** (1987), 37–107 ; ibid. **374** (1987), 72–168.

[8] J.-L. Colliot-Thélène, W. Raskind, *K_2-cohomology and the second Chow group*, Math. Ann. **270** (1985), no. 2, 165–199.

[9] J.-L. Colliot-Thélène, W. Raskind, *Groupe de Chow de codimension deux des variétés définies sur un corps de nombres : un théorème de finitude pour la torsion,* Invent. Math. **105** (1991), no. 2, 221–245.

[10] J.-L. Colliot-Thélène, *Cycles algébriques de torsion et K-théorie algébrique,* Arithmetic algebraic geometry (Trento, 1991), Lecture Notes in Math **1553**, 1–49, Springer, Berlin, 1993.

[11] C. S. Dalawat, *Le groupe de Chow d'une surface de Châtelet sur un corps local*, Indagationes math., **11** (2), 2000, 171–185.

[12] C. S. Dalawat, *The Chow group of a Châtelet surface over a number field*, arXiv :math/0604339.

[13] V. Dimitrov, Z. Gao, Ph. Habegger, *Uniformity in Mordell-Lang for curves,* Ann. of Math. (2) **194** (2021).

[14] W. Fulton, *Intersection theory*, Second edition, Springer-Verlag, Berlin, 1998

[15] H. Gillet, *Riemann-Roch theorems for higher algebraic K-theory,* Adv. Math. **40**, 203–289 (1981).

[16] A. Grothendieck, *Géométrie algébrique et géométrie formelle*, Séminaire Bourbaki, Vol. 5, Exp. n. 182, 193-–220, errata p. 390, Soc. Math. France, Paris, 1995.

[17] Y. Harpaz, O. Wittenberg, *On the fibration method for zero-cycles and rational points,* Ann. of Math. (2) **183** (2016), no. 1, 229–295.

[18] B. Kahn, *Torsion order of smooth projective surfaces*, With an appendix by J.-L. Colliot-Thélène. Comment. Math. Helv. **92** (2017), no. 4, 839–857.

[19] S. Kamienny, *Torsion points on elliptic curves and q-coefficients of modular forms*, Invent. Math. **109** (1992), no. 2, 221–229.

[20] N. Katz, S. Lang, *Finiteness theorems in geometric classfield theory*, With an appendix by Kenneth A. Ribet. Enseign. Math. (2) **27** (1981), no. 3–4, 285–319 (1982).

[21] M.A. Kenku, F. Momose, *Torsion points on elliptic curves defined over quadratic fields*, Nagoya Math. J. **109** (1988), 125–149.

Math. Surveys Monogr., **123**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2005.

[22] A. Langer, 0*-cycles on the elliptic modular surface of level* 4, Tohoku Math. J., (2) **50** (1998), no. 2, 291–302.

[23] A. Langer, W. Raskind, *Torsion* 0*-cycles on the self-product of a CM elliptic curve*, J. Reine. Angew. Math., **516** (1999), 1–26.

[24] A. Langer and S. Saito, *Torsion zero-cycles on the self-product of a modular elliptic curve*, Duke Math. J., **85** (1996), 315–357.

[25] N. Otsubo, *Selmer groups and zero-cycles on the Fermat quartic surface*, J. Reine Angew. Math., **525** (2000), 113–146.

[26] B. Mazur, *Modular curves and the Eisenstein ideal*, With an appendix by Mazur and M. Rapoport. Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. No. **47** (1977), 33–186 (1978)

[27] L. Merel, *Bornes pour la torsion des courbes elliptiques sur les corps de nombres,* Invent. Math. **124** (1996), no. 1–3, 437–449.

[28] D. Mumford, *Abelian Varieties*, Tata Institute of Fundamental Research Studies in Mathematics. Oxford : Oxford University Press, 1970.

[29] W. Raskind, *Torsion algebraic cycles on varieties over local fields*, in : Algebraic K-theory : Connections with Geometry and Topology, Lake Louise 1987, (J.F. Jardine and V.P. Snaith, ed.) Kluwer Academic Publishers 1989.

[30] W. Raskind, *On K_1 of curves over global fields,* Math. Ann. **288** (1990), 179–193.

[31] J-P. Serre, *Cohomologie galoisienne*, Lecture Notes in Mathematics, **5**. Springer-Verlag, Berlin, 1994

[32] M. Somekawa, *On Milnor K-groups attached to semi-abelian varieties.* K-Theory **4** (1990), no. 2, 105–119.

[33] A. A. Suslin, *Torsion in K_2 of fields*, K-theory 1 (1987), 5–29.

François Charles, DMA,
École Normale Supérieure de Paris,
Paris, France
Laboratoire de Mathématiques d'Orsay,
Université Paris-Saclay, Orsay, France
francois.charles@ens.fr

Alena Pirutka, Courant Institute of Mathematical Sciences,
New York University, New York, U.S.A.
pirutka@cims.nyu.edu