**Corollaire 35** Soit $S \subseteq R^{m+n}$ définissable. Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall a \in R^m$, $S_a \subseteq R^n$ est partitionné par une décomposition de $R^m$ ayant $\leq N$ cellules.
En particulier, chaque $S_a$ a au plus $\leq N$ composantes définissablement connexes.

Dém On prend une décomposition $\mathcal{D}$ de $R^{m+n}$ qui partitionne $S$. Alors $\mathcal{D}_a$ est une décomposition de $R^n$ qui partitionne $S_a$ et $|\mathcal{D}_a| \leq |\mathcal{D}|$.

Cor $S \subset R^{m+n}$ déf. Il existe $M \in \mathbb{N}$ tq $\forall a \in R^m$, $S_a$ a au plus $M$ points isolés

**Cor 36** Si $R$ est O-minimale et $R' \equiv R$ alors $R'$ est O-minimale

satisfont les mêmes énoncés

En effet tout sous-ensemble définissable de $R'$ est de la forme $\{b \in R' \mid \varphi(\bar{a}, b)$ est vraie$\}$ avec $\varphi$ une formule sans paramètres, et $\bar{a}$ dans $R'^m$
Grâce au corollaire on peut dire ; pour un entier $N$ :
$\forall \bar{x}$ l'ensemble des $y$ satisfaisant $\varphi(\bar{x}, y)$ est une union d'au plus $N$ (intervalles ouverts ou points)
Cet enoncé est vrai dans $R$ pour un certain $N$, donc aussi dans $R'$

Proposition 37 Soit $S \subseteq R^{m+n}$ définissable. Pour $d \in \{-\infty, 0, 1, \dots, n\}$ l'ensemble $S(d) = \{a \in R^m \mid \dim S_a = d\}$ est définissable. De plus
$$\dim((S(d) \times R^n) \cap S) = \dim S(d) + d.$$

<u>Dém</u> Soit $\mathcal{D}$ une décomposition de $R^{m+n}$ qui partitionne $S$. $\pi : R^{m+n} \to R^m$ la projection, $C \in \mathcal{D}$, $\pi(C)$.
Si $C$ est une $(i_1, \dots, i_{m+n})$-cellule, alors $\pi(C)$ est une $(i_1, \dots, i_m)$-cellule, et pour $a \in \pi(C)$, $C_a$ est une $(i_{m+1}, \dots, i_{m+n})$-cellule.
Donc $\dim C = \dim \pi C + \dim C_a \quad \forall a \in \pi C$.

Soit $A$ une cellule de $\pi\mathcal{D}$, et $C_1, \dots, C_k$ les cellules de $\mathcal{D}$ telles que $\pi(C_i) = A$, et $C_i \subseteq S$, alors $\forall a \in A$,
$S_a = (C_1)_a \cup \dots \cup (C_k)_a$, $\dim S_a = \sup \dim (C_i)_a$
$= \sup \dim(C_i) - \dim(A)$.
Donc si $\dim S_a = d$, alors $A \subseteq S(d)$.
Cela montre que chaque $S(d)$ est une union de cellules.
On a aussi, $d = \sup\limits_{i=1,\dots,k} (\dim C_i) - \dim A$

$$= \dim\Big(\bigcup_{i=1}^{k} C_i\Big) - \dim(A)$$
$$= \dim(\pi^{-1}(A) \cap S) - \dim(A)$$
$$= \dim((A \times R^n) \cap S) - \dim(A).$$

D'où $\dim\big((S(d) \times R^n) \cap S\big) = \dim S(d) + d$.

<u>Cor</u> 38 (1) $\dim S = \max\limits_{0 \le d \le n} \dim S(d) + d \qquad S \subseteq R^{m+n}$ def
(2) Si $X \subseteq R^n$, et $f : X \to R^m$ sont definissables.
Alors $\forall d \in \{0, \dots, n\}$ l'ensemble $S_f(d) = \{a \in R^m \mid \dim f^{-1}(a) = d\}$ est définissable, et $\dim f^{-1}(S_f(d)) = d + \dim S_f(d)$
(3) $A, B$ déf alors $\dim(A \times B) = \dim(A) + \dim(B)$.

En fait je crois que ce n'est pas si dur que ça.

On va montrer

$$\dim(cl(A) \setminus A) < \dim(A)$$

Le résultat est vrai dans toute structure O-minimale. Mais la preuve est longue (*). Nous allons faire une hypothèse supplémentaire : qu'il y a une structure de groupe ordonné sur $R$. Alors $R$ O-minimale implique que $R$ est commutatif divisible.

Hypothèses $(R, +, -, 0, 1, <, \ldots)$ structure O-minimale dans laquelle $+$ definit une loi de groupe, avec inverse $-$, et zéro $0$. On fixe $1 > 0$.

Pour $x \in R$ on définit $|x| = \sup\{x, -x\}$

Soit $X \subseteq R$ définissable. Nous allons montrer comment choisir dans $X$ un élément qui ne dépend pas de la définition de $X$, mais uniquement de l'ensemble $X$.

Si $X$ a un plus petit élément on prend ce plus petit élément. Sinon cela veut dire que $X$ contient un intervalle ouvert $I$ tel que $\forall x \in X$, ou bien $x \in I$, ou bien $x > I$. On prend un tel $I$ qui est maximal, et on l'écrit $I = (a,b)$, $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.

Il y a 4 cas à considérer. Les él$^{ts}$ $a, b$ sont uniquement définis à partir de $X$

Cas 1 $a, b \in \mathbb{R}$.

$$c = \frac{a+b}{2} \in I$$

Cas 2 $a = -\infty$, $b \in \mathbb{R}$ $\qquad c = b-1$

Cas 3 $a \in \mathbb{R}$, $b = +\infty$ $\qquad c = a+1$

Cas 4 $a = -\infty$, $b = +\infty$ $\qquad c = 0$.

## Choix définissable[39] $(\mathbb{R}, +, -, 0, 1, <, \dots)$

(1) Si $S \subseteq \mathbb{R}^{m+n}$ est définissable non vide, $\pi : \mathbb{R}^{m+n} \to \mathbb{R}^m$.
Alors il existe une application définissable $f : \pi(S) \to \mathbb{R}^n$ telle que $\underbrace{\Gamma(f)}_{\text{graphe de } f} \subseteq S$.

(2) Si $X \subset \mathbb{R}^n$ est définissable et $E \subseteq X^2$ est une relation d'équivalence définissable, alors il existe un ensemble $Y$ définissable qui représente les classes d'équivalence de $E$.

Dém (1) Quand $n=1$, nous avons vu comment définir $f$ : soit le plus petit élément de la fibre, soit un point dans l'intervalle "le plus à gauche". On suppose le résultat vrai pour $n$, soit $S \subseteq \mathbb{R}^{m+n+1}$ définissable

On considère les deux projections :

$\pi_1 : R^{m+n+1} \longrightarrow R^{m+n}$ sur les $m+n$ premières coordonnées

$\pi_2 : R^{m+n} \longrightarrow R^{m}$ sur les $m$ premières coordonnées.

Par le cas $n=1$, nous avons une fonction définissable $f_1 : \pi_1(S) \longrightarrow R$ telle que $\Gamma(f_1) \subseteq S$.

Par HI, nous avons une fonction définissable $f_2 : \pi_2\pi_1(S) \longrightarrow R^n$ telle que $\Gamma(f_2) \subseteq \pi_1(S)$. On définit alors

$$f : \pi(S) \longrightarrow R^{n+1} \quad \text{par} \quad f(x) = (f_2(x), f_1(x, f_2(x)))$$

(2) On regarde $E \subseteq X^2$, $\pi : X^2 \longrightarrow X$.

Dans (1), on montre, par induction sur $n$, que la fonction $f$ dépend seulement de la fibre, et pas de sa définition. Donc, si $e : X \longrightarrow X$ est une fonction de choix, et si $E(a,b)$, alors $e(a) = e(b)$, puisque $E_a$ = la classe d'équivalence de $a$.

Application le (2) s'appelle aussi "elimination des imaginaires". Parmi les relations d'équivalence auxquelles elle s'applique on a bien sur la relation $S_a = S_b$ pour $a, b \in \pi(S)$.

Thm 40 (Selection de courbe) Soit $S \subseteq R^n$ définissable, soit $b \in cl(S)$. Il existe une application continue définissable $\gamma : [0, r) \longrightarrow S$ (pour un $r > 0$) telle que $\gamma(0,r) \subseteq S$, et $\gamma(0) = b$.

Dém Si $b \in S$, on prend $\gamma$ constante égale à $b$. Supposons $b \notin S$. On regarde

$$X = \{(t,x) \in R \times R^n \mid x \in S, \ \sup\{|x_i - b_i|\} \leq t\}$$

où $b = (b_1, \dots, b_n)$, $x = (x_1 \dots x_n)$

Soit $p : R^{1+n} \longrightarrow R$ la projection sur la 1ère coordonnée. Comme $b \in cl(S)$, $b \notin S$ on a $p(X) = R^{>0}$. Par choix définissable, il existe une application définissable $\gamma : R \to R^n$ telle que $\Gamma(\gamma) \subseteq X$.

Par le thm de continuité, il existe $r>0$ tel que $\gamma|_{(0,r)}$ est continue. On étend $\gamma$ à $[0,r)$ en posant $\gamma(0)=b$.

Rappel : on veut $\dim(cl(S)\setminus S) < \dim(S)$.

Lemme 41 Soit $A \subseteq R^m \times R^p$ definissable. On pose
$$M = \{x \in R^m \mid cl(A_x) \neq (cl(A))_x\}.$$
Alors $M$ est définissable de dimension $< m$. Donc si $m=1$ alors $M$ est fini.

Dém On a toujours $cl(A_x) \subseteq (cl(A))_x$ puisque $(cl(A))_x$ est fermé et contient $A_x$. Il est clair que $M$ est définissable. Supposons $\dim(M)=m$. Alors $M$ contient une cellule ouverte $C$, et pour chaque $x \in C$ on peut trouver une boîte ouverte $B_x = \prod_{i=1}^{p}(a_i,b_i)$ telle que $B \cap (cl(A))_x \neq \emptyset$, $B \cap A_x = \emptyset$. (en fait $B \cap cl(A_x) = \emptyset$)

En utilisant le choix définissable ainsi que le théorème de continuité, et éventuellement réduisant $C$, on peut supposer qu'on a des fonctions continues $a_i, b_i$ : $C' \to R$, $C'$ cellule ouverte $\subset C$, $i=1,\dots,p$ telles que $\forall x \in C'$, $\prod_{i=1}^{p}(a_i(x), b_i(x)) \cap cl(A)_x \neq \emptyset$
$\cap A_x = \emptyset$.

Alors $U = \{(x,y) \in C' \times R^p \mid a_i(x) < y < b_i(x), i=1,\dots,p\}$ est ouvert dans $R^m \times R^p$, disjoint de $A$, mais $U \cap cl(A) \neq \emptyset$ : c'est impossible

Donc $\dim(M) < M$.

Remarque 42 Le résultat pour $m=1$ est vrai pour une structure o-minimale arbitraire.