Examen du cours spécialisé *Corps réels clos et structures o-minimales* - Partie 2
(M2 MathFonda, printemps 2022).

La deuxième partie du devoir est à faire à la maison, et à rendre le **6 mai**. *Vous pouvez consulter vos notes de cours, ainsi que les miennes, mais c'est tout. N'hésitez pas à me poser des questions si vous en avez. Dans tous les problèmes on peut admettre les résultats des questions précédentes.*
Tous les anneaux et tous les corps sont commutatifs.

Problème 8. Soient $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fonctions. On dit qu'elles ont le même germe à l'infini s'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in (a, +\infty)$, $f(a) = g(a)$. C'est noté $f \sim g$.

(a) Montrez que $\sim$ est une relation d'équivalence.

(b) Soit S un anneau de fonctions $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Montrez que $S/\sim$ est un anneau. Donnez un exemple pour montrer que ce n'est pas nécéssairement un anneau intègre.

Soit $\mathcal{R} = (\mathbb{R}, +, -, \cdot, 0, 1, <, \dots)$ une structure o-minimale sur le corps des réels (i.e., $+, -, \cdot$ sont les opérations habituelles, mais il peut y avoir d'autre structure).

(c) Soit $\mathrm{Def}(\mathcal{R})$ l'ensemble des fonctions $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui sont définissables dans la structure o-minimale $\mathcal{R}$. Montrez que $\mathrm{Def}(\mathcal{R})/\sim$ est un corps ordonné, clos par différentiation.

Problème 9. Soit $\mathcal{R} = (\mathbb{R}, +, -, \cdot, 0, 1, <, \dots)$ une structure o-minimale sur le corps des réels. On suppose que si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction définissable (noté: $f \in \mathrm{Def}(\mathcal{R})$), alors il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que pour $x \gg 0$, on a $|f(x)| \leq x^n$.

(a) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction définissable dans $\mathcal{R}$, qui est non nulle pour $x \gg 0$. On peut montrer qu'il existe $r \in \mathbb{R}$ tel que $\lim_{x \to +\infty} f(x)/x^r \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ (C'est ici que l'hypothèse sur la croissance des fonctions définissables intervient). Montrez que cet élément r est unique.

(b) Montrez que l'ensemble Λ des réels r tels qu'il existe $f \in \mathrm{Def}(\mathcal{R})$ avec $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x^r} \in \mathbb{R}^\times$, est un corps.

(c) Montrez que si $r \in \Lambda$, alors la fonction $(0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^r$, est définissable dans $\mathcal{R}$. (Astuce: $y^r = (xy)^r / x^r$).