18 bis

Réponses aux questions posées en cours le 29 mars.
(Nous travaillons dans une structure O-minimale $(R, <, \dots)$)

1) Définissablement connexe n'implique pas connexe.

Exemple : $(\mathbb{Q}, <)$ est définissablement connexe, pas connexe : $(-\infty, \sqrt{2}) \cap \mathbb{Q}$ est une union d'ouverts de la forme $(-\infty, a_n)$, avec (a_n) une suite croissante de rationnels qui converge vers $\sqrt{2}$. De même, $(\sqrt{2}, +\infty) \cap \mathbb{Q}$ est ouvert. Donc $\mathbb{Q}$ est l'union de deux ouverts disjoints et non vides.

Par contre dans $(\mathbb{R}, <)$, définissablement connexe implique connexe, car $\mathbb{R}$ est séparable, complet.

On peut fabriquer d'autres contre exemples plus compliqués, avec des ordres ayant beaucoup de trous, mais dont la topologie n'est pas métrisable.

2) Dans la preuve du Corollaire 25, je dis : "On peut supposer $\pi_1(A_1)$ fini". C'est à cause du lemme 22 : Si A_1 est clairsemé, alors aussi $A_1^* = \{(y, x) \mid (x, y) \in A_1\}$, et on a $\pi_2(A_1) = \pi_1(A_1^*)$

3) Corollaire 36. Un sous ensemble définissable de R' est défini par une formule $\varphi(\bar{a}, y)$, où $\bar{a}$ est un m-uplet de R', et $\varphi(\bar{x}, y)$ n'a pas de paramètres.
Soit $S \subset R^{m+1}$ l'ensemble défini par $\varphi(\bar{x}, y)$, et soit N le nombre donné par Cor 35. Alors R satisfait, pour $\ell = \lfloor N/2 \rfloor$

$$\forall \bar{x}\ \exists y_1, \dots, y_\ell \ \bigwedge_{i=1}^{\ell-1} y_i < y_{i+1} \ \wedge \ \bigwedge_{i=0}^{\ell} \Big[(\forall z \ \ y_i < z < y_{i+1} \rightarrow \varphi(\bar{x}, z)) \vee (\forall z \ \ y_i < z < y_{i+1} \rightarrow \neg\varphi(\bar{x}, z)) \Big]$$

Donc R' satisfait la même chose.