VARIÉTÉS COMPLEXES

Olivier Debarre

5 décembre 2000

Table des matières

Chapitre 1

Variétés différentiables

1.1 Sous-variétés

Une *hypersurface* de $\mathbf{R}^N$ est un sous-ensemble X de $\mathbf{R}^N$ qui est défini localement par une équation. Cela signifie que pour tout x dans X, il existe un voisinage U de x dans $\mathbf{R}^N$ et une fonction $f : U \to \mathbf{R}$ tels que

$$X \cap U = f^{-1}(0)$$

On supposera toujours que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^\infty$. On veut obtenir des sous-ensembles *lisses*, et il faut imposer en sus que la différentielle de f n'est nulle en aucun point. Cela signifie que les dérivées partielles

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_N}$$

ne s'annulent simultanément en aucun point de $X \cap U$.

Par exemple, si q est une quadrique non-dégénérée, elle s'écrit dans une base

$$q(x) = x_1^2 + \cdots + x_r^2 - x_{r+1}^2 - \cdots - x_N^2$$

et l'équation $q(x) = 1$ définit une hypersurface lisse de $\mathbf{R}^n$ (on obtient ainsi en particulier la sphère unité $\mathbf{S}^{n-1}$). En revanche, l'équation $q(x) = 0$ est de différentielle nulle en 0. Cela ne signifie cependant pas que le sous-ensemble de $\mathbf{R}^N$ ainsi défini (c'est un cône) n'est pas une sous-variété : il faudrait montrer qu'il n'existe aucune équation à différentielle non nulle qui le définisse au voisinage de 0.

On peut maintenant définir une sous-variété quelconque de $\mathbf{R}^N$ de codimension n : on demande que ce soit un sous-ensemble localement défini par l'annulation de $N - n$ fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ *à différentielles indépendantes.* On obtient ainsi la définition suivante.

Définition 1.1 *Une sous-variété de dimension n de $\mathbf{R}^N$ est un sous-ensemble X de $\mathbf{R}^N$ tel que, pour tout point x de X, il existe un voisinage ouvert U de x dans $\mathbf{R}^n$ et une fonction*

$$f : U \to \mathbf{R}^{N-n}$$

de classe $\mathcal{C}^\infty$ dont la différentielle

$$df(x) : \mathbf{R}^N \to \mathbf{R}^{N-n}$$

est surjective pour tout x dans $X \cap U$, tels que

$$X \cap U = f^{-1}(0)$$

Nous allons maintenant décrire les sous-variétés de $\mathbf{R}^N$ d'un autre point de vue, celui des paramétrisations, c'est-à-dire d'applications

$$U \to \mathbf{R}^N$$

dont les images recouvrent X. Dans le cas de la sphère unité $\mathbf{S}^{n-1}$, on sait par exemple que la projection stéréographique depuis le pôle nord permet d'obtenir une paramétrisation

$$\mathbf{R}^{n-1} \to \mathbf{S}^{n-1}$$

dont l'image est exactement toute la sphère privée du pôle nord. Une projection depuis le pôle sud nous donne une autre paramétrisation et leur réunion recouvre la sphère.

C'est le théorème des fonctions implicites qui nous permet de passer d'un point de vue à l'autre.

Proposition 1.2 *Soit X une sous-variété de dimension n dans $\mathbf{R}^N$. Pour tout point x de X, il existe une application de classe $\mathcal{C}^\infty$*

$$\varphi : U \to \mathbf{R}^N$$

où U est un ouvert de $\mathbf{R}^n$, dont l'image est un voisinage ouvert V de x dans X, qui induit un homéomoprhisme de U sur V, et dont la différentielle est injective *en tout point.*

Le passage d'un point de vue à l'autre se fait de la façon suivante. Supposons que X soit définie dans un ouvert U de $\mathbf{R}^N$ par une équation régulière $f : U \to \mathbf{R}^{N-n}$. On peut supposer par exemple que la matrice

$$\left(\frac{\partial f_j}{\partial x_k}(x)\right)_{j>n}$$

est inversible. Le théorème des fonctions implicites entraîne qu'il existe un voisinage U' de $(x_1, \ldots, x_n)$, un voisinage U'' de $(x_{n+1}, \ldots, x_N)$ et une fonction $h : U' \to \mathbf{R}^{N-n}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ tels que

$$f(x_1, \ldots, x_N) = 0 \iff (x_{n+1}, \ldots, x_N) = h(x_1, \ldots, x_n)$$

pour tout x dans $U' \times U''$. La fonction

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & U'' & \longrightarrow & \mathbf{R}^N \\ & (x_1, \ldots, x_n) & \longmapsto & (x_1, \ldots, x_n, h(x_1, \ldots, x_n)) \end{array}$$

est la paramétrisation cherchée.

On remarque que si l'on a des paramétrisations

$$\varphi_1 : U_1 \to \mathbf{R}^N \qquad \text{et} \qquad \varphi_2 : U_2 \to \mathbf{R}^N$$

de X dont les images se rencontrent, c'est-à-dire que l'ouvert $V = \varphi_1(U_1) \cap \varphi_2(U_2)$ de X n'est pas vide, le changement de paramétrisations

$$\varphi_1^{-1} \circ \varphi_2 : \varphi_2^{-1}(V) \to \varphi_1^{-1}(V)$$

est une application de classe $\mathcal{C}^\infty$, et même un difféomorphisme (c'est-à-dire que c'est une bijection et que son inverse est aussi de classe $\mathcal{C}^\infty$). Cela permet de définir sans ambiguïté le concept d'application de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur une sous-variété X. C'est une application $f : X \to \mathbf{R}^M$ dont la composée avec n'importe quelle carte est de classe $\mathcal{C}^\infty$. Par exemple, la restriction à une sous-variété X d'une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur un ouvert de $\mathbf{R}^N$ contenant X est bien une fonction $\mathcal{C}^\infty$ sur X.

Le dernier concept important attaché à une sous-variété est celui d'*espace tangent*. En gros, on veut généraliser l'idée de la droite tangente à une courbe lisse, qui est la droite dirigée par la dérivée (ou vecteur vitesse) d'une paramétrisation locale. Il suffit en fait de copier cette définition.

Définition 1.3 *Soit X une sous-variété de dimension n dans $\mathbf{R}^N$, soit x un point de X et soit $\varphi : U \to X$ une paramétrisation au voisinage de x. L'espace tangent à X en x est l'image de la différentielle*

$$d\varphi(\varphi^{-1}(x)) : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^N$$

C'est donc un sous-espace vectoriel de dimension n de $\mathbf{R}^N$ que l'on note $T_{X,x}$.

De nouveau, il faut vérifier que cette définition ne dépend pas du choix de la paramétrisation. Il est aussi souvent pratique d'avoir une description de l'espace tangent lorsqu'on dispose d'une équation locale $f : U \to \mathbf{R}^{N-n}$ de X au voisinage de x. On vérifie alors

$$T_{X,x} = \operatorname{Ker}(df(x) : \mathbf{R}^N \to \mathbf{R}^{N-n})$$

Par exemple, l'espace tangent à l'hypersurface d'équation $q(x) = 1$ en le point x est l'orthogonal $x^\perp$ de x pour la forme quadratique q.

Lorsqu'on a une application $u : X \to Y$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ entre sous-variétés, on vérifie que sa différentielle induit une application linéaire

$$T_{X,x} \to T_{Y,u(x)}$$

que l'on note $T_x u$ et que l'on appelle *application tangente à u en x.*

1.2 Variétés

Étant donnée une sous-variété X, on aimerait bien s'affranchir de la présence de l'espace ambiant $\mathbf{R}^N$ dont on sent bien qu'il ne joue qu'un rôle accessoire dans les constructions ci-dessus. C'est tout-à-fait possible : il suffit pour cela d'abandonner le point de vue équation locale pour ne garder que celui des paramétrisations. On obtient alors la définition suivante.

Définition 1.4 *Une* variété *X de dimension n est un espace topologique séparé muni d'une collection d'homéomorphismes*

$$g_\alpha : V_\alpha \to U_\alpha \subset \mathbf{R}^n$$

appelées cartes, *où les V_α sont des ouverts de X recouvrant X et les U_α des ouverts de $\mathbf{R}^n$, tels que pour chaque α et β, le changement de cartes*

$$h_{\alpha\beta} = g_\alpha \circ g_\beta^{-1}$$

est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur l'ouvert de $\mathbf{R}^n$ où il est défini.

Exemple 1.5 L'espace projectif. L'espace projectif réel $\mathbf{P}^n_{\mathbf{R}}$ est défini comme l'ensemble des droites de $\mathbf{R}^{n+1}$. On peut le voir comme le quotient de $\mathbf{R}^{n+1} - \{0\}$ par l'action de $\mathbf{R}^*$, et le munir de la topologie quotient, c'est-à-dire qu'un sous-ensemble de $\mathbf{P}^n_{\mathbf{R}}$ est ouvert si et seulement si son image inverse par la projection

$$\pi : \mathbf{R}^{n+1} - \{0\} \to \mathbf{P}^n_{\mathbf{R}}$$

l'est. L'espace topologique $\mathbf{P}^n_{\mathbf{R}}$ est recouvert par les ouverts

$$V_\alpha = \pi(\{(x_0, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}^{n+1} \mid x_\alpha \neq 0\}) \tag{1.1}$$

On paramètre ces ouverts par les bijections

$$g_\alpha^{-1} : (x_0, \ldots, x_{\alpha-1}, x_{\alpha+1}, \ldots, x_n) \to \pi(x_0, \ldots, x_{\alpha-1}, 1, x_{\alpha+1}, \ldots, x_n)$$

de $\mathbf{R}^n$ dans V_α. Les changements de cartes sont

$$\begin{aligned} h_{\alpha\beta}(x_0, \ldots, x_{\beta-1}, x_{\beta+1}, \ldots, x_n) &= g_\alpha \circ \pi(x_0, \ldots, x_{\beta-1}, 1, x_{\beta+1}, \ldots, x_n) \\ &= g_\alpha \circ \pi(\frac{x_0}{x_\alpha}, \ldots, \frac{x_{\beta-1}}{x_\alpha}, \frac{1}{x_\alpha}, \frac{x_{\beta+1}}{x_\alpha}, \ldots, \frac{x_n}{x_\alpha}) \\ &= (\frac{x_0}{x_\alpha}, \ldots, \frac{x_{\beta-1}}{x_\alpha}, \frac{1}{x_\alpha}, \frac{x_{\beta+1}}{x_\alpha}, \ldots, \frac{x_{\alpha-1}}{x_\alpha}, \frac{x_{\alpha+1}}{x_\alpha}, \ldots, \frac{x_n}{x_\alpha}) \end{aligned}$$

qui est bien $\mathcal{C}^\infty$ dans l'ouvert de $\mathbf{R}^n$ où il est défini (c'est-à-dire là où $x_\alpha \neq 0$). On a ainsi muni $\mathbf{P}^n_{\mathbf{R}}$ d'une structure de variété différentiable de dimension n.

On peut faire la même construction avec l'espace projectif complexe $\mathbf{P}^n_{\mathbf{C}}$, ensemble des droites complexes de $\mathbf{C}^{n+1}$. On obtient une variété différentiable de dimension (réelle) $2n$.

On représente habituellement un point x de $\mathbf{P}^n_{\mathbf{R}}$ par les coordonnées

$$(x_0, \ldots, x_n)$$

d'un point non nul de la droite de $\mathbf{R}^{n+1}$ qu'il représente, c'est-à-dire d'un point de $\pi^{-1}(x)$. Elles s'appellent les *coordonnées homogènes* du point x ; elle ne sont déterminées qu'à multiplication par une constante non nulle près.

Si P est un polynôme homogène en $n+1$ variables, l'expression $P(x)$ n'est donc pas bien définie. En revanche, le sous-ensemble

$$Z(P) = \{x \in \mathbf{P}^n_{\mathbf{R}} \mid P(x) = 0\}$$

l'est. On vérifie que c'est une variété lorsqu'en chaque point, une au moins des dérivées partielles de P ne s'annule pas. C'est donc équivalent à dire que P définit une sous-variété de $\mathbf{R}^{n+1} - \{0\}$, dont l'image par π est d'ailleurs $Z(P)$.

1.3 Fibrés vectoriels

Construire les espaces tangents semble a priori plus embêtant, puisqu'on les obtenaient comme sous-espace vectoriels de l'espace ambiant $\mathbf{R}^N$, qui n'est maintenant plus là ! La solution à ce problème est un peu détournée. Nous allons en fait définir en même temps la collection de *tous* les espaces tangents $T_{X,x}$ comme une autre variété T_X munie d'une surjection $\pi : T_X \to X$ dont les fibres seront les espaces tangents, c'est-à-dire

$$T_{X,x} = \pi^{-1}(x)$$

Ces *familles* d'espaces vectoriels joueront un rôle si important par la suite qu'on leur donne un nom.

Définition 1.6 *Un* fibré vectoriel *réel de rang r sur une variété X est une variété E munie d'une application $\pi : E \to X$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ telle qu'il existe des ouverts V_α recouvrant X et des difféomorphismes*

$$\tau_\alpha : \pi^{-1}(V_\alpha) \to V_\alpha \times \mathbf{R}^r$$

appelés trivialisations locales, *tels que les fonctions de transition $\tau_\alpha \circ \tau_\beta^{-1}$ s'écrivent*

$$(x, t) \longmapsto (x, h_{\alpha\beta}(x)(t))$$

là où elles sont définies, où les fonctions $h_{\alpha\beta}$ sont des fonctions $\mathcal{C}^\infty$ à valeurs dans $\mathrm{GL}(r, \mathbf{R})$.

En d'autres termes, $h_{\alpha\beta}(x)$ est une matrice $r \times r$ inversible dépendant de façon $\mathcal{C}^\infty$ du point x de X. On l'appelle aussi matrice de transition.

Le principe est donc le même que pour la définition des variétés. On impose que les changements de cartes aient certaines propriétés (pour les variétés, d'être de classe $\mathcal{C}^\infty$, pour les fibrés vectoriels, d'être « linéaires sur les fibres »), ce qui permet ensuite de parler de ces mêmes propriétés pour des applications définies sur l'objet.

Par exemple, on peut définir un *morphisme de fibrés vectoriels* entre $E \to X$ et $F \to X$ au-dessus de la même variété X comme étant une application $\varphi : E \to F$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ qui commute aux projections, c'est-à-dire qui envoie une fibre de E dans une fibre de F, et qui est linéaire sur les fibres.

Exemple 1.7 On sait que chaque point de l'espace projectif réel $\mathbf{P}^n_{\mathbf{R}}$ représente une droite de l'espace vectoriel $\mathbf{R}^{n+1}$. On va construire un fibré vectoriel L de rang 1 (on dit aussi un fibré en droites) sur $\mathbf{P}^n_{\mathbf{R}}$ dont la fibre au-dessus du point x est la droite qu'il représente.

On considère d'abord le fibré vectoriel trivial $E = \mathbf{P}^n_{\mathbf{R}} \times \mathbf{R}^{n+1}$ muni de la première projection π puis le *sous-fibré*

$$L = \{(\ell, y) \in E \mid y \in \ell\}$$

de E. Dans l'ouvert $\pi^{-1}(V_\alpha) = V_\alpha \times \mathbf{R}^{n+1}$ de E, où V_α est l'ouvert de $\mathbf{P}^n_{\mathbf{R}}$ défini dans (1.1), L est défini par les équations

$$y_\gamma = x_\gamma y_\alpha$$

dont on vérifie sans peine qu'elles définissent une sous-variété. Elles définissent aussi la trivialisation cherchée de L par

$$\tau_\alpha(\ell, y) = (\ell, y_\alpha)$$

avec comme « matrice » de transition

$$h_{\alpha\beta}(x) = \frac{x_\alpha}{x_\beta}$$

(puisque $y_\alpha = \frac{x_\alpha}{x_\beta} y_\beta$) qui est bien définie et non nulle dans l'ouvert $V_\alpha \cap V_\beta$ (comme L est de rang 1, la matrice de transition se réduit à la multiplication par un réel non nul, c'est-à-dire à une application $V_\alpha \cap V_\beta \to \mathbf{R}^*$ de classe $\mathcal{C}^\infty$).

1.8. Matrices de transitions. La donnée d'un fibré vectoriel E sur une variété X peut se réduire en fait à celle des matrices de transition $h_{\alpha\beta} : V_\alpha \cap V_\beta \to \mathrm{GL}(r, \mathbf{R})$ vérifiant la « condition de cocyles »

$$h_{\alpha\alpha} = \mathrm{Id} \qquad\qquad h_{\alpha\beta} h_{\beta\gamma} h_{\gamma\alpha} = \mathrm{Id}$$

là où elle a un sens. On reconstruit alors E en « recollant » les $V_\alpha \times \mathbf{R}^r$ au moyen de ces fonctions de transitions.

Une *section* d'un fibré vectoriel $\pi : E \to X$ est une application $\sigma : X \to E$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ telle que $\pi \circ \sigma = \mathrm{Id}$. Dans la nouvelle optique, la donnée de σ revient à celle de ses restrictions aux ouverts V_α, c'est-à-dire à des fonctions

$$\sigma_\alpha : V_\alpha \to \mathbf{R}^r$$

de classe $\mathcal{C}^\infty$ vérifiant la condition de compatibilité

$$h_{\alpha\beta}\sigma_\beta = \sigma_\alpha$$

Si $u : Y \to X$ est une application de classe $\mathcal{C}^\infty$ entre deux variétés et que $\pi : E \to X$ est un fibré vectoriel sur X, on définit son image inverse u^*E par

$$u^*E = \{(y,z) \in Y \times E \mid u(y) = \pi(z)\}$$

C'est un fibré vectoriel de même rang, qui peut être aussi défini par les matrices de transition $h_{ij} \circ u$. De façon informelle, la fibre de u^*E en y est celle de E en $u(y)$.

Ce formalisme est aussi utile pour définir le dual E^* d'un fibré vectoriel E défini par des matrices de transition $h_{\alpha\beta}$: c'est simplement le fibré vectoriel de même rang défini par les matrices

$$h'_{\alpha\beta} = {}^t h_{\beta\alpha}^{-1}$$

De façon analogue, on définit la somme directe $E \oplus E'$ et le produit tensoriel $E \otimes E'$ de deux fibrés vectoriels, ainsi que le fibré $\wedge^k E^*$ des formes k-multilinéaires alternées sur E.

Exemple 1.9 Reprenons l'exemple du fibré en droites L construit sur l'espace projectif $\mathbf{P}^n_{\mathbf{R}}$. On définit son dual et ses puissances tensorielles ; pour des raisons qu'il serait trop long d'expliquer ici, on note pour tout entier a

$$\mathcal{O}(a) = \begin{cases} (L^*)^{\otimes a} & \text{si } \ a \geq 0 \\ L^{\otimes(-a)} & \text{si } \ a < 0 \end{cases}$$

de sorte que $L = \mathcal{O}(-1)$ et $\mathcal{O}(a) \otimes \mathcal{O}(b) = \mathcal{O}(a+b)$ pour tous entiers a et b. Les fonctions de transitions de $\mathcal{O}(a)$ sont

$$h_{\alpha\beta}(x) = \left(\frac{x_\beta}{x_\alpha}\right)^a$$

Tout polynôme homogène P de degré $a \geq 0$ en $n+1$ variables définit une section de $\mathcal{O}(a)$ par la formule

$$\sigma_\alpha(x) = \frac{P(x)}{x_\alpha^a}$$

1.4 Fibré tangent d'une variété

On peut maintenant définir le fibré tangent d'une variété X de dimension n. Si $g_\alpha : V_\alpha \to \mathbf{R}^n$ est une famille de cartes dont les domaines recouvrent X, avec changements de cartes $h_{\alpha\beta} = g_\alpha \circ g_\beta^{-1}$, on considère les fonctions de transition

$dh_{\alpha\beta} \circ g_\beta$, qui sont bien à valeurs dans $GL(n, \mathbf{R})$ puisque $h_{\alpha\beta}$ est un difféomorphisme, et vérifient la condition de cocyle, puisque la règle de différentiation des fonctions composées

$$dh_{\alpha\beta}(h_{\beta\gamma}(z)) \circ dh_{\beta\gamma}(z) = dh_{\alpha\gamma}(z)$$

appliquée à $z = g_\gamma(x)$, donne

$$dh_{\alpha\beta}(g_\beta(x)) \circ dh_{\beta\gamma}(g_\gamma(x)) = dh_{\alpha\gamma}(g_\gamma(x))$$

Il faut avoir vu cette définition un jour, mais on ne l'utilise jamais dans la pratique. Tout ce qu'il faut savoir, c'est qu'une application $u : X \to Y$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ entre variétés a en chaque point x de X une application tangente

$$T_x u : T_{X,x} \longrightarrow T_{Y,u(x)}$$

et que ces applications proviennent d'une application globale

$$Tu : T_X \to u^* T_Y$$

entre fibrés tangents. La règle de différentiation des fonctions composées se traduit pour des applications $u : X \to Y$ et $v : Y \to Z$ par

$$T_x(v \circ u) = T_{u(x)} v \circ T_x u$$

En particulier, une fonction $f : X \to \mathbf{R}$ a aussi une différentielle df que l'on peut voir comme une section du fibré cotangent T_X^*. On dit que c'est une 1-forme sur X.

1.5 Formes différentielles

Soient V un espace vectoriel réel de dimension n et r un entier positif. On note $\bigwedge^r V^*$ l'espace vectoriel des r-formes multilinéaires alternées sur V. Si $\ell_1, \ldots, \ell_r$ sont des formes linéaires sur V, la r-forme multilinéaire

$$(x_1, \ldots, x_r) \longmapsto \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_r} \varepsilon(\sigma)\ \ell_1(x_{\sigma(1)}) \cdots \ell_r(x_{\sigma(r)})$$

est alternée ; on la note $\ell_1 \wedge \cdots \wedge \ell_r$ et on l'appelle le produit extérieur des formes $\ell_1, \ldots, \ell_r$. Il est lui-même alterné en ses facteurs. On a par exemple

$$(\ell_1 \wedge \ell_2)(x, y) = \ell_1(x)\ell_2(y) - \ell_1(y)\ell_2(x)$$

Si $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base de V et $(e_1^*, \ldots, e_n^*)$ la base duale de V^*, les $(e_{j_1}^* \wedge \cdots \wedge e_{j_r}^*)$, pour $1 \leq j_1 < \cdots < j_r \leq n$, forment une base de $\bigwedge^r V^*$, qui est donc de dimension $\binom{n}{r}$. Tout élément ω de $\bigwedge^r V^*$ s'écrit

$$\omega = \sum_{1 \leq j_1 < \cdots < j_r \leq n} \omega(e_{j_1}, \ldots, e_{j_r})\ e_{j_1}^* \wedge \cdots \wedge e_{j_r}^*$$

On peut aussi définir le produit extérieur de formes alternées à l'aide d'une formule compliquée. En coordonnées, c'est plus simple (mais il faut alors vérifier que c'est indépendant du choix de ces coordonnées) : si

$$\omega = \sum_{\mathrm{Card}(I)=r} \omega_I e_I^* \qquad \text{et} \qquad \tau = \sum_{\mathrm{Card}(J)=s} \tau_J e_J^*$$

(avec des notations évidentes), on pose

$$\omega \wedge \tau = \sum_{I,J} f_I g_J e_I^* \wedge e_J^*$$

On a

$$\tau \wedge \omega = (-1)^{rs} \omega \wedge \tau$$

Pour tout entier positif r, on note $\bigwedge^r T_X^*$ le fibré des r-formes multilinéaires alternées réelles sur T_X. Une section de $\bigwedge^r T_X^*$ s'appelle une *r-forme différentielle*, ou une forme différentielle de degré r.

Pour toute application $u : Y \to X$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ entre variétés, et toute r-forme différentielle ω sur X, on peut définir une r-forme différentielle $u^*\omega$ sur Y en posant

$$u^*(\omega)(y)(t_1, \ldots, t_r) = \omega(u(y))(T_y u(t_1), \ldots, T_y u(t_r))$$

On a alors

$$(u \circ v)^* = v^* \circ u^*$$

Plaçons-nous un moment sur un ouvert U de $\mathbf{R}^n$. La différentielle d'une fonction $f : U \to \mathbf{R}$ est la 1-forme donnée par la formule

$$df(x) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j}(x)\ dx_j$$

Une r-forme différentielle sur U s'écrit

$$\omega(x) = \sum_{1 \le j_1 < \cdots < j_r \le n} \omega_{j_1 \cdots j_r}(x)\ dx_{j_1} \wedge \cdots \wedge dx_{j_r}$$

où les $\omega_{j_1 \cdots j_r}$ sont des fonctions de U dans $\mathbf{R}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$. On définit la différentielle de ω en posant

$$d\omega(x) = \sum d\omega_{j_1 \cdots j_r}(x) \wedge dx_{j_1} \wedge \cdots \wedge dx_{j_r} \tag{1.2}$$

C'est une $(r+1)$-forme différentielle sur U dont on vérifie que la définition est indépendante du choix des coordonnées ([BT], p. 20). Dans le cas d'une 1-forme $\omega = \sum_{j=1}^n \omega_j\, dx_j$, cela donne

$$d\omega = \sum_{j,k=1}^n \frac{\partial \omega_j}{\partial x_k}\ dx_k \wedge dx_j = \sum_{1 \le j < k \le n} \left(\frac{\partial \omega_k}{\partial x_j} - \frac{\partial \omega_j}{\partial x_k} \right)\ dx_j \wedge dx_k$$

On vérifie la formule dite de Leibniz

$$d(\omega \wedge \tau) = d\omega \wedge \tau + (-1)^{\deg(\omega)} \omega \wedge d\tau \tag{1.3}$$

qui force en fait la formule (1.2).

Pour toute application $u : Y \to X$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ entre variétés et toute r-forme différentielle ω sur X, on a

$$d(u^*\omega) = u^*(d\omega) \tag{1.4}$$

On dit qu'une forme différentielle ω est *fermée* si $d\omega = 0$; elle est *exacte* s'il existe une forme τ telle que $\omega = d\tau$. La formule (1.2) entraîne $d^2 = 0$, c'est-à-dire que toute forme différentielle exacte est fermée (sur les fonctions, cela traduit simplement la symétrie des différentielles secondes).

Toutes ces notions se transportent au cas des r-formes sur les variétés (c'est essentiellement la même chose que de vérifier qu'elles ne dépendent pas d'un choix de coordonnées dans $\mathbf{R}^n$). Elles permettent de définir des espaces vectoriels très importants, appelés *groupes de cohomologie de de Rham*, qui vont nous occuper pendant une bonne partie du cours, de la façon suivante.

Définition 1.10 *Soit X une variété ; on appelle r-ième groupe de cohomologie de de Rham de X l'espace vectoriel réel*

$$H^r_{\mathrm{DR}}(X, \mathbf{R}) = \{r\text{-formes différentielles fermées sur } X\}/\{r\text{-formes exactes}\}$$

Grâce à la formule (1.4), toute application $u : Y \to X$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ entre variétés induit une application linéaire

$$u^* : H^\bullet_{\mathrm{DR}}(X, \mathbf{R}) \longrightarrow H^\bullet_{\mathrm{DR}}(Y, \mathbf{R})$$

en cohomologie de de Rham.

Il est clair que $H^0_{\mathrm{DR}}(X, \mathbf{R})$ est un espace vectoriel de dimension le nombre de composantes connexes de X. En ce qui concerne $\mathbf{R}^n$ et certains de ses ouverts, on a le résultat suivant.

Proposition 1.11 (Lemme de Poincaré) *Toute forme différentielle fermée sur un ouvert étoilé U de $\mathbf{R}^n$ est exacte. En d'autres termes,*

$$H^r_{\mathrm{DR}}(U, \mathbf{R}) = 0$$

pour tout $r > 0$.

Démonstration. Faisons-le d'abord pour une 1-forme $\omega = \sum_{j=1}^n \omega_j dx_j$ fermée définie sur un ouvert étoilé par rapport à l'origine. On a $\dfrac{\partial \omega_j}{\partial x_k} = \dfrac{\partial \omega_k}{\partial x_j}$ pour tout j et tout k. Posons

$$f(x) = \int_0^1 \omega(tx)(x)\, dt = \int_0^1 \sum_{j=1}^n \omega_j(tx) x_j\, dt$$

(c'est l'intégrale de ω sur le segment joignant l'origine à x ; *cf.* ex. 1.14). On a

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x_k}(x) &= \int_0^1 \Big(\omega_k(tx) + \sum_{j=1}^n \frac{\partial \omega_j}{\partial x_k}(tx)tx_j\Big)dt \\ &= \int_0^1 \Big(\omega_k(tx) + \sum_{j=1}^n \frac{\partial \omega_k}{\partial x_j}(tx)tx_j\Big)dt = \big[t\omega_k(tx)\big]_0^1 = \omega_k(x)\end{aligned}$$

ce qui démontre le lemme pour les 1-formes. Dans le cas général, si ω est une r-forme, on pose

$$\tau(x)(x_1,\dots,x_{r-1}) = \int_0^1 t^{r-1}\omega(tx)(x,x_1,\dots,x_{r-1})dt$$

On vérifie que $\omega = d\tau$ si ω est fermée (*cf.* [C1], pp. 43–45, où l'auteur fait le commentaire révélateur suivant : « la démonstration peut être laissée de côté par un lecteur qui a peur des calculs »). $\square$

Il y a des ouverts de $\mathbf{R}^n$ sur lesquels la conclusion du lemme n'est plus vraie. Par exemple, la forme différentielle $\dfrac{x\,dy - y\,dx}{x^2+y^2}$ est fermée sur $\mathbf{R}^2 - \{0\}$, mais n'est pas exacte (on verra plus bas pourquoi).

Une autre façon de définir la cohomologie de de Rham est de dire que c'est la cohomologie du complexe d'espaces vectoriels réels

$$A^\bullet(X,\mathbf{R}) : 0 \longrightarrow A^0(X,\mathbf{R}) \xrightarrow{d} A^1(X,\mathbf{R}) \xrightarrow{d} \cdots \xrightarrow{d} A^n(X,\mathbf{R}) \longrightarrow 0 \quad (1.5)$$

où $A^r(X,\mathbf{R})$ désigne l'espace vectoriel des r-formes différentielles réelles sur X. Elle est bien sûr nulle en degré strictement négatif ou $> n$.

Lemme 1.12 *Soient U et V des ouverts d'une variété. On a une suite exacte*

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & A^\bullet(U\cup V,\mathbf{R}) & \to & A^\bullet(U,\mathbf{R})\oplus A^\bullet(V,\mathbf{R}) & \to & A^\bullet(U\cap V,\mathbf{R}) & \to & 0 \\ & & & & (\omega,\tau) & \mapsto & \omega-\tau & & \end{array}$$

de complexes.

Démonstration. Seule la surjectivité de l'application de droite présente un problème. Cela se fait avec une partition de l'unité ρ_U et ρ_V : ce sont des fonctions $U\cup V \to \mathbf{R}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ à supports (c'est-à-dire l'adhérence dans $U\cup V$ du lieu où la fonction n'est pas nulle) respectivement dans U et V et de somme 1.

Soit ω une forme différentielle sur $U\cap V$. Comme ρ_V est nulle hors de son support, la forme différentielle $\rho_V\omega$, prolongée par 0 sur $U - V$, est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur U. De même, la forme différentielle $\rho_U\omega$, prolongée par 0 sur $V - U$, est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur V. L'élément ω de $A^r(U\cap V)$ est alors l'image de $(\rho_U\omega, -\rho_V\omega)$. $\square$

Je profite de l'occasion pour expliquer qu'une suite exacte courte (à trois termes) de complexes telle que (1.5) induit une suite exacte longue d'espaces vectoriels réels (où l'on a écrit par simplicité $H^r_{\mathrm{DR}}(X)$ au lieu de $H^r_{\mathrm{DR}}(X, \mathbf{R})$)

$$\begin{aligned} 0 \to H^0_{\mathrm{DR}}(U \cup V) \to H^0_{\mathrm{DR}}(U) \oplus H^0_{\mathrm{DR}}(V) \to H^0_{\mathrm{DR}}(U \cap V) \to \cdots \\ \cdots \to H^r_{\mathrm{DR}}(U \cup V) \to H^r_{\mathrm{DR}}(U) \oplus H^r_{\mathrm{DR}}(V) \to H^r_{\mathrm{DR}}(U \cap V) \to \\ H^{r+1}_{\mathrm{DR}}(U \cup V) \to H^{r+1}_{\mathrm{DR}}(U) \oplus H^{r+1}_{\mathrm{DR}}(V) \to H^{r+1}_{\mathrm{DR}}(U \cap V) \to \cdots \end{aligned}$$

en cohomologie. On l'appelle ici la *suite exacte de Mayer-Vietoris.*

Exemples 1.13) On peut se servir de cette suite pour calculer la cohomologie de de Rham de $\mathbf{R}^2 - \{0\}$, en le recouvrant avec les ouverts étoilés

$$\begin{aligned} U &= \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid y > 0 \text{ si } x = 0\} \\ V &= \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid y < 0 \text{ si } x = 0\} \end{aligned}$$

Comme $U \cap V$ est réunion de deux ouverts étoilés disjoints, on obtient la suite exacte

$$0 \to \mathbf{R} \to \mathbf{R} \oplus \mathbf{R} \to \mathbf{R}^2 \to H^1_{\mathrm{DR}}(\mathbf{R}^2 - \{0\}) \to 0$$

de sorte que $H^0_{\mathrm{DR}}(\mathbf{R}^2 - \{0\})$ et $H^1_{\mathrm{DR}}(\mathbf{R}^2 - \{0\})$ sont de dimension 1, tandis que tous les autres groupes sont nuls.

2) De même, on peut recouvrir $\mathbf{P}^1_{\mathbf{C}}$ avec les ouverts standard

$$\begin{aligned} V_0 &= \{(x_0, x_1) \in \mathbf{P}^1_{\mathbf{C}} \mid x_0 \neq 0\} \\ V_1 &= \{(x_0, x_1) \in \mathbf{P}^1_{\mathbf{C}} \mid x_1 \neq 0\} \end{aligned}$$

Ils sont chacun isomorphes à $\mathbf{C}$, et leur intersection à $\mathbf{C}^*$. La suite de Mayer-Vietoris s'écrit

$$0 \to \mathbf{R} \to \mathbf{R} \oplus \mathbf{R} \to \mathbf{R} \to H^1_{\mathrm{DR}}(\mathbf{P}^1_{\mathbf{C}}) \to 0 \to H^1_{\mathrm{DR}}(\mathbf{C}^*) \to H^2_{\mathrm{DR}}(\mathbf{P}^1_{\mathbf{C}}) \to 0$$

de sorte que, en utilisant l'exemple ci-dessus, $H^0_{\mathrm{DR}}(\mathbf{P}^1_{\mathbf{C}})$ et $H^2_{\mathrm{DR}}(\mathbf{P}^1_{\mathbf{C}})$ sont de dimension 1, tandis que tous les autres groupes sont nuls.

3) On peut montrer avec un raisonnement analogue

$$H^r_{\mathrm{DR}}(\mathbf{P}^n_{\mathbf{C}}) = \begin{cases} \mathbf{C} & \text{si } r \text{ est pair et } 0 \leq r \leq 2n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

La suite exacte de Mayer-Vietoris permet de démontrer beaucoup de résultats. Le premier que nous mentionnerons s'appuie sur le fait que toute variété X peut être recouverte par des cartes dont les domaines sont, ainsi que toutes leurs intersections finies, difféomorphes à $\mathbf{R}^n$. *Si X est compacte,* il suffit de plus d'un nombre fini de cartes. En raisonnant par récurrence sur le nombre de cartes, on obtient

les espaces vectoriels $H^r_{\mathrm{DR}}(X, \mathbf{R})$ sont de dimension finie.

1.6 Intégration des formes différentielles

Pour intégrer une n-forme différentielle sur une variété de dimension n, il faut que cette dernière soit orientée. Cela signifie qu'on peut la recouvrir avec des ouverts de cartes telles que les changements de cartes respectent une orientation de $\mathbf{R}^n$, c'est-à-dire que leur différentielle soit partout à déterminant positif.

Soit ω une n-forme différentielle à support compact dans $\mathbf{R}^n$. Dans un système direct de coordonnées, ω s'écrit

$$\omega(x) = f(x)\ dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$$

On pose

$$\int_{\mathbf{R}^n} \omega = \int_{\mathbf{R}^n} f(x)\ dx_1 \cdots dx_n$$

Soient X une variété orientée de dimension n et ω une n-forme différentielle définie sur X, à support compact. On cherche à définir l'intégrale de ω sur X. En utilisant une partition de l'unité ([BT], pp. 21–22), on se ramène au cas où le support de ω est compact, contenu dans le domaine d'une carte orientée $g : V \xrightarrow{\sim} U \subset \mathbf{R}^n$. On pose alors

$$\int_X \omega = \int_U (g^{-1})^* \omega \tag{1.6}$$

Notons x_j la fonction $j$ième coordonnée de $g_j(x)$, définie sur V. On appelle $x_1, \ldots, x_n$ des *coordonnées locales directes.* La forme ω s'écrit

$$\omega(x) = f(x)\, dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$$

Cela signifie

$$((g^{-1})^* \omega)(y) = f(g^{-1}(y))\, dy_1 \wedge \cdots \wedge dy_n$$

sur U, d'où

$$\int_X \omega = \int_U f(g^{-1}(y))\, dy_1 \cdots dy_n$$

Attention, la notation $dy_1 \cdots dy_n$ représente la mesure de Lebesgue sur $\mathbf{R}^n$, et rappelle que c'est une mesure produit. Elle est donc invariante par permutation des facteurs. Il ne faut pas la confondre avec la forme différentielle $dy_1 \wedge \cdots \wedge dy_n$, qui est antisymétrique en les facteurs.

Montrons que l'expression (1.6) ne dépend pas du choix de la carte orientée. Il suffit pour cela de montrer que pour une forme différentielle ω dont le support est contenu dans les domaines de deux cartes orientées $g : V \to \mathbf{R}^n$ et $g' : V' \to \mathbf{R}^n$, l'expression (1.6) est la même dans les deux cas. Soit

$$h = g' \circ g^{-1} : g(V \cap V') \longrightarrow g'(V \cap V')$$

le changement de carte. On a

$$h(x_1, \ldots, x_n) = (x'_1, \ldots, x'_n)$$

d'où

$$dx'_j(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial h_j}{\partial x_k}(g(x))dx_k(x)$$

et

$$dx'_1 \wedge \cdots \wedge dx'_n = \mathrm{Jac}(h)(g(x))\, dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$$

où $\mathrm{Jac}(h)$ est le déterminant de la matrice jacobienne de h. On en déduit

$$f(x) = f'(x)\,\mathrm{Jac}(h)(g(x))$$

d'où

$$\int_{g(V\cap V')} f(g^{-1}(y))\, dy_1 \cdots dy_n = \int_{g(V\cap V')} f'(g^{-1}(y))\ \ \mathrm{Jac}(h)(y)\ \ dy_1 \cdots dy_n$$

En faisant le changement de variables $y' = h(y)$, on obtient d'autre part

$$\int_{g'(V\cap V')} f'(g'^{-1}(y'))\, dy'_1 \cdots dy'_n = \int_{g(V\cap V')} f'(g^{-1}(y))\ \ |\mathrm{Jac}(h)(y)|\, dy_1 \cdots dy_n$$

On voit bien ici intervenir le fait que h préserve l'orientation de $\mathbf{R}^n$ pour montrer que l'intégrale obtenue ne dépend pas du choix de la carte orientée.

Exemple 1.14 Soit $\omega = \sum \omega_j dx_j$ une 1-forme sur $\mathbf{R}^n$. Pour tout x dans $\mathbf{R}^n$, l'intégrale de ω sur le segment (ouvert) joignant 0 à x est

$$\int_0^1 \sum \omega_j(tx)x_j\, dt$$

Théorème 1.15 (Formule de Stokes) *Soient X une variété orientée de dimension n et ω une $(n-1)$-forme sur X à support compact. On a*

$$\int_X d\omega = 0$$

DÉMONSTRATION. Grâce à la linéarité de l'intégrale et à l'existence de partitions de l'unité, il suffit de traiter le cas $X = \mathbf{R}^n$ et

$$\omega = f(x)\, dx_2 \wedge \cdots \wedge dx_n$$

avec f fonction $\mathcal{C}^\infty$ à support compact. On a alors

$$d\omega = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x)\, dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$$

et, par le théorème de Fubini,

$$\int_{\mathbf{R}^n} d\omega = \int \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, \ldots, x_n)\, dx_1 \right) dx_2 \cdots dx_n$$

qui est nul puisque

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, \dots, x_n)\, dx_1 = \lim_{x_1 \to +\infty} f(x_1, \dots, x_n) - \lim_{x_1 \to -\infty} f(x_1, \dots, x_n)$$

et que f est à support compact. □

On aura besoin en fait d'une version plus précise de la formule de Stokes valable sur les *variétés à bord*. Je n'ai pas envie d'entrer dans les détails ; nous ne l'appliquerons que pour les disques fermés dans le plan, ou encore les couronnes. Elle s'énonce

$$\int_X d\omega = \int_{\partial X} \omega \tag{1.7}$$

(il faut bien sûr expliquer comment on oriente le bord ∂X de X à partir de l'orientation de X.

Démonstration. Nous nous contenterons du cas d'un disque dans le plan (celui d'une couronne s'en déduit par différence). On suppose ω de classe $\mathcal{C}^\infty$ dans un voisinage du disque unité D et il suffit par linéarité de traiter le cas

$$\omega = f(x,y)\, dx \qquad\qquad d\omega = -\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\, dx \wedge dy$$

On obtient

$$\begin{aligned}
\int_D d\omega &= -\int_D \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\, dx \wedge dy \\
&= -\int_{-1}^{1} dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\, dx \wedge dy \\
&= -\int_{-1}^{1} [f(x, \sqrt{1-x^2}) - f(x, -\sqrt{1-x^2})]\, dx \\
&= \int_{\partial D} f(x,y)\, dx
\end{aligned}$$

puisque le demi-cercle supérieur est paramétré (dans le sens trigonométrique), par $x \mapsto (-x, \sqrt{1-x^2})$, avec $x \in [-1, 1]$. □

1.16. Soient X une variété, Z une sous-variété compacte orientée de dimension r et ω une r-forme différentielle à support compact définie sur un ouvert de X contenant Z. On pose

$$\int_Z \omega = \int_Z \iota^* \omega$$

où ι est l'injection de Z dans X.

Si ω est de plus exacte, la formule de Stokes entraîne $\int_Z \omega = 0$. Lorsque X est compacte, cela permet de définir une forme linéaire

$$\eta_Z : [\omega] \longmapsto \int_Z \omega$$

sur $H^r_{\mathrm{DR}}(X, \mathbf{R})$.

Exemple 1.17 On a

$$\int_{S^1} xdy - ydx = \int_0^{2\pi} \cos t \, d(\sin t) - \sin t \, d(\cos t) = 2\pi$$

Cette 1-forme fermée n'est donc pas exacte et $H^1_{\mathrm{DR}}(S^1, \mathbf{R})$ n'est pas nul (il est de dimension 1 ; cela peut se voir à l'aide d'une suite exacte de Mayer-Vietoris). On voit par la même occasion que la forme fermée $\dfrac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}$ sur $\mathbf{R}^2 - \{0\}$ n'est pas exacte. Sa classe dans $H^1_{\mathrm{DR}}(\mathbf{R}^2 - \{0\})$ engendre donc cet espace vectoriel et η_{S^1} engendre son dual.

1.7 Dualité de Poincaré

La formule (1.3) entraîne que le produit extérieur de deux formes fermées est fermé, et que le produit extérieur d'une forme exacte et d'une forme fermée est exact. Il induit donc, pour toute variété X, une application bilinéaire

$$H^r_{\mathrm{DR}}(X, \mathbf{R}) \times H^s_{\mathrm{DR}}(X, \mathbf{R}) \longrightarrow H^{r+s}_{\mathrm{DR}}(X, \mathbf{R})$$

Lorsque X est compacte, on a une forme linéaire canonique sur $H^n_{\mathrm{DR}}(X, \mathbf{R})$ donnée par l'intégration des n-formes sur X. En la composant avec l'application bilinéaire ci-dessus, on obtient une forme bilinéaire

$$\begin{array}{ccc} H^r_{\mathrm{DR}}(X, \mathbf{R}) \times H^{n-r}_{\mathrm{DR}}(X, \mathbf{R}) & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ ([\omega], [\tau]) & \longmapsto & \int_X \omega \wedge \tau \end{array}$$

qui *pour X compacte, est non-dégénérée.* Au vu de 1.16, cela permet d'associer, toujours lorsque X est compacte, à toute sous-variété Z orientée de X de codimension s une classe $[\tau_Z]$ dans $H^s_{\mathrm{DR}}(X, \mathbf{R})$ telle que

$$\int_X \omega \wedge \tau_Z = \int_Z \iota^* \omega$$

pour toute r-forme ω fermée.

Chapitre 2

Variétés complexes

2.1 Fonctions holomorphes à une variable

Soient U un ouvert de $\mathbf{C} = \mathbf{R}^2$ et $f : U \to \mathbf{C}$ une application de classe $\mathcal{C}^1$. Sa différentielle est en chaque point de U est une application linéaire $\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$.

Définition 2.1 *On dit qu'une fonction $f : U \to \mathbf{C}$ est holomorphe si elle est $\mathbf{C}$-dérivable en tout point de U. C'est encore équivalent à dire que sa différentielle est $\mathbf{C}$-linéaire.*

Si f_1 est la partie réelle de f et f_2 sa partie imaginaire, f est holomorphe si elle satisfait aux *conditions de Riemann*

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} = \frac{\partial f_2}{\partial y} \qquad \frac{\partial f_1}{\partial y} = -\frac{\partial f_2}{\partial x}$$

soit encore

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}\right) = 0$$

La différentielle df est alors la multiplication par le nombre complexe

$$2\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial x} - i\frac{\partial f}{\partial y}$$

qui est aussi la dérivée complexe de f au point considéré.

On a simplement fait de l'algèbre linéaire : toute application $\mathbf{R}$-linéaire de $\mathbf{C}$ dans $\mathbf{C}$ (comme par exemple df) se décompose en somme d'une aplication $\mathbf{C}$-linéaire et d'une application $\mathbf{C}$-antilinéaire. Cette décomposition est ici

$$df = \frac{\partial f}{\partial z}dz + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}d\bar{z}$$

avec $dz = dx + idy$ et $d\bar{z} = dx - idy$. On notera

$$\partial f = \frac{\partial f}{\partial z} dz \qquad\qquad \bar{\partial} f = \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} d\bar{z} \tag{2.1}$$

On rappelle le résultat suivant.

Théorème 2.2 (Formule de Cauchy, I) *Soient f une fonction holomorphe sur un ouvert U de $\mathbf{C}$ et D un disque fermé contenu dans U. On a pour tout point z intérieur à D l'égalité*

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial D} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta \tag{2.2}$$

Rappelons que cette formule permet, en développant l'intégrande en série entière, de montrer que les fonctions holomorphes sont analytiques. On aura besoin d'une version plus générale de cette formule, valable pour toutes les fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$.

Théorème 2.3 (Formule de Cauchy, II) *Soient f une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur un ouvert U de $\mathbf{C}$ et D un disque fermé contenu dans U. On a pour tout point z intérieur à D l'égalité*

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial D} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta + \frac{1}{2i\pi} \int_{D} \frac{\partial f}{\partial \bar{\zeta}}(\zeta)\ \frac{d\zeta \wedge d\overline{\zeta}}{\zeta - z} \tag{2.3}$$

2.4. Cette formule entraîne la formule précédente (2.2) puisque si f est holomorphe, on a $\frac{\partial f}{\partial \bar{\zeta}} = 0$. L'intégrale de droite est une intégrale singulière ; elle est par définition égale à la limite lorsque ε tend vers 0 des intégrales

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\varepsilon \leq |\zeta| \leq 1} \frac{\partial f}{\partial \bar{\zeta}}(\zeta)\ \frac{d\zeta \wedge d\overline{\zeta}}{\zeta - z}$$

Cette limite existe par le théorème de convergence dominée puisque la fonction $\zeta \mapsto \frac{1}{\zeta - z}$ est dans L^1.

Démonstration. On considère la 1-forme

$$\tau(\zeta) = \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{\zeta - z}$$

Comme la fonction $\zeta \mapsto \frac{1}{\zeta - z}$ est holomorphe, on a

$$d\tau(\zeta) = -\frac{\partial f}{\partial \bar{\zeta}}(\zeta)\ \frac{d\zeta \wedge d\overline{\zeta}}{\zeta - z}$$

On applique la formule de Stokes (1.7) dans la couronne $\zeta \in D$ et $|\zeta - z| \geq \varepsilon$. Elle donne

$$-\int_{\zeta \in D,\ |\zeta - z| \geq \varepsilon} \frac{\partial f}{\partial \bar{\zeta}}(\zeta)\ \frac{d\zeta \wedge d\overline{\zeta}}{\zeta - z} = \int_{\partial D} \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{\zeta - z} - \int_{|\zeta - z| = \varepsilon} \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{\zeta - z}$$

Il suffit donc de montrer que la dernière intégrale tend vers $2i\pi f(z)$ lorsque ε tend vers 0. On peut passer en polaires, ce qui donne

$$\int_{|\zeta - z| = \varepsilon} \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{\zeta - z} = \int_0^{2\pi} f(z + \varepsilon e^{i\theta})\ \frac{d(\varepsilon e^{i\theta})}{\varepsilon e^{i\theta}} = \int_0^{2\pi} i f(z + \varepsilon e^{i\theta})\, d\theta$$

qui tend bien, par continuité de f, vers $2i\pi f(z)$. □

Le résultat suivant nous sera utile plus tard pour montrer un lemme de Poincaré pour l'opérateur $\bar\partial$.

Théorème 2.5 *Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ à support compact dans $\mathbf{C}$. Il existe une fonction g de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbf{C}$ telle que*

$$f = \frac{\partial g}{\partial \overline{z}} \tag{2.4}$$

Une telle fonction g est unique à l'addition d'une fonction holomorphe près.

Démonstration. Posons

$$g(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathbf{C}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta \wedge d\overline{\zeta}$$

C'est une intégrale singulière, comme en 2.4. Faisant le changement de variables $\zeta' = \zeta - z$, on a $g(z) = \lim_{\varepsilon \to 0} g_\varepsilon(z)$, où

$$g_\varepsilon(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{|\zeta'| \geq \varepsilon} \frac{f(\zeta' + z)}{\zeta'}\, d\zeta' \wedge d\overline{\zeta'}$$

La convergence des g_ε lorsque ε tend vers 0 est uniforme en z. De plus, on peut dériver sous le signe d'intégration l'intégrale (non singulière) définissant g_ε pour obtenir

$$\frac{\partial g_\varepsilon}{\partial \overline{z}}(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{|\zeta'| \geq \varepsilon} \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(\zeta' + z)\ \frac{d\zeta' \wedge d\overline{\zeta'}}{\zeta'}$$

Comme $\frac{\partial f(\zeta' + z)}{\partial \overline{z}}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$, les fonctions $\frac{\partial g_\varepsilon}{\partial \overline{z}}$ convergent uniformément, et l'on conclut que g est au moins de classe $\mathcal{C}^1$ et satisfait

$$\frac{\partial g}{\partial \overline{z}}(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathbf{C}} \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(\zeta' + z)\ \frac{d\zeta' \wedge d\overline{\zeta'}}{\zeta'}$$

Le même argument montre que g est de classe $\mathcal{C}^\infty$.

Nous allons montrer l'égalité $\frac{\partial g}{\partial \overline{z}} = f$. Faisant à nouveau le changement de variables $\zeta = \zeta' + z$, on a

$$\frac{\partial g}{\partial \overline{z}}(z) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{2i\pi} \int_{|\zeta - z| \geq \varepsilon} \frac{\partial f}{\partial \overline{\zeta}}(\zeta) \frac{d\zeta \wedge d\overline{\zeta}}{\zeta - z} = \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathbf{C}} \frac{\partial f}{\partial \overline{\zeta}}(\zeta) \frac{d\zeta \wedge d\overline{\zeta}}{\zeta - z}$$

On applique la formule (2.3) sur un disque si grand que f est nulle sur son bord. Elle prouve que cette dernière quantité est bien $f(z)$. □

2.2 Fonctions holomorphes à plusieurs variables

Soit U un ouvert de $\mathbf{C}^n$ et soit $f : U \to \mathbf{C}$ une application de classe $\mathcal{C}^1$. Sa différentielle se décompose encore en une partie $\mathbf{C}$-linéaire, notée ∂f, et une partie $\mathbf{C}$-antilinéaire, notée $\bar{\partial} f$. On a

$$\partial f = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial z_j} dz_j \qquad\qquad \bar{\partial} f = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial \bar{z}_j} d\bar{z}_j$$

où $dz_j = dx_j + idy_j$ et $d\bar{z}_j = dx_j - idy_j$.

Définition 2.6 *On dit qu'une fonction $f : U \to \mathbf{C}$ de classe $\mathcal{C}^1$ est* holomorphe *si sa différentielle en tout point est $\mathbf{C}$-linéaire.*

On demande donc que chaque fonction partielle de f soit holomorphe (en une variable). On a encore une formule de Cauchy : si

$$D = \{(\zeta_1, \ldots, \zeta_n) \in \mathbf{C}^n \mid \mid \zeta_i - a_i \mid \leq \alpha_i\}$$

est un polydisque contenu dans U, on a pour tout $z = (z_1, \ldots, z_n)$ dans l'intérieur de D l'égalité

$$f(z) = \frac{1}{(2i\pi)^n} \int_{|\zeta_i - a_i| = \alpha_i} f(\zeta) \frac{d\zeta_1}{\zeta_1 - z_1} \wedge \ldots \wedge \frac{d\zeta_n}{\zeta_n - z_n} \tag{2.5}$$

où l'intégrale se fait sur un produit de cercles, muni de l'orientation produit des orientations naturelles. Cette formule se montre par récurrence sur n. Elle entraîne que les fonctions holomorphes sont analytiques : au voisinage de chaque point z de U, une fonction holomorphe f admet un développement en série entière de la forme

$$f(z + h) = \sum_I \alpha_I h^I,$$

où I parcourt l'ensemble des n-uples d'entiers positifs $(i_1, \ldots, i_n)$ et $h^I = h_1^{i_1} \ldots h_n^{i_n}$.

Il est clair à partir de la définition que la somme et le produit de deux fonctions holomorphes est encore holomorphe, et que l'inverse d'une fonction holomorphe qui ne s'annule pas est encore holomorphe. De même, les théorèmes d'inversion locale et de fonctions implicites sont encore valables : il suffit de remarquer que la différentielle de l'application de classe $\mathcal{C}^\infty$ que l'on obtient s'exprime à l'aide des différentielles des fonctions holomorphes en présence, donc est $\mathbf{C}$-linéaire.

Enfin, beaucoup de théorèmes sur les fonctions holomorphes à une variable s'étendent au case de plusieurs variables : une fonction holomorphe dont le module a un maximum local en un point est constante au voisinage de ce point

(« principe du maximum »), deux fonctions holomorphes définies sur un ouvert connexe qui coïncident sur un ouvert non vide sont égales (« principe du prolongement analytique »). Il y a aussi des résultats particuliers au cas de plusieurs variables, comme le « principe de Hartogs » : lorsque $n \geq 2$, pour tous réels positifs $s < r$, toute fonction holomorphe sur la couronne

$$\{(z_1, \ldots, z_n) \in \mathbf{C}^n \mid s < |z_i| < r\}$$

s'étend en une fonction holomorphe sur le polydisque

$$\{(z_1, \ldots, z_n) \in \mathbf{C}^n \mid |z_i| < r\}$$

2.3 Variétés complexes

On peut définir, de façon entièrement analogue, les notions suivantes

- les *variétés complexes* ; on demande que les changements de cartes soient des fonctions *holomorphes* d'un ouvert de $\mathbf{C}^n$ dans un autre ;
- les *fibrés vectoriels holomorphes* ; ils sont localement isomorphes à $U \times \mathbf{C}^r$, et les matrices de transition sont des fonctions holomorphes à valeurs dans $\mathrm{GL}(r, \mathbf{C})$;
- le *fibré tangent holomorphe* d'une variété complexe ; le fait essentiel qui fait marcher la construction comme dans le cas réel est que par définition, la différentielle d'une fonction holomorphe est $\mathbf{C}$-linéaire.
- pour toute application holomorphe $u : X \to Y$ entre variétés complexes, une *application tangente* $Tu : T_X \to u^*T_Y$, qui est $\mathbf{C}$-linéaire, entre fibrés tangents holomorphes.

Exemples 2.7 1) L'espace projectif complexe $\mathbf{P}^n_{\mathbf{C}}$ est une variété complexe de dimension n : les fonctions de transition sont des fonctions rationnelles donc holomorphes. De même, les fibrés en droites complexes $\mathcal{O}(a)$ construits dans l'exemple 1.9 sont des fibrés holomorphes. De façon générale, on peut remarquer que les classes d'isomorphisme de fibrés holomorphes en droites sur une variété complexe forment un groupe appelé *groupe de Picard de* X et noté $\mathrm{Pic}(X)$: la loi de groupe est donnée par le produit tensoriel et l'inverse par le dual. On peut montrer que le groupe $\mathrm{Pic}(\mathbf{P}^n_{\mathbf{C}})$ est infini cyclique engendré par la classe de $\mathcal{O}(1)$ (*cf.* exemple 3.21).

2) Soit Γ un réseau dans $\mathbf{C}^n$, c'est-à-dire un sous-groupe additif libre engendré par une base réelle de $\mathbf{C}^n$. Le groupe Γ opère par translation sur $\mathbf{C}^n$. Le quotient $T = \mathbf{C}^n/\Gamma$ est compact : il existe un automorphisme $\mathbf{R}$-linéaire de $\mathbf{C}^n$ qui envoie Γ sur $\mathbf{Z}^{2n}$ de sorte que T est homéomorphe à $(\mathbf{R}/\mathbf{Z})^{2n} = (S^1)^{2n}$. On prend pour cartes sur T des inverses locaux de l'application quotient. Comme ces inverses locaux sont définis à une translation par un élément de Γ près, les morphismes de changements de cartes sont donnés par de telles translations, qui sont évidemment holomorphes. Donc T est muni d'une structure de variété complexe, pour laquelle la projection $\mathbf{C}^n \to T$ est holomorphe.

2.8. Principe du maximum. De nouveau, une fonction holomorphe dont le module a un maximum local en un point d'une variété complexe est constante au voisinage de ce point. En particulier, *toute fonction holomorphe sur une variété complexe compacte est constante.*

2.9. Principe du prolongement analytique. De même, *une fonction holomorphe définie sur une variété complexe connexe qui est nulle sur un ouvert non vide est nulle partout.*

2.4 Formes différentielles de type (p, q)

Revenons à un peu d'algèbre linéaire. Soit V un espace vectoriel complexe de dimension n. L'espace vectoriel réel $V^*_{\mathbf{C}}$ des formes $\mathbf{R}$-linéaires de V dans $\mathbf{C}$ est muni d'une structure d'espace vectoriel complexe de dimension $2n$; les formes $\mathbf{C}$-antilinéaires sur V forment un sous-espace vectoriel complexe de dimension n noté $\bar{V}^*$. On a $V^*_{\mathbf{C}} \simeq V^* \oplus \bar{V}^*$. Si $(e^*_1, \ldots, e^*_n)$ est une base de V^*, la famille $(\bar{e}^*_1, \ldots, \bar{e}^*_n)$ est une base de $\bar{V}^*$.

Pour tous entiers positifs p et q de somme r, on note $\bigwedge^{p,q} V^*$ le sous-espace vectoriel complexe de $\bigwedge^r V^*_{\mathbf{C}}$ engendré par les $\ell_1 \wedge \cdots \wedge \ell_p \wedge \ell'_1 \wedge \cdots \wedge \ell'_q$, pour $\ell_1, \ldots, \ell_p$ dans V^* et $\ell'_1, \ldots, \ell'_q$ dans $\bar{V}^*$. Les formes dans $\bigwedge^{p,q} V^*$ sont dites de type (p, q). Les formes de type $(r, 0)$ sont les r-formes alternées $\mathbf{C}$-multilinéaires. On a

$$\bigwedge^r V^*_{\mathbf{C}} = \bigoplus_{p+q=r} \bigwedge^{p,q} V^* \tag{2.6}$$

Les formes

$$e^*_{j_1} \wedge \cdots \wedge e^*_{j_p} \wedge \bar{e}^*_{k_1} \wedge \cdots \wedge \bar{e}^*_{k_q}$$

pour $1 \leq j_1 < \cdots < j_p \leq n$ et $1 \leq k_1 < \cdots < k_q \leq n$, forment une base de l'espace vectoriel complexe $\bigwedge^{p,q} V^*$, qui est donc de dimension $\binom{n}{p}\binom{n}{q}$.

2.10. Regardons de plus près ce qui ce passe pour $r = 2$. On peut caractériser les formes de type $(1, 1)$ par la propriété

$$\omega(ix, iy) = \omega(x, y)$$

pour tout x et tout y dans V (les formes ω de type $(2, 0)$ ou $(0, 2)$ satisfont à $\omega(ix, iy) = -\omega(x, y)$). Pour qu'une forme ω de type $(1, 1)$, qui s'écrit en coordonnées

$$\omega = i \sum_{j,k} \omega_{jk}\; e^*_j \wedge \bar{e}^*_k$$

soit *réelle*, c'est-à-dire qu'elle soit à valeurs dans $\mathbf{R}$, il faut et il suffit que $\omega = \bar{\omega}$, c'est-à-dire que la matrice (ω_{jk}) soit hermitienne. De façon plus intrinsèque, on peut associer à toute forme ω réelle de type $(1,1)$ une forme hermitienne H sur V par la formule

$$H(x,y) = \omega(x,iy) + i\omega(x,y)$$

($\mathbf{C}$-linéaire à droite et $\mathbf{C}$-antilinéaire à gauche). Inversement, à toute forme hermitienne H sur V, on associe la forme alternée $\operatorname{Im} H$, réelle de type $(1,1)$.

2.11. On dit que ω est *définie positive* si H l'est, c'est-à-dire si $\omega(x,ix) > 0$ pour tout x non nul ; on dit que ω est *positive* si $\omega(x,ix) \geq 0$ pour tout x.

On dit qu'une forme différentielle définie (de classe $\mathcal{C}^\infty$) sur un ouvert de $\mathbf{C}^n$ est de type (p,q) si elle est de type (p,q) en chaque point. On définit de même les formes réelles de type $(1,1)$ (définies) positives. Si u est une application holomorphe et ω une forme différentielle de type (p,q), la forme $u^*(\omega)$ est encore de type (p,q), essentiellement parce que la différentielle de u est $\mathbf{C}$-linéaire. On peut donc comme d'habitude définir sans ambiguïté la notion de forme différentielle de type (p,q) sur une variété complexe.

Exemple 2.12 Forme de Fubini-Study. La forme différentielle

$$\begin{aligned}\omega_{FS}(z) &= \frac{i}{2\pi}\partial\bar\partial \log ||z||^2 \\ &= \frac{i}{2\pi}\,\frac{||z||^2\Big(\sum_{j=0}^n dz_j \wedge d\bar z_j\Big) - \Big(\sum_{j=0}^n \bar z_j dz_j\Big) \wedge \Big(\sum_{k=0}^n z_k d\bar z_k\Big)}{||z||^4}\end{aligned}$$

où $||z|| = \sqrt{\sum_{j=0}^n z_j \bar z_j}$, définit une 2-forme différentielle ω_{FS} réelle de type $(1,1)$ sur $\mathbf{P}^n_{\mathbf{C}}$, dite forme de Fubini-Study . (voir section 2.6 pour les notations ∂ et $\bar\partial$). Elle est fermée : toute forme qui s'écrit $\partial\bar\partial\tau$ l'est car (*cf.* (2.8))

$$d(\partial\bar\partial\tau) = \partial\partial\bar\partial\tau - \bar\partial\bar\partial\partial\tau = 0$$

La forme ω_{FS} est aussi *définie positive*. Vue son invariance sous l'action du groupe $U(n+1)$, il suffit de le vérifier en un point. Comme

$$\omega_{FS}(1,0,\ldots,0) = \frac{i}{2\pi}\sum_{j=0}^n dz_j \wedge d\bar z_j$$

la propriété est évidente.

2.5 Variétés kählériennes

Ces propriétés de la forme de Fubini-Study sont extrêmement importantes ; ellles portent même un nom. Nous reviendrons ultérieurement sur la définition suivante.

Définition 2.13 *Une variété complexe X est dite* kählérienne *s'il existe sur X une forme différentielle* réelle définie positive fermée de type $(1,1)$.

Une telle forme s'appelle *forme de Kähler*. Nous venons donc juste de montrer que les espaces projectifs complexes sont des variétés kählériennes. La restriction d'une forme de Kähler à une sous-variété étant encore une forme de Kähler, toute sous-variété d'une variété kählérienne est encore kählérienne.

C'est sans doute le moment de remarquer qu'une variété complexe est canoniquement orientée en tant que variété différentiable, car les changements de cartes sont $\mathbf{C}$-linéaires et que le déterminant d'une application $\mathbf{C}$-linéaire $\mathbf{C}^n \to \mathbf{C}^n$, vue comme application $\mathbf{R}$-linéaire $\mathbf{R}^{2n} \to \mathbf{R}^{2n}$, est toujours positif (on convient par exemple d'orienter l'espace $\mathbf{C}^n$ en décrétant que $(e_1, ie_1, \ldots, e_n, ie_n)$ est une base directe, où $(e_1, \ldots, e_n)$ est la base canonique).

Soient X une variété complexe de dimension n et ω une forme différentielle réelle définie positive fermée de type $(1,1)$. Elle s'écrit en coordonnées locales (rappelons que cela signifie simplement que l'on se place dans le domaine de définition d'une carte holomorphe $g : V \xrightarrow{\sim} U \subset \mathbf{C}^n$ et que z_j est la $j$ième coordonnée de $g(x)$)

$$\omega(x) = i \sum_{j,k} \omega_{jk}(x)\ dz_j \wedge d\bar{z}_k$$

où la matrice $(\omega_{jk}(x))$ est hermitienne définie positive pour tout x. On vérifie

$$\omega^{\wedge n}(x) = i^n n! \det(\omega_{jk}(x))\ dz_1 \wedge d\bar{z}_1 \wedge \cdots \wedge dz_n \wedge d\bar{z}_n$$

Comme $dz_j \wedge d\bar{z}_j = -2i\, dx_j \wedge dy_j$, on en déduit

$$\int_V \omega^n = 2^n n! \int_U \det(\omega_{jk}(g^{-1}(z)))dx_1 dy_1 \ldots dx_n dy_n$$

(on a noté, conformément à la tradition, ω^n au lieu de $\omega^{\wedge n}$). La conclusion importante est

$$\int_X \omega^n > 0 \tag{2.7}$$

Corollaire 2.14 *Soient X une variété complexe compacte de dimension n et ω une forme de Kähler sur X. Pour tout entier k compris entre 1 et n, la forme ω^k n'est pas exacte. En particulier, l'espace vectoriel $H^{2k}_{\mathrm{DR}}(X)$ n'est pas nul.*

Démonstration. L'inégalité (2.7) jointe à la formule de Stokes (th. 1.15) entraîne que ω^n n'est pas exacte. Si $\omega^k = d\tau$, on a

$$\omega^n = d\tau \wedge \omega^{n-k} = d(\tau \wedge \omega^{n-k})$$

par la formule de Leibniz (1.3), puisque ω, donc aussi ω^{n-k}, est fermée (de nouveau par la formule de Leibniz). On obtient donc une contradiction, ce qui prouve que ω n'est pas exacte. □

Corollaire 2.15 *Soient X une sous-variété compacte de dimension n de l'espace projectif complexe. Pour tout entier k compris entre 1 et n, l'espace vectoriel $H^{2k}_{\mathrm{DR}}(X)$ n'est pas nul.*

Lorsque $X = \mathbf{P}^n_{\mathbf{C}}$, l'exemple 1.13.3) montre que ces espaces vectoriels sont de dimension 1, donc engendrés par la classe de ω^k_{FS}.

Ce corollaire permet de montrer l'existence de variétés complexes compactes non kälhériennes : il existe en effet de telles variétés dont le second groupe de de Rham est nul.

2.6 Cohomologie de Dolbeault

Soit X une variété complexe. On considère *le fibré vectoriel complexe $A^{p,q}_X$ des formes différentielles de type (p,q)* sur X. Attention : seul le fibré complexe $A^{p,0}_X$ est holomorphe ! Pour les autres, les matrices de transitions ne sont pas des fonctions holomorphes. Une telle forme s'écrit en coordonnées locales holomorphes

$$\omega = \sum_{\substack{1\le j_1<\cdots<j_p\le n\\ 1\le k_1<\cdots<k_q\le n}} \omega_{j_1,\dots,j_p,k_1,\dots,k_q} dz_{j_1}\wedge\cdots\wedge dz_{j_p}\wedge d\bar z_{k_1}\wedge\cdots\wedge d\bar z_{k_q}$$

où les $\omega_{j_1,\dots,j_p,k_1,\dots,k_q}$ sont des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ à valeurs complexes. On écrira de façon plus compacte

$$\omega = \sum_{J,K} \omega_{J,K}\, dz_J \wedge d\bar z_K$$

Par (1.3), sa différentielle est donc, avec les notations de (2.1),

$$d\omega = \sum_{J,K} d\omega_{J,K}\wedge dz_J\wedge d\bar z_K = \sum_{J,K}\partial\omega_{J,K}\wedge dz_J\wedge d\bar z_K + \sum_{J,K}\bar\partial\omega_{J,K}\wedge dz_J\wedge d\bar z_K$$

Comme $\partial\omega_{J,K}$ est de type $(1,0)$ et $\bar\partial\omega_{J,K}$ de type $(0,1)$, le morceau

$$\sum_{J,K}\partial\omega_{J,K}\wedge dz_J\wedge d\bar z_K$$

est de type $(p+1,q)$; on le note $\partial\omega$. Le morceau

$$\sum_{J,K}\bar\partial\omega_{J,K}\wedge dz_J\wedge d\bar z_K$$

est de type $(p,q+1)$; on le note $\bar\partial\omega$. On vérifie que les formes $\partial\omega$ et $\bar\partial\omega$ ainsi définies ne dépendent pas du choix du système de coordonnées holomorphes locales. On définit ainsi des opérateurs ∂ et $\bar\partial$ qui vérifient

$$d = \partial + \bar\partial$$

La relation $d^2 = 0$ se traduit alors par les trois relations

$$\partial^2 = \bar\partial^2 = 0 \qquad\qquad \partial\bar\partial + \bar\partial\partial = 0 \tag{2.8}$$

On a aussi une formule de Leibniz (*cf.* (1.3))

$$\bar\partial(\omega \wedge \tau) = \bar\partial\omega \wedge \tau + (-1)^{\deg(\omega)}\omega \wedge \bar\partial\tau$$

et une formule analogue pour $\partial(\omega \wedge \tau)$.

On dit qu'une forme différentielle ω est *$\bar\partial$-fermée* si $\bar\partial\omega = 0$; elle est *$\bar\partial$-exacte* s'il existe une forme τ telle que $\omega = \bar\partial\tau$. Toute forme différentielle $\bar\partial$-exacte est $\bar\partial$-fermée. On peut donc copier la définition 1.10.

Définition 2.16 *Soit X une variété complexe ; on appelle groupes de cohomologie de Dolbeault de X les espaces vectoriels réels*

$$H^{p,q}_{\bar\partial}(X) = \{\text{formes de type } (p,q)\ \bar\partial\text{-fermées sur } X\}/ \\ \{\text{formes de type } (p,q)\ \bar\partial\text{-exactes sur } X\}$$

Ces espaces vectoriels sont donc la cohomologie du complexe

$$A^{p,\bullet}(X) : 0 \to A^{p,0}(X) \xrightarrow{\bar\partial} A^{p,1}(X) \xrightarrow{\bar\partial} \cdots \xrightarrow{\bar\partial} A^{p,n}(X) \to 0$$

où $A^{p,q}(X)$ désigne l'espace vectoriel complexe des formes différentielles sur X de type (p,q) et n est la dimension de X. Elle est nulle en degré strictement négatif ou $> n$. Par définition, l'espace vectoriel $H^{0,0}_{\bar\partial}(X)$ est l'espace vectoriel des fonctions holomorphes sur X. On définit par analogie une p-forme holomorphe sur X comme une forme ω de type $(p,0)$ telle que $\bar\partial\omega = 0$.

Bien que l'on ait

$$A^r(X,\mathbf{C}) = \bigoplus_{p+q=r} A^{p,q}(X)$$

il n'existe pas de relation évidente entre les groupes de cohomologie de de Rham et ceux de Dolbeault. Le résultat fondamental de la théorie de Hodge est que *pour une variété kählérienne compacte X*, on a

$$\begin{aligned} H^r_{\mathrm{DR}}(X,\mathbf{C}) &= \bigoplus_{p+q=r} H^{p,q}_{\bar\partial}(X) && \text{(décomposition de Hodge)} \\ H^{q,p}_{\bar\partial}(X) &= \overline{H^{p,q}_{\bar\partial}(X)} && \text{(symétrie de Hodge)} \end{aligned}$$

On a un analogue du lemme de Poincaré, en un peu plus faible.

Proposition 2.17 *Soit ω une forme de type (p,q) de classe avec $q > 0$ sur une variété complexe X. Si $\bar\partial\omega = 0$, il existe* localement sur X *une forme τ de type $(p,q-1)$ telle que $\omega = \bar\partial\tau$.*

DÉMONSTRATION. On se ramène d'abord au cas où $p=0$ par l'argument suivant : on peut écrire localement dans des coordonnées holomorphes locales

$$\omega = \sum_{J,K} \omega_{J,K} dz_J \wedge d\bar{z}_K$$

On a

$$\bar{\partial}\omega = \sum_{J,K} \bar{\partial}\omega_{J,K} \wedge dz_J \wedge d\bar{z}_K$$

par la formule de Leibniz. Il en résulte que si $\bar{\partial}\omega = 0$, pour tout J, la forme ω_J de type $(0,q)$ définie par

$$\omega_J = \sum_K \omega_{J,K} d\bar{z}_K$$

est $\bar{\partial}$-fermée. Si la proposition est montrée pour les formes de type $(0,q)$, on a localement $\omega_J = \bar{\partial}\tau_J$ et

$$\omega = (-1)^p \bar{\partial}(\sum_J dz_J \wedge \tau_J)$$

Il reste à montrer la proposition pour les formes de type $(0,q)$. Une telle forme s'écrit $\omega = \sum_K \omega_K d\bar{z}_K$. La preuve va se faire par récurrence sur le plus grand entier k tel qu'il existe K avec $k \in K$ et $\omega_K \neq 0$. Nécessairement $k \geq q$. Si $k = q$, on a

$$\omega = f d\bar{z}_1 \wedge \cdots \wedge d\bar{z}_q$$

La condition $\bar{\partial}\omega = 0$ équivaut au fait que la fonction f est holomorphe en les variables $z_{q+1}, \ldots, z_n$. Quitte à multiplier f par une fonction qui vaut 1 au voisinage d'un point donné x_0 de X, on peut supposer que f est définie sur $\mathbf{C}^n$ et à support compact, holomorphe au voisinage de x_0. On applique le théorème 2.5 : on note que sa démonstration prouve que l'on peut résoudre l'équation $f = \frac{\partial g}{\partial \bar{z}_q}$ avec une fonction g définie au voisinage de x_0, holomorphe en les variables $z_{q+1}, \ldots, z_n$. On a alors, du fait que $\frac{\partial g}{\partial \bar{z}_l} = 0$ pour $l > q$, la relation

$$\bar{\partial}((-1)^{q-1} g \, d\bar{z}_1 \wedge \cdots \wedge d\bar{z}_{q-1}) = f d\bar{z}_1 \wedge \cdots \wedge d\bar{z}_q = \omega$$

qui montre le cas $k = q$.

Supposons la proposition montrée pour $k-1 \geq q$ et considérons une forme

$$\omega = \omega_1 + \omega_2 \wedge d\bar{z}_k$$

où seuls les $d\bar{z}_j$ avec $j < k$ apparaissent dans ω_1 et ω_2. On écrit

$$\omega_2 = \sum_K \omega_{2,K} d\bar{z}_K$$

où les ensembles d'indices K sont de cardinal $q-1$ et contenus dans $\{1, \ldots, k-1\}$. La condition

$$0 = \bar{\partial}\omega = \bar{\partial}\omega_1 + \sum_{K,j} \frac{\partial \omega_{2,K}}{\partial \bar{z}_j} \, d\bar{z}_j \wedge d\bar{z}_K \wedge d\bar{z}_k$$

entraîne que les fonctions $\omega_{2,K}$ sont holomorphes en les variables $z_{k+1}, \ldots, z_n$. Comme plus haut, on peut écrire localement

$$\omega_{2,K} = \frac{\partial \tau_{2,K}}{\partial \bar{z}_k}$$

avec $\tau_{2,K}$ holomorphe en les variables $z_{k+1}, \ldots, z_n$. On a ainsi

$$\bar{\partial}(\sum_K \tau_{2,K} d\bar{z}_K) = (-1)^{q-1}\omega_2 \wedge d\bar{z}_k + \omega_1'$$

où la forme ω_1' ne fait apparaître que les cordonnées $z_{k+1}, \ldots, z_n$. On a donc écrit

$$\omega = \omega_1'' + \bar{\partial}\tau$$

où seules les coordonnées d'indice strictement inférieur à k apparaissent dans ω_1''. On a alors $\bar{\partial}\omega_1'' = 0$ puisque les formes ω et $\bar{\partial}\tau$ sont $\bar{\partial}$-fermées et on peut appliquer l'hypothèse de récurrence à ω_1''. La forme ω_1'' étant localement exacte, il en va de même de ω. □

Nous verrons dans le corollaire 3.15 un résultat plus précis lorsque $X = \mathbf{C}^n$.

2.7 Complexe de Dolbeault d'un fibré holomorphe

Soit E un fibré vectoriel holomorphe de rang r sur une variété complexe X. On note $A_X^{p,q}(E)$ l'espace vectoriel complexe des *formes de type* (p,q) *à valeurs dans* E, c'est-à-dire des sections de classe $\mathcal{C}^\infty$ du fibré $A_X^{p,q} \otimes E$. Dans une trivialisation holomorphe $\tau_U : E|_U \simeq U \times \mathbf{C}^r$ de E, une telle forme s'écrit $(\omega_1, \ldots, \omega_r)$, où les ω_i sont des formes $\mathcal{C}^\infty$ de type (p,q) sur U. On pose alors

$$\bar{\partial}\omega = (\bar{\partial}\omega_1, \ldots, \bar{\partial}\omega_r)$$

C'est une section de $A_X^{p,q+1} \otimes E$ sur U. Cette définition locale fournit en fait une forme globale sur X. En effet, si ω s'écrit $(\omega_1', \ldots, \omega_r')$ dans une autre trivialisation, on a

$$(\omega_1', \ldots, \omega_r') = (\omega_1, \ldots, \omega_r)h$$

où h est la matrice de transition. Comme ses coeeficients sont des fonctions holomorphes, on a

$$(\bar{\partial}\omega_1', \ldots, \bar{\partial}\omega_r') = (\bar{\partial}\omega_1, \ldots, \bar{\partial}\omega_r)h$$

ce qui montre que les sections locales de $A_X^{p,q+1} \otimes E$ ainsi définies se recollent en une section globale que l'on notera $\bar{\partial}_E\omega$. On définit ainsi un opérateur

$$\bar{\partial}_E : A_X^{p,q}(E) \to A_X^{p,q+1}(E)$$

Par exemple, le noyau de cet opérateur sur l'espace $A_X^{0,0}(E)$ des sections $\mathcal{C}^\infty$ de E est constitué des sections holomorphes de E.

Cet opérateur vérifie les propriétés suivantes :

– la règle de Leibniz $\bar\partial_E(\omega\wedge\tau)=\bar\partial_E\omega\wedge\tau+(-1)^{\deg(\omega)}\omega\wedge\bar\partial_E\tau$;
– l'égalité $\bar\partial_E^2=0$;
– le lemme de Poincaré : une forme $\bar\partial_E$-fermée est localement $\bar\partial_E$-exacte.

Le complexe

$$\cdots\xrightarrow{\bar\partial_E}A_X^{0,q-1}(E)\xrightarrow{\bar\partial_E}A_X^{0,q}(E)\xrightarrow{\bar\partial_E}A_X^{0,q+1}(E)\xrightarrow{\bar\partial_E}\cdots \tag{2.9}$$

est appelé le complexe de Dolbeault de E.

Chapitre 3

Faisceaux et cohomologie

3.1 Faisceaux

La théorie des faisceaux permet de formaliser de façon maniable de nombreux concepts et problèmes qui ont des aspects à la fois locaux et globaux. Plus précisément, il s'agit de trouver un cadre pour définir des objets globaux qui sont caractérisés par des propriétés locales. On pensera par exemple aux variétés différentiables ou complexes, aux fibrés en droites, aux fonctions holomorphes...

L'idée de départ est de définir une certaine classe de fonctions sur un espace topologique par des propriétés *locales*. Nous donnerons la définition, qui paraîtra sans doute un peu formelle, et nous l'expliquerons immédiatement par de nombreux exemples, qui vous montrerons que vous avez en fait déjà utilisé des faisceaux !

Définition 3.1 *Soient X un espace topologique. On appelle* faisceau *(de groupes abéliens) $\mathcal{F}$ sur X la donnée*

- *pour chaque ouvert U de X, d'un groupe abélien $\mathcal{F}(U)$;*
- *pour chaque inclusion d'ouverts $V \subset U$, d'un morphisme de groupes $r_{VU} : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(V)$ dit de restriction satisfaisant les conditions suivantes :*
  - *a)* (restriction) *pour toutes inclusions $W \subset V \subset U$, on a $r_{UU} = \mathrm{Id}$ et $r_{WU} = r_{WV} \circ r_{VU}$;*
  - *b)* (recollement) *si $(U_\alpha)_{\alpha \in I}$ est une famille d'ouverts d'union U et si l'on se donne pour chaque α un élément s_α de $\mathcal{F}(U_\alpha)$ vérifiant*

$$r_{U_\alpha \cap U_\beta, U_\alpha}(s_\alpha) = r_{U_\alpha \cap U_\beta, U_\beta}(s_\beta)$$

il existe un unique élément s de $\mathcal{F}(U)$ vérifiant $r_{U_\alpha, U}(s) = s_\alpha$ pour chaque α dans I.

Pour chaque ouvert U, on note aussi $\Gamma(U, \mathcal{F})$ l'ensemble $\mathcal{F}(U)$; ses éléments sont appelés les *sections* de $\mathcal{F}$ sur U. Les éléments de $\Gamma(X, \mathcal{F})$ sont souvent appelés *sections globales* de $\mathcal{F}$. On notera aussi $s|_V$ au lieu de $r_{VU}(s)$ la restriction d'une section s à un ouvert V.

3.2. Faisceaux de fonctions. On se donne un groupe abélien fixe K. Un faisceau de fonctions à valeurs dans K est un faisceau $\mathcal{F}$ tel que chaque $\mathcal{F}(U)$ est un sous-groupe du groupe des fonctions de U dans K. La propriété de restriction est alors automatique et l'unicité dans le recollement aussi : la fonction f existe toujours comme fonction de U dans K, il s'agit de vérifier qu'elle est dans $\mathcal{F}(U)$. La propriété b) dit que cette vérification doit pouvoir se faire localement.

Exemples 3.3 1) Si K est un groupe abélien, on peut prendre pour $\mathcal{F}(U)$ l'ensemble des fonctions localement constantes de U dans K ; on note le faisceau correspondant $\underline{K}$.

2) Soient x un point de X et K un groupe abélien ; le *faisceau gratte-ciel* K_x est défini en prenant pour $K_x(U)$ l'ensemble des fonctions de U dans K valant 0 hors de x.

3) On peut prendre pour $\mathcal{F}(U)$ l'ensemble des fonctions *continues* de U dans $\mathbf{R}$.

4) Soit X une variété différentiable. On définit de façon analogue le faisceau $\mathcal{A}_X$ des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur X. Si l'on y réfléchit un peu, on se rend compte que l'on peut très bien, même si ce n'est pas l'approche habituelle, *définir* une variété différentiable comme un espace topologique muni d'un faisceau de fonctions localement isomorphe à un ouvert de $\mathbf{R}^n$ muni du faisceau des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur cet ouvert. On définit de la même façon le faisceau $\mathcal{A}^r_X$ des r-formes différentielles sur X.

5) Plus généralement, si E est un fibré vectoriel sur une variété différentiable X, on définit un faisceau $\mathcal{A}_X(E)$ en associant à tout ouvert U de X l'espace vectoriel des sections de classe $\mathcal{C}^\infty$ de E sur U. On l'appelle *faisceau des sections* de E.

6) Si X est une variété complexe, on définit aussi le faisceau $\mathcal{O}_X$ des fonctions holomorphes sur X. De la même façon, on peut prendre cette approche pour définir les variétés complexes. On définit aussi le faisceau $\mathcal{A}^{p,q}_X$ des formes différentielles de type (p,q) sur X et le faisceau Ω^p_X des p-formes holomorphes. Si E est un fibré vectoriel holomorphe sur X, on définit le faisceau $\mathcal{O}_X(E)$ des sections holomorphes de E.

3.4. Image directe. Si $u : X \to Y$ est une application continue et $\mathcal{F}$ un faisceau sur X, on définit un faisceau $u_*\mathcal{F}$ sur Y en posant, pour tout ouvert U de Y,

$$u_*\mathcal{F}(U) = \mathcal{F}\big(u^{-1}(U)\big)$$

Définition 3.5 *Soient X un espace topologique et $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ des faisceaux sur X. On appelle* morphisme *f de $\mathcal{F}$ dans $\mathcal{G}$ la donnée, pour chaque ouvert U de X,* *d'un morphisme de groupes $f|_U : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U)$. Ces morphismes doivent avoir des propriétés de compatibilité évidentes vis-à-vis des restrictions.*

3.6. Noyau et image. On peut définir le noyau d'un morphisme $f : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ de faisceaux de groupes abéliens en posant

$$\operatorname{Ker}(f)(U) = \operatorname{Ker}(f|_U)$$

Pour l'image, c'est plus difficile, car les $f(U)$ ne forment en général pas un faisceau (la propriété de recollement n'est en général pas satisfaite ; *cf.* l'exemple 2) ci-dessous). On définit le faisceau $\operatorname{Im} f$ comme suit : un élément t de $\mathcal{G}(U)$ est dans $(\operatorname{Im} f)(U)$ s'il existe un recouvrement ouvert $(U_\alpha)_{\alpha \in I}$ de U et des élément s_α de $\mathcal{F}(U_\alpha)$ tels que $f(s_\alpha) = t|_{U_\alpha}$ pour tout α. En d'autres termes, c'est l'ensemble des sections de $\mathcal{G}$ qui proviennent *localement* de sections de $\mathcal{F}$.

On peut maintenant parler de *suite exacte* de faisceaux de groupes abéliens. On peut aussi définir le conoyau d'un morphisme $f : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ de faisceaux de groupes abéliens. Il est tel qu'on a une suite exacte

$$\mathcal{F} \to \mathcal{G} \to \mathcal{F}/\mathcal{G} \to 0$$

Les détails de sa construction importent peu ; seule son existence compte. Pour les lecteurs intéressés, on procède de la façon suivante : on dit qu'une famille (U_α, s_α), où (U_α) est un recouvrement ouvert d'un ouvert U et $s_\alpha \in \mathcal{F}(U_\alpha)$, est admissible si $s_a|_{U_\alpha \cap U_\beta} - s_\beta|_{U_\alpha \cap U_\alpha}$ est dans $f(\mathcal{G}(U_\alpha \cap U_\beta))$ pour tout α et β. De telles familles sont équivalentes si leur réunion est encore admissible. Un élément de $(\operatorname{Coker}(f))(U)$ est alors une classe d'équivalence de familles admissibles.

Exemples 3.7 1) Soient X une variété complexe connexe et E un fibré vectoriel holomorphe sur X. Toute section holomorphe σ de E non identiquement nulle induit un morphisme de faisceaux

$$\mathcal{O}_X \xrightarrow{\sigma} \mathcal{O}_X(E)$$

qui est *injectif* (même si la section σ s'annule en certains points). En effet, si U est un ouvert non vide de X et f une fonction holomorphe sur U telle que la section $f\sigma$ de E sur U soit nulle, σ ne peut s'annuler sur U car elle serait identiquement nulle par l'analogue du principe du prolongement analytique 2.9 pour les sections holomorphes de fibrés. La fonction f est donc nulle sur l'ouvert non vide de U où σ ne s'annule pas, donc est nulle, de nouveau par le principe du prolongement analytique.

2) Soient X une variété complexe et $x_1, \ldots, x_r$ des points distincts de X. L'évaluation des fonctions holomorphes en $x_1, \ldots, x_r$ est un morphisme de faisceaux

$$\mathcal{O}_X \xrightarrow{\text{ev}} \mathbf{C}_{x_1} \oplus \cdots \oplus \mathbf{C}_{x_r}$$

qui est *surjectif*. On remarquera que les $\text{ev}(U)$ ne forment en général pas un faisceau : si $r = 2$ et $U_\alpha = X - \{x_\alpha\}$, la fonction $X \to \mathbf{C}$ qui vaut 1 en x_1 et

0 ailleurs est dans $\mathrm{ev}(U_1)$ et dans $\mathrm{ev}(U_2)$, mais pas dans $\mathrm{ev}(U_1 \cup U_2)$ lorsque X est compacte connexe (puisque les fonctions holomorphes sur X sont alors constantes par 2.8).

Son noyau est un faisceaux d'idéaux de $\mathcal{O}_X$, noté $\mathcal{I}_{x_1,\dots,x_r}$. On dit qu'on a une suite exacte de faisceaux

$$0 \to \mathcal{I}_{x_1,\dots,x_r} \to \mathcal{O}_X \to \mathbf{C}_{x_1} \oplus \cdots \oplus \mathbf{C}_{x_r} \to 0$$

La suite correspondantes des sections globales

$$0 \to \Gamma(X, \mathcal{I}_{x_1,\dots,x_r}) \to \Gamma(X, \mathcal{O}_X) \to \Gamma(X, \mathbf{C}_{x_1} \oplus \cdots \oplus \mathbf{C}_{x_r}) \simeq \mathbf{C}^r$$

est exacte, mais la flèche de droite n'est pas surjective en général (lorsque X est compacte par exemple).

3) L'exemple précédent se généralise ainsi. Soit Y une sous-variété d'une variété complexe X. Les fonctions holomorphes sur X qui s'annulent sur Y forment un faisceau d'idéaux de $\mathcal{O}_X$ noté $\mathcal{I}_Y$ et on a une suite exacte de faisceaux

$$0 \to \mathcal{I}_Y \to \mathcal{O}_X \to \mathcal{O}_Y \to 0$$

4) Soit X une variété complexe. On désigne par $\mathcal{O}_X^*$ le faisceau des fonctions holomorphes de X qui ne s'annulent pas. On a une suite exacte de faisceaux

$$0 \longrightarrow \underline{\mathbf{Z}} \longrightarrow \mathcal{O}_X \xrightarrow{\exp(2i\pi\cdot)} \mathcal{O}_X^* \longrightarrow 0$$

dite *suite exacte exponentielle.* De nouveau, dans la suite des sections globales, la flèche de droite n'est en général pas surjective, car il n'existe pas toujours de logarithme global d'une fonction holomorphe qui ne s'annule pas.

5) Soit X une variété différentiable de dimension n. Le lemme de Poincaré entraîne que la suite de faisceaux

$$0 \longrightarrow \underline{\mathbf{R}} \xrightarrow{\iota} \mathcal{A}_X \xrightarrow{d} \mathcal{A}_X^1 \xrightarrow{d} \cdots \xrightarrow{d} \mathcal{A}_X^n \longrightarrow 0$$

est exacte.

6) Soient X une variété complexe de dimension n et p un entier positif. La proposition 2.17 entraîne que la suite de faisceaux

$$0 \longrightarrow \Omega_X^p \xrightarrow{\iota} \mathcal{A}_X^{p,0} \xrightarrow{\bar\partial} \mathcal{A}_X^{p,1} \xrightarrow{\bar\partial} \cdots \xrightarrow{\bar\partial} \mathcal{A}_X^{p,n} \longrightarrow 0$$

est exacte. Plus généralement, si E est un fibré vectoriel holomorphe sur X, on a une suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_X(E) \xrightarrow{\iota} \mathcal{A}_X^{0,0}(E) \xrightarrow{\bar\partial_E} \mathcal{A}_X^{0,1}(E) \xrightarrow{\bar\partial_E} \cdots \xrightarrow{\bar\partial_E} \mathcal{A}_X^{0,n}(E) \longrightarrow 0$$

On sait que si les complexes de faisceaux présentés dans les deux derniers exemples sont exacts, il n'en est pas de même des complexes

$$0 \longrightarrow \mathbf{R} \xrightarrow{\iota} A_X \xrightarrow{d} A^1_X \xrightarrow{d} \cdots \xrightarrow{d} A^n_X \longrightarrow 0$$
$$0 \longrightarrow \Gamma(X, \Omega^p_X) \xrightarrow{\iota} A^{p,0}_X \xrightarrow{\bar\partial} A^{p,1}_X \xrightarrow{\bar\partial} \cdots \xrightarrow{\bar\partial} A^{p,n}_X \longrightarrow 0$$

de leurs espaces de sections sur X (appelées *sections globales*), puisque leur cohomologie est la cohomologie de de Rham ou de Dolbeault de la variété. C'est justement cette différence qui fait toute la richesse de la théorie.

3.2 Cohomologie des faisceaux

Soient X un espace topologique et

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}' \xrightarrow{f} \mathcal{F} \xrightarrow{g} \mathcal{F}'' \longrightarrow 0 \tag{3.1}$$

une suite exacte de faisceaux de groupes abéliens sur X. La suite

$$0 \longrightarrow \Gamma(X, \mathcal{F}') \xrightarrow{\Gamma(f)} \Gamma(X, \mathcal{F}) \xrightarrow{\Gamma(g)} \Gamma(X, \mathcal{F}'')$$

est encore exacte, mais $\Gamma(g)$ n'est en général pas surjective, comme on l'a vu dans les exemples ci-dessus.

Il existe
- pour tout faisceau $\mathcal{F}$ de groupes abéliens sur X et tout entier $q \geq 0$, de groupes $H^q(X, \mathcal{F})$, avec $H^0(X, \mathcal{F}) = \Gamma(X, \mathcal{F})$;
- pour tout morphisme $f : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ de faisceaux de groupes abéliens sur X, des morphismes de groupes $H^q(f) : H^q(X, \mathcal{F}) \to H^q(X, \mathcal{G})$, avec $H^0(f) = \Gamma(f)$, de façon que pour toute suite exacte (3.1) on ait une suite exacte longue

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow H^0(X, \mathcal{F}') \xrightarrow{H^0(f)} H^0(X, \mathcal{F}) \xrightarrow{H^0(g)} H^0(X, \mathcal{F}'') \longrightarrow \\ H^1(X, \mathcal{F}') \xrightarrow{H^1(f)} H^1(X, \mathcal{F}) \xrightarrow{H^1(g)} H^1(X, \mathcal{F}'') \longrightarrow \cdots \end{aligned} \tag{3.2}$$

On a aussi, pour des morphismes $\mathcal{F} \xrightarrow{f} \mathcal{G} \xrightarrow{g} \mathcal{H}$, la relation $H^q(g \circ f) = H^q(g) \circ H^q(f)$.

La construction de ces groupes en général est très abstraite, et ne nous servira absolument pas : seule leur existence importe. Nous allons donc admettre leur existence et les propriétés ci-dessus, et expliquer comment les calculer en pratique.

3.8. Cohomologie de Cech. C'est une façon de définir les groupes de cohomologie qui ne fonctionne que sur les espaces topologiques paracompacts[1]. Tous

[1] Cela signifie que l'espace est séparé et que tout recouvrement ouvert admet un recouvrement ouvert plus fin localement fini. Tout espace topologique métrisable est paracompact.

les espaces que l'on considérera (essentiellment des variétés) ont cette propriété (mais ce n'est pas le cas en géométrie algébrique, où l'on utilise la topologie de Zariski, qui n'est pas séparée !).

On se donne un recouvrement $\mathcal{U}$ de X par des ouverts $(U_\alpha)_{\alpha\in I}$, où l'ensemble I est bien ordonné. On définit l'ensemble $C^q(\mathcal{U},\mathcal{F})$ des q-cochaînes associé comme

$$C^q(\mathcal{U},\mathcal{F}) = \prod_{\alpha_0<\cdots<\alpha_q} \mathcal{F}(U_{\alpha_0}\cap\cdots\cap U_{\alpha_q})$$

de sorte que

$$\begin{aligned} C^0(\mathcal{U},\mathcal{F}) &= \prod_{\alpha} \mathcal{F}(U_\alpha) \\ C^1(\mathcal{U},\mathcal{F}) &= \prod_{\alpha<\beta} \mathcal{F}(U_\alpha\cap U_\beta) \end{aligned}$$

On définit aussi des opérateurs

$$C^0(\mathcal{U},\mathcal{F}) \xrightarrow{\delta^0} C^1(\mathcal{U},\mathcal{F}) \xrightarrow{\delta^1} C^2(\mathcal{U},\mathcal{F}) \xrightarrow{\delta^2} \cdots$$

par les formules

$$\begin{aligned} \delta^0(s)_{\alpha_0\alpha_1} &= s_{\alpha_1}|_{U_{\alpha_0}\cap U_{\alpha_1}} - s_{\alpha_0}|_{U_{\alpha_0}\cap U_{\alpha_1}} \\ \delta^1(s)_{\alpha_0\alpha_1\alpha_2} &= s_{\alpha_1\alpha_2}|_{U_{\alpha_0}\cap U_{\alpha_1}\cap U_{\alpha_2}} - s_{\alpha_0\alpha_2}|_{U_{\alpha_0}\cap U_{\alpha_1}\cap U_{\alpha_2}} + s_{\alpha_0\alpha_1}|_{U_{\alpha_0}\cap U_{\alpha_1}\cap U_{\alpha_2}} \\ &\cdots \\ \delta^q(s)_{\alpha_0\cdots\alpha_{q+1}} &= \sum_{j=0}^{q+1}(-1)^j s_{\alpha_0\cdots\widehat{\alpha_j}\cdots\alpha_{q+1}}|_{U_{\alpha_0}\cap\cdots\cap U_{\alpha_{q+1}}} . \end{aligned}$$

On vérifie que l'on obtient un complexe (c'est-à-dire que $\delta^q\circ\delta^{q-1} = 0$) que l'on note $C^\bullet(\mathcal{U},\mathcal{F})$ et dont on note $H^q(\mathcal{U},\mathcal{F})$ le groupe de cohomologie $\operatorname{Ker}\delta^q/\operatorname{Im}\delta^{q-1}$. Les groupes obtenus dépendent hélas du recouvrement $\mathcal{U}$ choisi. En prenant la limite inductive sur tous les recouvrements (*cf.* [BT], p. 112), on définit des groupes $\check{H}^q(X,\mathcal{F})$, dit de cohomologie de Cech.

Exemples 3.9 1) *Le groupe de Picard d'une variété complexe X est isomorphe à $\check{H}^1(X,\mathcal{O}_X^*)$.* En effet, considérons un fibré en droites sur X associé à la donnée d'un recouvrement ouvert $\mathcal{U} = (U_\alpha)$ de X et de fonctions $h_{\alpha\beta}$ holomorphes dans $U_\alpha\cap U_\beta$ qui ne s'annulent pas. En d'autres termes, $h_{\alpha\beta}$ est dans $\Gamma(U_{\alpha\beta},\mathcal{O}_X^*)$ et les $(h_{\alpha\beta})_{\alpha<\beta}$ définissent un élément h de $C^1(\mathcal{U},\mathcal{O}_X^*)$. La condition

$$h_{\alpha\beta}h_{\beta\gamma}h_{\gamma\alpha} = 1$$

signifie que h est dans le noyau de δ^1 donc définit un élément de $\check{H}^1(\mathcal{U},\mathcal{O}_X^*)$. On vérifie que l'application ainsi construite induit une bijection entre l'ensemble des classes d'isomorphisme de fibrés en droites triviaux sur le recouvrement $\mathcal{U}$

et $\check{H}^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}_X^*)$. En passant à la limite sur les recouvrements, on obtient donc un isomorphisme de groupes $\mathrm{Pic}(X) \simeq \check{H}^1(X, \mathcal{O}_X^*)$.

2) On vérifie de la même façon que le groupe des classes d'isomorphisme de fibrés en droites sur une variété différentiable X munis d'une structure plate (c'est-à-dire avec des matrices de transition constantes dans des trivialisations adéquates) est isomorphe à $\check{H}^1(X, \mathbf{C}^*)$.

Un morphisme $f : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ de faisceaux de groupes abéliens sur X induit des morphismes $C^q(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \to C^q(\mathcal{U}, \mathcal{G})$ qui commutent avec les différentielles, donc des morphismes $H^q(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \to H^q(\mathcal{U}, \mathcal{G})$ en cohomologie, et enfin des morphismes

$$\check{H}^q(f) : \check{H}^q(X, \mathcal{F}) \to \check{H}^q(X, \mathcal{G})$$

en cohomologie de Cech.

Comme on l'a déjà mentionné, ces groupes ne sont les « bons » groupes de cohomologie que sur certains espaces topologiques, par exemple paracompacts. Nous supposerons donc dans la suite que toutes les variétés que l'on considère ont cette propriété.

Proposition 3.10 *Soient X une variété différentiable, E un fibré vectoriel réel sur X et $\mathcal{A}_X(E)$ le faisceau des sections de classe $\mathcal{C}^\infty$ de E. Les groupes $\check{H}^q(X, \mathcal{A}_X(E))$ sont nuls pour $q > 0$.*

DÉMONSTRATION. Montrons-le pour $q = 1$; la démonstration est analogue pour q quelconque et fonctionne d'ailleurs pour tout faisceau de $\mathcal{A}_X$-modules. On se donne un recouvrement ouvert (U_α) de X et une 1-cochaîne $(s_{\alpha\beta})$ telle que

$$\delta^1(s)_{\alpha\beta\gamma} = s_{\beta\gamma}|_{U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma} - s_{\alpha\gamma}|_{U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma} + s_{\alpha\beta}|_{U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma} = 0$$

Il existe une partition de l'unité subordonnée au recouvrement, c'est-à-dire des fonctions $\rho_\alpha : X \to \mathbf{R}$ de somme 1 telles que le support de ρ_α soit contenu dans U_α. On définit une section t_α de E sur U_α en posant

$$t_\alpha = \sum_\gamma \rho_\gamma s_{\gamma\alpha}$$

(pour $\gamma > \alpha$, on pose $s_{\gamma\alpha} = -s_{\alpha\gamma}$, et $s_{\alpha\alpha} = 0$). On a alors

$$\begin{aligned} \delta^0(t)_{\alpha\beta} = t_\beta|_{U_\alpha \cap U_\beta} - t_\alpha|_{U_\alpha \cap U_\beta} &= \sum_\gamma \rho_\gamma (s_{\gamma\beta} - s_{\gamma\alpha})|_{U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma} \\ &= \sum_\beta \rho_\beta s_{\alpha\beta}|_{U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma} \\ &= s_{\alpha\beta}|_{U_\alpha \cap U_\beta} \end{aligned}$$

□

Un faisceau $\mathcal{F}$ qui vérifie $H^q(X, \mathcal{F}) = 0$ pour tout $q > 0$ est dit *acyclique*.

Définition 3.11 *On appelle* résolution *d'un faisceau de groupes abéliens $\mathcal{F}$ une suite exacte de faisceaux*

$$0 \longrightarrow \mathcal{F} \xrightarrow{\iota} \mathcal{R}^0 \xrightarrow{d_0} \mathcal{R}^1 \xrightarrow{d_1} \ldots \longrightarrow \mathcal{R}^q \xrightarrow{d_q} \mathcal{R}^{q+1} \longrightarrow \ldots$$

Elle est acyclique *si chaque $\mathcal{R}^q$ l'est.*

On peut aussi dire qu'on a une suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathcal{F} \xrightarrow{\iota} \mathcal{R}^0 \xrightarrow{d_0} \mathcal{R}^1 \xrightarrow{d_1} \ldots \longrightarrow \mathcal{R}^q \xrightarrow{d_q} \mathcal{R}^{q+1} \longrightarrow \ldots$$

On a déjà rencontré des résolutions : le complexe de Poincaré (exemple 3.7.5))

$$0 \longrightarrow \underline{\mathbf{R}} \longrightarrow \mathcal{A}_X \xrightarrow{d} \mathcal{A}_X^1 \xrightarrow{d} \cdots \xrightarrow{d} \mathcal{A}_X^n \longrightarrow 0$$

d'une variété différentiable X est une résolution acyclique du faisceau constant $\underline{\mathbf{R}}$.

Le complexe de Dolbeault (exemple 3.7.6))

$$0 \longrightarrow \Omega_X^p \longrightarrow \mathcal{A}_X^{p,0} \xrightarrow{\bar\partial} \mathcal{A}_X^{p,1} \xrightarrow{\bar\partial} \cdots \xrightarrow{\bar\partial} \mathcal{A}_X^{p,n} \longrightarrow 0$$

sur une variété complexe X est une résolution acyclique du faisceau Ω_X^p des p-formes holomorphes. Plus généralement, si E est un fibré vectoriel holomorphe sur X,

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_X(E) \longrightarrow \mathcal{A}_X^{0,0}(E) \xrightarrow{\bar\partial_E} \mathcal{A}_X^{0,1}(E) \xrightarrow{\bar\partial_E} \cdots \xrightarrow{\bar\partial_E} \mathcal{A}_X^{0,n}(E) \longrightarrow 0$$

est une résolution acyclique du faisceau $\mathcal{O}_X(E)$ des sections holomorphes de E.

3.3 Comment calculer les groupes de cohomologie d'un faisceau ?

Le théorème suivant nous explique que l'on peut calculer la cohomologie d'un faisceau lorsqu'on en a une résolution acyclique.

Théorème 3.12 *Soit $\mathcal{F} \to \mathcal{R}^\bullet$ une résolution acyclique d'un faisceau $\mathcal{F}$ sur un espace topologique X. On a pour tout entier q*

$$H^q(X, \mathcal{F}) \simeq H^q(\Gamma(X, \mathcal{R}^\bullet))$$

Démonstration. On le montre par récurrence sur q (pour tous les faisceaux sur X). Pour $q = 0$, il suffit de remarquer que la suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{R}^0 \longrightarrow \mathcal{R}^1$$

induit une suite exacte

$$0 \longrightarrow H^0(X, \mathcal{F}) \longrightarrow \Gamma(X, \mathcal{R}^0) \longrightarrow \Gamma(X, \mathcal{R}^1)$$

Supposons la propriété vraie jusqu'à $q-1 \geq 0$. On considère le faisceau $\mathcal{G}$ défini par la suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{R}^0 \longrightarrow \mathcal{G} \longrightarrow 0$$

Comme $\mathcal{R}^0$ est acyclique, la suite exacte longue de cohomologie associée entraîne que l'on a d'une part une suite exacte

$$\Gamma(X, \mathcal{R}^0) \longrightarrow H^0(X, \mathcal{G}) \longrightarrow H^1(X, \mathcal{F}) \longrightarrow 0 \tag{3.3}$$

et d'autre part un isomorphisme

$$H^j(X, \mathcal{G}) \simeq H^{j+1}(X, \mathcal{F})$$

pour tout $j \geq 1$. D'autre part, $\mathcal{R}^1 \to \mathcal{R}^2 \to \cdots$ est une résolution acyclique de $\mathcal{G}$. L'hypothèse de récurrence entraîne

$$H^j(X, \mathcal{G}) \simeq H^{j+1}(\Gamma(X, \mathcal{R}^\bullet))$$

pour $j \geq 1$ (ce qui prouve le pas de récurrence pour $q \geq 2$) et

$$H^0(X, \mathcal{G}) \simeq \operatorname{Ker}\big(\Gamma(X, \mathcal{R}^1) \to \Gamma(X, \mathcal{R}^2)\big)$$

d'où, en utilisant (3.3), le cas $q = 1$. On en déduit le théorème. □

Corollaire 3.13 *Soit X une variété différentiable. On a*

$$H^r_{\mathrm{DR}}(X, \mathbf{R}) \simeq H^r(X, \underline{\mathbf{R}})$$

pour tout entier r.

Le lemme de Poincaré entraîne donc que ces groupes sont tous nuls pour un ouvert étoilé de $\mathbf{R}^n$.

Corollaire 3.14 *Soit X une variété complexe.*

a) On a un isomorphisme

$$H^q(X, \Omega^p_X) \simeq H^{p,q}_{\bar\partial}(X)$$

pour tous entiers p et q.

b) Si E est un fibré vectoriel holomorphe sur X, le groupe $H^q(X, \mathcal{O}_X(E))$ est isomorphe au $q$ième groupe de cohomologie du complexe de Dolbeault (2.9) de E. En particulier,

$$H^q(X, \mathcal{O}_X(E)) = 0$$

pour $q > \dim(X)$.

Corollaire 3.15 *On a*

$$H^q(\mathbf{C}^n, \mathcal{O}_{\mathbf{C}^n}) = 0$$

pour tout $q > 0$*.*

DÉMONSTRATION. Nous allons montrer que $H^{0,q}_{\bar\partial}(\mathbf{C}^n)$ est nul pour tout $q > 0$. Il s'agit donc de montrer que toute forme ω de type $(0,q)$ sur $\mathbf{C}^n$ qui est $\bar\partial$-fermée est $\bar\partial$-exacte. La démonstration de la proposition 2.17 montre que l'on peut résoudre l'équation

$$\omega = \bar\partial \tau_m$$

sur $D_m = \{z \in \mathbf{C}^n \mid |z_1|, \ldots, |z_n| < m\}$ pour tout entier m. Traitons d'abord le cas $q = 1$. La fonction $\tau_{m+1} - \tau_m$ est alors holomorphe dans D_m donc est développable en série entière à l'origine dans ce polydisque. On peut donc trouver un polynôme p_m à n variables tel que

$$\max_{z \in \bar D_{m-1}} |\tau_{m+1}(z) - \tau_m(z) - p_m(z)| \leq \frac{1}{2^m} \tag{3.4}$$

La suite

$$\tau'_m = \tau_1 + \sum_{j=1}^{m} (\tau_{j+1} - \tau_j - p_j) = \tau_{m+1} - \sum_{j=1}^{m} p_j$$

converge alors uniformément sur tout compact vers une fonction τ de classe $\mathcal{C}^\infty$: comme $\tau_{m+1} - \tau_m - p_m$ est holomorphe dans D_m, l'inégalité (3.4) entraîne en effet pour chaque dérivée partielle ∂_I d'ordre r une majoration

$$\max_{z \in D_{m-1}} |\partial_I(\tau_{m+1}(z) - \tau_m(z) - p_m(z))| < \frac{C_r}{2^m}$$

donc aussi la convergence uniforme dans tout compact des $\partial_I \tau'_m$. Comme

$$\bar\partial \tau'_m = \bar\partial \tau_{m+1} = \omega$$

sur D_{m+1}, on a $\bar\partial \tau = \omega$ dans $\mathbf{C}^n$.

Supposons maintenant $q \geq 2$. Nous allons construire par récurrence sur m des fonctions τ_m de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbf{C}^n$ telles que

$$\begin{array}{rcll} \bar\partial \tau_m & = & \omega & \text{sur } D_m \\ \tau_{m+1} & = & \tau_m & \text{sur } D_{m-1} \end{array}$$

Supposons τ_m construite. La démonstration de la proposition 2.17 montre l'existence d'une forme différentielle τ'_m de type $(0, q-1)$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbf{C}^n$ telle que

$$\bar\partial \tau'_{m+1} = \omega$$

sur D_{m+1}. On a alors $\bar{\partial}(\tau'_{m+1} - \tau_m) = 0$ sur D_m et de nouveau, la démonstration de la proposition 2.17 montre l'existence d'une forme différentielle η_m de type $(0, q-2)$ et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbf{C}^n$ telle que

$$\tau'_{m+1} - \tau_m = \bar{\partial}\eta_m$$

sur D_{m-1}. La forme différentielle

$$\tau_{m+1} = \tau'_{m+1} - \bar{\partial}\eta_m$$

vérifie les conditions cherchées. Il est clair que la suite (τ_m) converge uniformément sur tout compact vers une forme différentielle τ qui vérifie $\bar{\partial}\tau = \omega$. $\square$

On montre de façon analogue

$$H^q(\mathbf{C}^m \times (\mathbf{C}^*)^n, \mathcal{O}_{\mathbf{C}^m \times (\mathbf{C}^*)^n}) = 0 \tag{3.5}$$

pour tout $q > 0$.

Exemple 3.16 Le problème de Mittag-Leffler. C'est la question de savoir si étant données des parties polaires

$$\sum_{m=1}^{m_j} a_m (z - p_j)^{-m}$$

en des points $p_1, \ldots, p_r$ de $\mathbf{C}$, il existe une fonction méromorphe (c'est-à-dire localement quotient de deux fonctions holomorphes) qui admet en chaque p_j cette partie polaire. On introduit pour cela le faisceau[2] $\mathcal{M}_{\mathbf{C}}$ des fonctions méromorphes sur $\mathbf{C}$. On a une suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbf{C}} \longrightarrow \mathcal{M}_{\mathbf{C}} \longrightarrow \mathcal{M}_{\mathbf{C}}/\mathcal{O}_{\mathbf{C}} \longrightarrow 0$$

Comme $H^1(\mathcal{C}, \mathcal{O}_{\mathbf{C}})$ est nul par le théorème, on a une suite exacte

$$0 \longrightarrow H^0(\mathbf{C}, \mathcal{O}_{\mathbf{C}}) \longrightarrow H^0(\mathbf{C}, \mathcal{M}_{\mathbf{C}}) \longrightarrow H^0(\mathbf{C}, \mathcal{M}_{\mathbf{C}}/\mathcal{O}_{\mathbf{C}}) \longrightarrow 0$$

Notre ensemble fini de parties polaires définit une section de $\mathcal{M}_{\mathbf{C}}/\mathcal{O}_{\mathbf{C}}$ sur $\mathbf{C}$ que l'on peut donc relever en une fonction méromorphe globale sur $\mathbf{C}$. La réponse au problème de Mittag-Leffler est donc toujours positive.

3.17. Le théorème de Leray. Le passage à la limite dans la définition des groupes de cohomologie de Cech est bien ennuyeux : il semble rendre tout calcul effectif impossible. Il s'avère cependant que certains recouvrements (dits acycliques pour le faisceau donné) permettent un calcul direct combinatoire de la cohomologie qui peut s'avérer utile dans certains cas (*cf.* exemple 3.19).

[2]Le formalisme des faisceaux est d'ailleurs ici bien pratique pour définir les « fonctions » méromorphes (qui ne sont en fait pas des fonctions). On définit simplement, pour tout ouvert connexe U de $\mathbf{C}$, l'anneau $\mathcal{M}_{\mathbf{C}}(U)$ comme étant le corps des quotients de l'anneau intègre $\mathcal{O}_{\mathbf{C}}(U)$.

Théorème 3.18 *Soient X un espace topologique, $\mathcal{F}$ un faisceau sur X et $\mathcal{U} = (U_\alpha)$ un recouvrement ouvert de X tel que*

$$H^q(U_{\alpha_1} \cap \cdots \cap U_{\alpha_k}, \mathcal{F}) = 0$$

pour tous $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ et tout $q > 0$. Les groupes $H^q(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ et $H^q(X, \mathcal{F})$ sont isomorphes pour tout q.

Nous ne démontrerons pas ce théorème.

Exemple 3.19 On a

$$H^q(\mathbf{P}^n_{\mathbf{C}}, \Omega^q_{\mathbf{P}^n_{\mathbf{C}}}) = \begin{cases} \mathbf{C} & \text{si} \quad 0 \leq p = q \leq n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Nous allons le montrer pour $n = 1$ et $q = 0$ en utilisant le recouvrement de $\mathbf{P}^1_{\mathbf{C}}$ par les deux ouverts standard V_0 et V_1. On a

$$V_0 \simeq V_1 \simeq \mathbf{C} \qquad\qquad V_0 \cap V_1 \simeq \mathbf{C}^*$$

de sorte que le recouvrement est acyclique pour $\mathcal{O}_{\mathbf{P}^1_{\mathbf{C}}}$ par (3.5). Par le théorème de Leray, les groupes de cohomologie de sont ceux du complexe

$$\begin{array}{ccccccc} 0 \longrightarrow C^0(\mathbf{P}^1_{\mathbf{C}}, \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1_{\mathbf{C}}}) & \xrightarrow{\delta} & C^1(\mathbf{P}^1_{\mathbf{C}}, \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1_{\mathbf{C}}}) & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow \cdots \\ (s_0, s_1) & \longmapsto & s_1|_{V_0 \cap V_1} - s_0|_{V_0 \cap V_1} & & & \end{array}$$

Si on prend comme coordonnée $z = z_1/z_0$, une fonction holomorphe sur V_0 s'écrit $s_0(z) = \sum_{m \geq 0} a_m z^m$, une fonction holomorphe sur V_1 s'écrit $s_1(z) = \sum_{m \leq 0} a_m z^m$, tandis qu'une fonction holomorphe sur $V_0 \cap V_1$ s'écrit $s(z) = \sum_{m \in \mathbf{Z}} a_m z^m$. On en déduit que le noyau de δ consiste en les constantes, donc

$$H^0(\mathbf{P}^1_{\mathbf{C}}, \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1_{\mathbf{C}}}) = \mathbf{C}$$

ce que l'on savait déjà puisque les fonctions holomorphes sur une variété complexe compacte connexe sont constantes, et que δ est surjective, donc

$$H^1(\mathbf{P}^1_{\mathbf{C}}, \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1_{\mathbf{C}}}) = 0$$

3.4 Cohomologie singulière

Il existe par ailleurs une autre notion de cohomologie d'un espace topologique, appelée cohomologie singulière et notée $H^\bullet_{\text{sing}}(X, \mathbf{Z})$.

La cohomologie singulière est la cohomologie du complexe des cochaînes singulières $C^\bullet_{\text{sing}}(X, \mathbf{Z})$, c'est-à-dire le dual du complexe des chaînes singulières

$$\cdots \to C_q(X, \mathbf{Z}) \xrightarrow{\delta} C_{q-1}(X, \mathbf{Z}) \to \cdots \to C_1(X, \mathbf{Z}) \xrightarrow{\delta} C_0(X, \mathbf{Z}) \to 0$$

où le groupe $C_q(X, \mathbf{Z})$ est le groupe abélien libre engendré par les applications continues du simplexe

$$\Delta_q = \{(t_0, \dots, t_q) \in [0,1]^{q+1} \mid \sum_{j=0}^{q} t_j = 1\}$$

dans X et où $\delta_{q-1} : C_q(X, \mathbf{Z}) \to C_{q-1}(X, \mathbf{Z})$ est donné par

$$\delta_{q-1}\varphi = \sum_{j=0}^{q} (-1)^j \varphi_{|\Delta_q^j}$$

où

$$\Delta_q^j = \{(t_0, \dots, t_q) \in \Delta_q \mid t_j = 0\} \simeq \Delta_{q-1}$$

On a par exemple

$$\begin{array}{rcl} \delta_0 : C_1(X, \mathbf{Z}) & \to & C_0(X, \mathbf{Z}) \simeq \bigoplus_{x \in X} \mathbf{Z}_x \\ (\varphi : [0,1] \to X) & \longmapsto & \varphi(1) - \varphi(0) \end{array}$$

dont le conoyau est le groupe abélien libre sur l'ensemble des composantes connexes par arcs de X.

On montre que la cohomologie singulière d'un espace topologique est invariante par homotopie ; elle est en particulier nulle sur un espace contractile.

Une autre résolution acyclique du faisceau constant $\underline{\mathbf{Z}}$ va permettre d'identifier sa cohomologie et la cohomologie singulière.

Théorème 3.20 *Soit X un espace topologique localement contractile. On a un isomorphisme*

$$H^q_{\text{sing}}(X, \mathbf{Z}) \simeq H^q(X, \underline{\mathbf{Z}})$$

Démonstration. On introduit le faisceau $\mathcal{C}^q_{\text{sing}}$ des cochaînes singulières. C'est le faisceau défini par

$$U \mapsto C^q_{\text{sing}}(U, \mathbf{Z})$$

pour tout ouvert connexe U de X. La différentielle δ^q sur chaque $C^q_{\text{sing}}(U, \mathbf{Z})$ fournit une différentielle

$$\delta^q : \mathcal{C}^q_{\text{sing}} \to \mathcal{C}^{q+1}_{\text{sing}}$$

Le complexe ainsi construit est une résolution du faisceau constant $\underline{\mathbf{Z}}$. En effet, le complexe $C^q_{\text{sing}}(U, \mathbf{Z})$ est exact en degré positif sur chaque ouvert contractile U, puisque la cohomologie de $C^\bullet(U, \mathbf{Z})$ est la cohomologie singulière de U qui est nulle pour un espace contractile. On a aussi, puisque X est localement connexe par arcs

$$\operatorname{Ker}(\delta^0 : \mathcal{C}^0_{\text{sing}} \to \mathcal{C}^1_{\text{sing}}) = \underline{\mathbf{Z}}$$

Ce complexe est donc une résolution de $\underline{\mathbf{Z}}$. On admettra sans démonstration que cette résolution est acyclique[3]. On peut donc appliquer le théorème 3.12 pour conclure. □

Exemple 3.21 Soit X une variété complexe. La suite exacte longue de cohomologie associée à la suite exacte exponentielle (*cf.* exemple 3.7.4))

$$0 \longrightarrow \underline{\mathbf{Z}} \longrightarrow \mathcal{O}_X \longrightarrow \mathcal{O}_X^* \longrightarrow 0$$

contient le morceau

$$H^1(X, \mathcal{O}_X) \longrightarrow H^1(X, \mathcal{O}_X^*) \longrightarrow H^2(X, \underline{\mathbf{Z}}) \longrightarrow H^2(X, \mathcal{O}_X) \qquad (3.6)$$

Rappelons que le groupe $H^1(X, \mathcal{O}_X^*)$ est le groupe de Piacrd de X des classes d'isomorphisme de fibrés en droites holomorphes sur X (exemple 3.9.1)).

Le groupe $H^1(\mathbf{C}^n, \mathcal{O}_{\mathbf{C}^n})$ est nul par le corollaire 3.15, et le groupe $H^2(\mathbf{C}^n, \underline{\mathbf{Z}})$ est nul par le théorème 3.20 car $\mathbf{C}^n$ est contractile. Il en résulte que *tout fibré en droites holomorphe sur* $\mathbf{C}^n$ *est trivial.*

On peut montrer par des arguments topologiques que $H^2(\mathbf{P}^n_{\mathbf{C}}, \mathbf{Z})$ est isomorphe à $\mathbf{Z}$ (*cf.* [BT], exercise 14.22.1, où c'est démontré pour $\mathbf{R}$). Il résulte de l'exemple 3.19 et de la suite exacte (3.6) que *le groupe de Picard de* $\mathbf{P}^n_{\mathbf{C}}$ *est isomorphe à* $\mathbf{Z}$*.* Il est engendré par la classe de $\mathcal{O}(1)$.

3.22. Interprétation du groupe H^1

Soient X une variété complexe, E un fibré vectoriel holomorphe de rang r sur X et $\mathcal{O}_X(E)$ le faisceau des sections holomorphes de E. Le groupe $H^1(X, \mathcal{O}_X(E))$ possède une interprétation géométrique particulièrement importante dans l'étude des fibrés vectoriels complexes : il paramètre les « extensions du fibré trivial par E ».

Théorème 3.23 *Le groupe $H^1(X, \mathcal{O}_X(E))$ paramètre les classes d'isomorphisme d'extensions du fibré trivial de rang* 1 *par E, c'est-à-dire de suites exactes*

$$0 \to E \to F \to \mathbf{C}_X \to 0$$

Ici la notion de classe d'isomorphisme est la suivante : on dit que F est isomorphe à F' comme extension de $\mathbf{C}_X$ par E s'il existe un isomorphisme de fibrés vectoriels holomorphes entre F et F' qui induit l'identité sur E et sur $\mathbf{C}_X$.

DÉMONSTRATION. Etant donnée une telle extension F, on a une suite exacte des faisceaux de sections holomorphes correspondants

$$0 \to \mathcal{O}_X(E) \to \mathcal{O}_X(F) \to \mathcal{O}_X \to 0$$

[3]Cela résulte du fait que chaque faisceau $\mathcal{C}^q_{\text{sing}}$ est *flasque* : pour toute inclusion d'ouverts $V \subset U$, la restriction $\mathcal{C}^q_{\text{sing}}(U) \to \mathcal{C}^q_{\text{sing}}(V)$ est surjective.

d'où une application

$$\delta : H^0(X, \mathcal{O}_X) \to H^1(X, \mathcal{O}_X(E))$$

et $\delta(1)$ fournit la classe de cohomologie cherchée.

Inversement si e est dans $H^1(X, \mathcal{O}_X(E))$, soit $e_{\alpha\beta}$ un représentant de Cech de e relativement à un recouvrement ouvert $(U_\alpha)_{\alpha\in I}$ de X. Cela signifie que $e_{\alpha\beta}$ est une section holomorphe de E sur $U_\alpha \cap U_\beta$ et que l'on a

$$e_{\beta\gamma} - e_{\alpha\gamma} + e_{\alpha\beta} = 0 \tag{3.7}$$

sur $U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma$. On peut aussi supposer (quitte à prendre un recouvrement plus fin) que E est trivialisé sur chaque U_α par des applications $\tau_\alpha : E|_{U_\alpha} \to U_\alpha \times \mathbf{C}^r$, avec des matrices de transition

$$h_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \longrightarrow \mathrm{GL}(r, \mathbf{C})$$

Écrivons, pour $x \in U_{\alpha\beta}$,

$$\tau_\alpha(e_{\alpha\beta}(x)) = (x, s_{\alpha\beta}(x))$$

La relation (3.7) se lit alors

$$h_{\alpha\beta} s_{\beta\gamma} - s_{\alpha\gamma} + s_{\alpha\beta} = 0 \tag{3.8}$$

Considérons les matrices d'ordre $r+1$

$$H_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ s_{\alpha\beta} & h_{\alpha\beta} \end{pmatrix}$$

On a, sur $U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma$,

$$H_{\alpha\beta} H_{\beta\gamma} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ s_{\alpha\beta} & h_{\alpha\beta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ s_{\beta\gamma} & h_{\beta\gamma} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ s_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta} s_{\beta\gamma} & h_{\alpha\beta} \end{pmatrix} = H_{\alpha\gamma}$$

par (3.8). Les matrices $H_{\alpha\beta}$ définissent donc un fibré vectoriel holomorphe F de rang $r+1$ sur X dont on vérifie que E est un sous-fibré. Le quotient F/E est trivial, ce qui donne l'extension cherchée. $\square$

Bibliographie

[BT] R. Bott, L. Tu, Differential Forms in Algebraic Topology, Graduate Texts in Math. **82**, 2ème éd., Springer Verlag, 1986.

[C1] H. Cartan, Formes différentielles, collection Méthodes, Hermann, Paris, 1967.

[GH] P. Griffiths, J. Harris, Principles of Algebraic Geometry, Wiley, New York, 1978.

[V] C. Voisin, Théorie de Hodge et géométrie algébrique complexe, I et II.

Index