Sur les surfaces K3 et les variétés hyperkählériennes

7th Swiss-French workshop in Algebraic Geometry
Charmey, Suisse
Janvier 2018

Olivier Debarre

Chapitre 1

Surfaces K3 : premières propriétés et exemples

Nous définissons ici les surfaces K3, nommées ainsi par André Weil en 1958 « en l'honneur de Kummer, Kähler, Kodaira et de la belle montagne K2 au Cachemire ».

1.1. Définition et exemples

DÉFINITION 1.1. *Une* surface K3 *est une surface (complexe lisse) compacte S dont le fibré canonique ω_S est trivial et qui vérifie $H^1(S, \mathscr{O}_S) = 0$.*

EXEMPLE 1.2. Soit $S \subset \mathbf{P}^3$ une surface (lisse) de degré 4. On a par adjonction $\omega_S = \mathscr{O}_S$. La suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathscr{O}_{\mathbf{P}^3}(-4) \longrightarrow \mathscr{O}_{\mathbf{P}^3} \longrightarrow \mathscr{O}_S \longrightarrow 0$$

permet de calculer $H^1(S, \mathscr{O}_S) = 0$; la surface S est donc une surface K3. Cherchons des surfaces K3 parmi les intersections complètes S de degrés $d_1, \dots, d_n$ dans $\mathbf{P}^{n+2}$, avec $2 \leq d_1 \leq \cdots \leq d_n$ (on exclut $d_1 = 1$ car cela correspond à prendre un hyperplan, ce qui nous ramène dans $\mathbf{P}^{n-1}$). Comme $\omega_S = \mathscr{O}_{\mathbf{P}^{n+2}}(-n-3+d_1+\cdots+d_n)|_S$ (adjonction), on doit avoir $d_1+\cdots+d_n = n+3$, ce qui entraîne $n+3 \geq 2n$, soit $n \leq 3$. Les seules possibilités sont alors

— $n = 1$, $d = 4$: ce sont les surfaces quartiques lisses ;

— $n = 2$, $d_1 = 2$, $d_2 = 3$: ce sont les intersections complètes lisses dans $\mathbf{P}^4$ d'une quadrique et d'une cubique ;

— $n = 3$, $d_1 = d_2 = d_3 = 2$: ce sont les intersections complètes lisses dans $\mathbf{P}^5$ de trois quadriques.

On vérifie sans mal qu'une telle intersection S satisfait $H^1(S, \mathscr{O}_S) = 0$. C'est donc bien une surface K3. Dans chaque cas, la surface S est munie du fibré en droites très ample $\mathscr{O}_S(1)$, dont l'auto-intersection vaut respectivement 4, 6 et 8.

Avant de présenter l'exemple suivant, mentionnons quelques faits concernant les *revêtements doubles,* c'est-à-dire les morphismes finis $f\colon X \to Y$ de degré 2 entre variétés compactes (lisses). Étant donné un tel morphisme, l'image directe $f_*\mathscr{O}_X$ s'écrit $\mathscr{O}_Y \oplus L^\vee$, où L est un fibré en droites sur X. Le lieu des points de Y dont l'image inverse par f n'a qu'un seul point (lieu de branchement de f) est une courbe lisse $B \subset Y$ et $L^{\otimes 2} \simeq L_B$. On a aussi

$$\omega_X = f^*(\omega_Y \otimes L).$$

Inversement, étant donné un fibré en droites $\pi\colon L \to Y$ et une courbe lisse $B \in |L^{\otimes 2}|$ (de sorte que B est le lieu des zéros d'une section s de $L^{\otimes 2}$), on construit un revêtement double $f\colon X \to Y$ branché le long de B en posant

$$X := \{x \in L \mid x^{\otimes 2} = s(\pi(x))\} \tag{1}$$

et $f := \pi|_X$.

Exemple 1.3. On applique la construction précédente en prenant $Y := \mathbf{P}^2$ et $L = \mathscr{O}_{\mathbf{P}^2}(3)$, et pour B une courbe sextique plane lisse. On obtient alors un revêtement double $f\colon X \to \mathbf{P}^2$ pour lequel, par (1), le fibré canonique ω_X est trivial [1]. On a aussi

$$H^1(X, \mathscr{O}_X) = H^1(\mathbf{P}^2, f_*\mathscr{O}_X) = H^1(\mathbf{P}^2, \mathscr{O}_{\mathbf{P}^2}) \oplus H^1(\mathbf{P}^2, \mathscr{O}_{\mathbf{P}^2}(-3)) = 0,$$

de sorte que X est une surface K3. Le fibré en droites $f^*\mathscr{O}_{\mathbf{P}^2}(1)$ est ample et son auto-intersection vaut 2.

Exemple 1.4. Considérons la grassmannienne $\mathrm{Gr}(2,5) \subset \mathbf{P}(\bigwedge^2 \mathbf{C}^5) = \mathbf{P}^9$ dans son plongement de Plücker. Elle est de dimension 6 et de degré 5. Son intersection S avec trois hyperplans et une quadrique généraux est une surface lisse. Par la formule d'adjonction, on a

$$\omega_S = \mathscr{O}_{\mathrm{Gr}(2,5)}(-5+2+1+1+1)|_S = \mathscr{O}_S.$$

On vérifie $H^1(S, \mathscr{O}_S) = 0$, de sorte que S est une surface K3. Le fibré en droites $\mathscr{O}_{\mathrm{Gr}(2,5)}(1)|_S$ est très ample et son auto-intersection vaut $\deg(\mathrm{Gr}(2,5)) \cdot 2 = 10$.

De même, considérons la grassmannienne $\mathrm{Gr}(2,6) \subset \mathbf{P}(\bigwedge^2 \mathbf{C}^6) = \mathbf{P}^{14}$, de dimension 8 et de degré 14. Son intersection S avec six hyperplans généraux est une surface lisse et la formule d'adjonction donne

$$\omega_S = \mathscr{O}_{\mathrm{Gr}(2,6)}(-6+1+1+1+1+1+1)|_S = \mathscr{O}_S.$$

On vérifie $H^1(S, \mathscr{O}_S) = 0$, de sorte que S est une surface K3. Le fibré en droites $\mathscr{O}_{\mathrm{Gr}(2,6)}(1)|_S$ est très ample et son auto-intersection vaut $\deg(\mathrm{Gr}(2,6)) = 14$.

Ces exemples ne sont pas pris au hasard. On peut montrer (*cf.* th. 2.9 et rem. 2.10) qu'ils décrivent les surfaces K3 munies d'un fibré en droites ample d'auto-intersection 2, 4, 6, 8, 10 ou 14 qui sont « générales » (nous verrons dans le § 1.3 que l'auto-intersection de tout fibré en droites sur une surface K3 est un nombre pair—strictement positif pour les fibrés amples).

1.2. Groupes de (co)homologie d'une surface K3

Soit S une surface K3. On a pour toute surface complexe compacte $b_1(S) \leq 2h^1(S, \mathscr{O}_S)$, donc ici, $b_1(S) = 0$.

Lemme 1.5. *Le groupe de Picard d'une surface K3 est sans torsion.*

Démonstration. Soit M un élément de torsion de $\mathrm{Pic}(S)$. Le théorème de Riemann–Roch et la dualité de Serre donnent

$$h^0(S, M) - h^1(S, M) + h^0(S, M^{-1}) = \chi(S, M) = \chi(S, \mathscr{O}_S) = 2.$$

En particulier, soit M, soit M^{-1} a une section non nulle s. Si m est un entier strictement positif pour lequel $M^{\otimes m}$ est trivial, la section non nulle s^m de $M^{\otimes(\pm m)} = \mathscr{O}_S$ ne s'annule nulle part, donc s non plus. Cela montre que le fibré en droites M est trivial. □

1. Dans ce cas particulier, on peut construire simplement X comme la surface définie par l'équation « homogène » $F(x_0, x_1, x_2) = x_3^2$ dans l'espace projectif à poids $\mathbf{P}(1,1,1,3)$, où F est une équation (homogène de degré 6) de B dans $\mathbf{P}^2$.

Comme $H^2(S, \mathscr{O}_S)$ est aussi sans torsion, le lemme et la suite exacte longue

$$0 \longrightarrow \mathrm{Pic}(S) \longrightarrow H^2(S, \mathbf{Z}) \xrightarrow{\alpha} H^2(S, \mathscr{O}_S) \tag{2}$$

issue de la suite exacte courte

$$0 \longrightarrow \mathbf{Z}_S \longrightarrow \mathscr{O}_S \xrightarrow{\exp(2i\pi\cdot)} \mathscr{O}_S^\times \longrightarrow 1$$

entraînent que le groupe abélien $H^2(S, \mathbf{Z})$ est sans torsion. Le théorème des coefficients universels, qui dit que les sous-groupes de torsion de $H^q(S, \mathbf{Z})$ et de $H_{q-1}(S, \mathbf{Z})$ sont isomorphes, entraîne que $H_1(S, \mathbf{Z})$ est sans torsion, donc nul (puisque $b_1(S) = 0$). Par la dualité de Poincaré, les groupes $H^\bullet(S, \mathbf{Z})$ et $H_\bullet(S, \mathbf{Z})$ sont sans torsion.

1.3. Le réseau K3

Soit S une surface K3. La formule de Noether

$$\chi_{\mathrm{top}}(S) = 12\chi(S, \mathscr{O}_S) - c_1^2(S)$$

entraîne $\chi_{\mathrm{top}}(S) = 24$ de sorte que (comme $b_1(S) = b_3(S) = 0$) $b_2(S) = 22$. Le groupe abélien $H^2(S, \mathbf{Z})$ est donc libre de rang 22.

Il est muni d'une forme bilinéaire non dégénérée à valeurs entières, le cup-produit. C'est donc un *réseau,* qui est de plus

— *unimodulaire,* c'est-à-dire que le déterminant de la forme bilinéaire dans une base est ± 1 (c'est une conséquence de la dualité de Poincaré) ;

— *pair,* c'est-à-dire que la forme quadratique est à valeurs paires (cela résulte de la formule de Wu : pour tout $a \in H^2(S, \mathbf{Z})$, on a $a \cup a \equiv a \cup c_1(\omega_S) \pmod 2$) ;

— de signature $(b_2(S)^+, b_2(S)^-)$ (sur l'espace vectoriel réel $H^2(S, \mathbf{R})$) qui vérifie

$$b_2(S)^+ - b_2(S)^- = \frac{1}{3}(\omega_S^2 - 2\chi_{\mathrm{top}}(S)) = -\frac{2}{3}\chi_{\mathrm{top}}(S)) = -16,$$

c'est-à-dire $(3, 19)$.

Il existe une classification des réseaux pairs indéfinis unimodulaires, que nous allons rapidement expliquer (je renvoie à [**Se**, ch. V] pour les preuves).

On introduit le *plan hyperbolique* U : c'est le groupe $\mathbf{Z}^2$ muni de la forme quadratique de matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

dans la base canonique. C'est un réseau pair unimodulaire de signature $(1, 1)$.

On construit maintenant un réseau pair positif défini de rang 8 de la façon suivante. Soit E le sous-réseau de $\mathbf{Z}^8$ (muni de la forme quadratique de matrice I_8 dans la base canonique $(e_1, \dots, e_8)$) formé des vecteurs dont la somme des coordonnées est paire, et soit E_8 le sous-groupe de $\mathbf{Q}^8$ engendré par E et le vecteur $e := \frac{1}{2}(1, \dots, 1)$. On vérifie que la forme quadratique canonique sur $\mathbf{Q}^8$ prend des valeurs entières paires sur E_8 et que celui-ci est un réseau unimodulaire (cela résulte du fait que E est d'indice 2 à la fois dans $\mathbf{Z}^8$ et dans E_8) défini positif. Dans la base de E_8 formée des vecteurs $\frac{1}{2}(e_1 - e_2 - \cdots - e_7 + e_8)$, $e_1 + e_2$, $e_i - e_{i-1}$, $(2 \le i \le 7)$, la matrice de la forme quadratique est

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

On note $E_8(-1)$ le réseau (défini négatif) obtenu en inversant le signe de la forme quadratique. Nous admettrons le résultat suivant, qui est [**Se**, ch. V, th. 5].

Théorème 1.6. *Un réseau Λ pair indéfini unimodulaire à signature négative est isomorphe à $U^{\oplus r} \oplus E_8(-1)^{\oplus s}$, où les entiers positifs r et s sont déterminés par $r = \frac{1}{2}(\mathrm{rang}(\Lambda) - \mathrm{sign}(\Lambda))$ et $s = -\frac{1}{8}\,\mathrm{sign}(\Lambda)$.*

Il s'ensuit que pour toute surface K3 S, le réseau $(H^2(S, \mathbf{Z}), \cdot)$ est isomorphe au réseau

$$\Lambda_{\mathrm{K3}} := U^{\oplus 3} \oplus E_8(-1)^{\oplus 2}, \tag{3}$$

que l'on appelle le *réseau K3.*

1.4. Groupe de Picard

Soit S une surface K3. Il résulte du § 1.2 que le groupe de Picard $\mathrm{Pic}(S)$ (des classes d'isomorphisme de fibrés en droites holomorphes sur S) est un groupe abélien libre de rang $\rho(S) \le b_2(S) = 22$. On a même $\rho(S) \le 20$ (*cf.* § 1.5). Toutes les valeurs entre 0 et 20 sont possibles.

Lorsque S est projective, la restriction à $\mathrm{Pic}(S)$ de la forme d'intersection est non dégénérée et sa signature est $(1, \rho(S) - 1)$ (théorème de l'indice de Hodge). C'est même une condition suffisante pour la projectivité de S à cause du résultat suivant, pour la preuve duquel je renvoie à [**BHPV**, Theorem IV.(6.2)].

Théorème 1.7. *Une surface compacte S est projective si et seulement s'il existe un fibré en droites L sur S tel que $L^2 > 0$.*

1.5. Décomposition de Hodge

Un difficile résultat de Siu dit que toute surface K3 S est kählérienne ([**Si**]) [2]. En particulier, la théorie de Hodge nous dit qu'on a une décomposition fonctorielle

$$H^2(S, \mathbf{C}) = H^{0,2}(S) \oplus H^{1,1}(S) \oplus H^{2,0}(S) \tag{4}$$

en sous-espaces vectoriels complexes, où

$$H^{p,q} \simeq H^q(S, \Omega_S^p)$$

et (symétrie de Hodge)

$$H^{q,p}(S) = \overline{H^{p,q}(S)}.$$

En particulier, les sous-espaces vectoriels $H^{0,2}(S) \oplus H^{2,0}(S)$ et $H^{1,1}(S)$ sont définis sur $\mathbf{R}$. Les sous-espaces vectoriels réels sous-jacents sont orthogonaux pour la forme

2. Des résultats plus récents de Buchdahl et Lamari montrent que plus généralement, une surface complexe compacte est kählérienne si et seulement si son premier nombre de Betti est pair.

d'intersection de $H^2(S, \mathbf{R})$; celle-ci est définie positive sur l'espace vectoriel réel sous-jacent à $H^{0,2}(S) \oplus H^{2,0}(S)$, et sa signature est $(1, h^{1,1}(S) - 1)$ sur l'espace vectoriel réel sous-jacent à $H^{1,1}(S)$ (qui contient $\mathrm{Pic}(S) \otimes \mathbf{R}$).

Dans la suite exacte (2), l'application α se décompose en

$$H^2(S, \mathbf{Z}) \to H^2(S, \mathbf{C}) \xrightarrow{\mathrm{pr}^{0,2}} H^2(S, \mathscr{O}_S),$$

où $\mathrm{pr}^{0,2}$ est la projection sur le facteur $H^{0,2}(S)$ de la décomposition de Hodge.

On en déduit que le groupe de Picard de S est isomorphe à $H^{1,1}(S) \cap H^2(S, \mathbf{Z})$. Son rang $\rho(S)$ est au plus $h^{1,1}(S) = b_2(S) - 2h^2(S, \mathscr{O}_S) = 20$. Notons le fait important que la donnée de la droite complexe $H^{2,0}(S) \subset H^2(S, \mathbf{C})$ permet de reconstruire la décomposition de Hodge par $H^{0,2}(S) = \overline{H^{2,0}(S)}$ et $H^{1,1}(S) = (H^{0,2}(S) \oplus H^{2,0}(S))^{\perp}$, et donc aussi le groupe $\mathrm{Pic}(S) = H^{1,1}(S) \cap H^2(S, \mathbf{Z})$.

Exercice 1.8. Soit $S \subset \mathbf{P}^3$ la surface quartique dite de Fermat, d'équation $x_0^4 + x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 = 0$.

(a) Montrer que S est lisse ; c'est donc une surface K3.

(b) Montrer que S contient (au moins) 48 droites $\ell_1, \ldots, \ell_{48}$.

(c) Comment montreriez-vous (en utilisant un ordinateur) que le rang $\rho(S)$ du groupe de Picard $\mathrm{Pic}(S)$ est au moins 20 ?

(d) En déduire $\rho(S) = 20$.

Chapitre 2

Systèmes linéaires sur les surfaces K3

Étant donnée une surface KS S, nous étudions dans ce chapitre les applications holomorphes $S \to \mathbf{P}^r$ et plus particulièrement les plongements $S \hookrightarrow \mathbf{P}^r$. Nous montrons que cela revient à étudier les fibrés en droites dits *amples* sur S et nous caractérisons les éléments amples de $\mathrm{Pic}(S)$ de diverses façons.

2.1. Systèmes linéaires sur les surfaces

Soit X une variété complexe, soit L un fibré en droites sur X et soit $V \subset H^0(X, L)$ un sous-espace vectoriel (appelé *système linéaire*). On définit le *lieu base* de V comme l'intersection schématique

$$\mathrm{Bs}(V) := \bigcap_{s \in V} \mathrm{div}(s) \subset X.$$

Supposons que V est un sous-espace vectoriel de dimension finie. Il définit alors une application holomorphe

$$\varphi_V \colon X \smallsetminus \mathrm{Bs}(V) \longrightarrow \mathbf{P}(V^\vee).$$

Si $\mathrm{Bs}(V) = \varnothing$, on dit que V est *sans point base ;* l'application φ_V est alors holomorphe et $\varphi_V^* \mathscr{O}_{\mathbf{P}(V^\vee)}(1) = L$.

Nous allons chercher dans ce chapitre (lorsque X est une surface K3) des conditions sur L pour que $H^0(X, L)$ soit sans point base (on dit plus simplement que L est sans point base), puis pour que l'application holomorphe $\varphi_L := \varphi_{H^0(X,L)}$ soit un plongement.

2.2. Fibrés en droites amples et très amples

Donnons tout d'abord une définition importante pour les fibrés en droites induisant des plongements dans l'espace projectif.

Définition 2.1 (Fibrés en droites très amples). *On dit qu'un fibré en droites L sur une variété compacte X est* très ample *s'il induit un plongement fermé $\varphi_L \colon X \hookrightarrow \mathbf{P}(H^0(X, L)^\vee)$.*

Un fibré en droites très ample est sans point base et sa restriction à toute sous-variété reste très ample. Mais cette notion ne se comporte quand même pas très bien (en particulier par image inverse). Sa version « stable » est en revanche primordiale.

Définition 2.2 (Fibrés en droites amples). *On dit qu'un fibré en droites L sur une variété compacte est* ample *s'il existe un entier $k > 0$ tel que $L^{\otimes k}$ est très ample.*

Un fibré en droites ample L est de degré strictement positif sur chaque courbe et vérifie $L^n > 0$, si $n = \dim(X)$. L"image inverse d'un fibré en droites ample par un morphisme fini entre variétés compactes est encore ample.

THÉORÈME 2.3 (Critère de Nakai–Moishezon). *Soit L un fibré en droites sur une surface projective S. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*
(i) *L est ample ;*
(ii) *L est de degré strictement positif sur chaque courbe de S et vérifie $L^2 > 0$.*

Un analogue du résultat suivant est vrai plus généralement sur toute variété projective lisse.

THÉORÈME 2.4 (Annulation de Kodaira). *Pour tout fibré en droites ample L sur une surface K3 projective S, on a*

$$H^0(S, L^\vee) = H^1(S, L^\vee) = H^1(S, L) = H^2(S, L) = 0.$$

DÉMONSTRATION. On a $H^0(S, L^\vee) = 0$, puisque $L \cdot L^\vee = -L^2 < 0$, tandis que L est de degré strictement positif sur toute courbe de S. Pour montrer l'annulation de $H^1(S, L^\vee)$, supposons tout d'abord que $|L|$ contient une courbe intègre C. Puisque $L_{-C} = L^\vee$, on a une suite exacte

$$0 \longrightarrow L^\vee \longrightarrow \mathscr{O}_S \longrightarrow \mathscr{O}_C \to 0$$

et la suite de cohomologie associée donne une suite exacte

$$0 = H^0(S, L^\vee) \to H^0(S, \mathscr{O}_S) \to H^0(C, \mathscr{O}_C) \to H^1(S, L^\vee) \to H^1(S, \mathscr{O}_S) = 0.$$

Comme C est intègre, on a $H^0(C, \mathscr{O}_C) = \mathbf{C}$, de sorte que $H^1(S, L^\vee) = 0$.

Pour traiter le cas général, on remarque que puisque $h^2(S, L) = h^0(S, L^\vee) = 0$, on a par le théorème de Riemann–Roch $h^0(S, L) \geq \chi(S, L) = 2 + \frac{1}{2}L^2 \geq 3$ donc le système linéaire $|L| := \mathbf{P}(H^0(S, L))$ est non vide. Prenons $D \in |L|$, vu comme sous-schéma de S ; la preuve ci-dessus s'applique si l'on sait prouver $H^0(D, \mathscr{O}_D) = \mathbf{C}$.

Soit $E \leq D$ un sous-diviseur maximal tel que $H^0(E, \mathscr{O}_E) = \mathbf{C}$. Si $E < D$, on a $E \cdot (D - E) > 0$ [1]. Il existe donc une courbe intègre $C \leq D - E$ telle que $E \cdot C > 0$, donc $H^0(C, L_{-E}) = 0$. Il résulte de la suite exacte longue

$$0 \to H^0(C, \mathscr{O}_C(-E)) \to H^0(E + C, \mathscr{O}_{E+C}) \to H^0(E, \mathscr{O}_E) \to 0$$

associée à la suite exacte

$$0 \to \mathscr{O}_C(-E) \to \mathscr{O}_{E+C} \to \mathscr{O}_E \to 0.$$

que l'on a $H^0(E + C, \mathscr{O}_{E+C}) = \mathbf{C}$. Cela contredit la maximalité de E, donc $E = D$ et cela termine la preuve de l'annulation de $H^1(S, L^\vee)$.

Les relations $H^1(S, L) = H^2(S, L) = 0$ sont ensuite obtenues par application de la dualité de Serre. $\square$

1. On dit que D est 1-connexe. C'est une conséquence du théorème de l'indice de Hodge (*cf.* § 1.4) : écrivons $D = D_1 + D_2$ avec D_1 et D_2 effectifs non nuls, et posons $a_i := (D \cdot D_i)/D^2 > 0$. On a $a_1 + a_2 = 1$ donc $0 < a_i < 1$. Posons $E := a_1 D - D_1$; on a $D \cdot E = 0$ donc, puisque $D^2 > 0$ et que la signature de la forme d'intersection sur $\mathrm{Pic}(S)$ a un seul signe positif (§ 1.4), on a $E^2 \leq 0$. On en déduit $D_1 \cdot D_2 = (a_1 D - E) \cdot (a_2 D + E) = a_1 a_2 D^2 - E^2 \geq a_1 a_2 D^2 > 0$.

2.3. Le cône ample d'une surface K3 projective

Soit X une variété projective. On définit le *cône ample*

$$\mathrm{Amp}(X) \subset \mathrm{NS}(X) \otimes \mathbf{R}$$

comme le cône convexe engendré par les classes de fibrés en droites amples (c'est-à-dire l'ensemble des combinaisons linéaires non vides à coefficients réels strictement positifs de classes de fibrés en droites amples) [2]. C'est un cône ouvert et les points entiers de $\mathrm{Amp}(X)$ sont exactement les classes de fibrés amples sur X.

Si S est une surface K3 projective et que H est un fibré en droites ample sur S, le cône $\mathrm{Amp}(S)$ est contenu dans le cône $\mathrm{Pos}(S)$, qui est celle des composantes de $\{x \in \mathrm{Pic}(S) \otimes \mathbf{R} \mid x^2 > 0\}$ qui contient H (on rappelle que la signature du réseau $\mathrm{Pic}(S)$ est $(1, \rho(S) - 1)$, donc cet ensemble a deux composantes connexes).

Réciproquement, un fibré en droites L sur S tel que $L^2 > 0$ est ample s'il est d'intersection strictement positive avec *toute* courbe de S (th. 2.3(ii)). On donnera dans le th. 2.6 une caractérisation plus simple des fibrés en droites amples sur une surface K3 projective.

Commençons par une remarque élémentaire mais très utile.

Lemme 2.5. *Soit S une surface K3 et soit M un fibré en droites sur S tel que $M^2 \geq -2$. Alors, soit M, soit $M^\vee$, a une section non nulle. Si H est un fibré en droites ample sur S et que M n'est pas trivial, on a $H \cdot M \neq 0$ et si $H \cdot M > 0$, c'est M qui a une section non nulle.*

Démonstration. Cela résulte du théorème de Riemann–Roch et de la dualité de Serre, qui impliquent

$$h^0(S, M) - h^1(S, M) + h^0(S, M^\vee) = 2 + \frac{1}{2}M^2 \geq 1,$$

de sorte que soit M, soit $M^\vee$, a une section non nulle. □

Si $C \subset S$ est une courbe intègre, on a (théorème de Riemann–Roch)

$$g(C) := h^1(C, \mathscr{O}_C) = 1 - \chi(C, \mathscr{O}_C) = 1 - \chi(S, \mathscr{O}_S) + \chi(S, L_{-C}) = 1 + \frac{1}{2}C^2.$$

On a donc $C^2 \geq -2$, avec égalité si et seulement si C est une courbe rationnelle lisse. Posons (H est de nouveau une classe ample fixée sur S, ou en fait n'importe quel élément de $\mathrm{Pos}(S)$)

$$\begin{aligned} \Delta^+ &:= \{M \in \mathrm{Pic}(S) \mid M^2 = -2,\ H^0(S, M) \neq 0\} \\ &= \{M \in \mathrm{Pic}(S) \mid M^2 = -2,\ H \cdot M > 0\} \end{aligned}$$

(la deuxième égalité est obtenue par application du lemme 2.5). C'est un ensemble (peut-être vide) qui contient les classes de toutes les courbes rationnelles lisses sur S (mais parfois plus d'éléments). Il est entièrement déterminé par la donnée du cône $\mathrm{Pos}(S)$.

Si L est ample, on a donc, par le lemme 2.5, $L \cdot M > 0$ pour tout $M \in \Delta^+$. Montrons que la réciproque est vraie.

---

2. Le groupe $\mathrm{NS}(X)$ est le groupe des fibrés en droites sur X modulo l'équivalence numérique ; c'est un sous-groupe de $H^2(X, \mathbf{Z})$, donc c'est un groupe abélien de type fini. Lorsque $H^1(X, \mathscr{O}_X) = 0$ (par exemple, pour les surfaces K3), il est isomorphe au groupe $\mathrm{Pic}(X)$.

Théorème 2.6. *Soit S une surface K3 projective. On a*

$$\begin{aligned}\mathrm{Amp}(S) &= \{L \in \mathrm{Pos}(S) \mid \forall M \in \Delta^+ \quad L \cdot M > 0\} \\ &= \{L \in \mathrm{Pos}(S) \mid \text{ pour toute courbe rationnelle lisse } C \subset S,\ L \cdot C > 0\}.\end{aligned}$$

En particulier, si $\Delta^+ = \varnothing$, on a $\mathrm{Amp}(S) = \mathrm{Pos}(S)$.

Démonstration. Il nous reste à montrer que si un fibré $L \in \mathrm{Pos}(S)$ est d'intersection strictement positive avec toutes les courbes rationnelles lisses de S, il est d'intersection strictement positive avec toute courbe irréductible $C \subset S$. Si $C^2 \geq 0$, on vérifie que c'est le cas en considérant (puisque $L \in \mathrm{Pos}(S)$) une base orthogonale $(e_1, \dots, e_\rho)$ de $\mathrm{Pic}(S) \otimes \mathbf{R}$ pour laquelle $L = te_1$, avec $t > 0$ et $e_1^2 = -e_2^2 = \cdots = -e_\rho^2 = 1$ et $C = \sum x_i e_i$, avec $x_1^2 \geq x_2^2 + \cdots + x_\rho^2$ et $x_1 \geq 0$ (puisque $C \in \overline{\mathrm{Pos}(S)}$), donc en particulier $x_1 > 0$ et $L \cdot C = tx_1 > 0$.

Si $C^2 = -2$, la courbe C est rationnelle lisse, et on a bien $L \cdot C > 0$ par hypothèse. □

2.4. Systèmes linéaires amples sur les surfaces K3

Soit L un fibré en droites ample sur une surface K3 S. Le théorème de Riemann–Roch et le théorème d'annulation de Kodaira (th. 2.4) donnent $h^0(S, L) = \chi(S, L) = 2 + \frac{1}{2}L^2 \geq 3$. On a donc une application rationnelle

$$\varphi_L \colon S \dashrightarrow \mathbf{P}^r,$$

avec $r := 1 + \frac{1}{2}L^2 \geq 2$, dont on aimerait en savoir plus. La situation est complètement décrite dans le théorème suivant, dont nous ne démontrerons qu'une partie (facile). Une preuve complète (mais un peu ancienne) de (b) se trouve dans [**SD**, Theorem 5.2].

Théorème 2.7. *Soit S une surface K3 et soit L un fibré en droites ample sur S.*

(a) *Le fibré L est sans point base si et seulement s'il n'existe pas de diviseur (effectif) D sur S tel que $L \cdot D = 1$ et $D^2 = 0$.*

(b) *Si L est sans point base et que $L^2 \geq 4$, il est très ample si et seulement s'il n'existe pas de diviseur (effectif) D sur S tel que*

— *soit $L \cdot D = 2$ et $D^2 = 0$,*

— *soit $L = L_{2D}$ et $D^2 = 2$.*

Il y a des parenthèses autour des mots « effectif » car on a $D^2 \geq -2$ et $L \cdot D > 0$, donc le lemme 2.5 entraîne que D a même classe qu'un diviseur effectif.

Démonstration. Si L a un point base, on montre qu'on peut écrire $L = L_{mD+C}$, avec $D^2 = 0$ et $D \cdot C = 1$ (je renvoie à la preuve de [**H1**, Corollary 3.15]), d'où $L \cdot D = 1$.

Inversement, supposons qu'il existe D tel que $L \cdot D = 1$ et $D^2 = 0$. Considérons le fibré en droites $L(-gD)$, où $g := 1 + \frac{1}{2}L^2$. On a

$$(L(-gD))^2 = 2g - 2 - 2g = -2.$$

On déduit du lemme 2.5 que soit $L(-gD)$ soit son dual a une section non nulle. Comme $L \cdot L(-gD) = 2g - 2 - g = g - 2$, c'est $L(-gD)$ qui a une section non nulle si $g \geq 3$. Dans ce cas, comme $h^0(S, L_D) \geq 2$ (théorème de Riemann–Roch), on a

$$h^0(S, L_{gD}) \geq g + 1 = h^0(S, L).$$

On en déduit que $L(-gD)$ (qui n'est pas trivial car de carré -2) est dans le lieu base de L.

Si $g=2$, on peut faire le même raisonnement sauf si c'est $L(-gD)^\vee$ qui a une section non nulle. Posons $M := L(-D)$. On a alors $M^2 = 0$ et $M \cdot L = 1$, de sorte que M a une section non nulle (lemme 2.5), de diviseur D' effectif qui satisfait les mêmes hypothèses que D. Comme $L(-2D)^\vee = L(-2D')$, on est ramené au cas précédent. Ceci montre (a).

Montrons (b). Comme L est sans point base et $L^2 > 0$, un élément général de $|L|$ est une courbe irréductible lisse C (théorème de Bertini), de genre $g \geq 2$. On vérifie que la restriction du morphisme φ_L à C est le morphisme canonique $\varphi_{\omega_C} \colon C \to \mathbf{P}^{g-1}$ ([**H1**, Lemma 2.3]). C'est donc soit un plongement (si C n'est pas hyperelliptique) soit un morphisme de degré 2. On en déduit facilement que φ_L est aussi de degré 1 ou 2 sur son image.

Nous nous contenterons de montrer que s'il existe un diviseur D vérifiant $L \cdot D = 2$ et $D^2 = 0$, alors φ_L est de degré 2 sur son image (donc L n'est pas très ample). Comme $D^2 = 0$ et $L \cdot D > 0$, on a $h^0(S, L_D) \geq 2$ (théorème de Riemann–Roch). Comme $g = 1 + \frac{1}{2}L^2 \geq 3$, on a $L \cdot (L_D \otimes L^\vee) = 4 - 2g < 0$, de sorte que $h^0(S, L_D \otimes L^\vee) = 0$. La suite exacte

$$0 \longrightarrow L_D \otimes L^\vee \longrightarrow L_D \longrightarrow L_D|_C \longrightarrow 0$$

entraîne $h^0(C, L_D|_C) \geq 2$. Comme le fibré en droites L_D est de degré 2 sur la courbe C, celle-ci est hyperelliptique et φ_L est de degré 2 sur son image. □

COROLLAIRE 2.8. *Soit S une surface K3 et soit L un fibré en droites ample sur S. Le fibré en droites $L^{\otimes k}$ est sans point base pour $k \geq 2$ et est très ample pour $k \geq 3$.*

2.5. Structure des surfaces K3 polarisées de bas degré

On a donné dans le § 1.1 des exemples de surfaces K3 polarisées de bas degré. Nous allons montrer une sorte de réciproque, qui dit que moyennant une hypothèse de non-existence de certains fibrés en droites sur la surface (dont on verra dans le § 3.2 qu'elle est en général vérifiée ; *cf.* aussi rem. 2.10), ces constructions décrivent les surfaces polarisées générales de bas degré.

THÉORÈME 2.9. *Soit S une surface K3 et soit L un fibré en droites ample sur S.*

(a) *Si $L^2 = 2$ et qu'il n'existe pas de diviseur D sur S tel que $D^2 = 0$ et $L \cdot D = 1$, alors $\varphi_L \colon S \to \mathbf{P}^2$ est un revêtement double.*

(b) *Si $L^2 = 4$ et qu'il n'existe pas de diviseur D sur S tel que $D^2 = 0$ et $L \cdot D \in \{1, 2\}$, alors $\varphi_L \colon S \to \mathbf{P}^3$ induit un isomorphisme sur une quartique.*

(c) *Si $L^2 = 6$ et qu'il n'existe pas de diviseur D sur S tel que $D^2 = 0$ et $L \cdot D \in \{1, 2\}$, alors $\varphi_L \colon S \to \mathbf{P}^4$ induit un isomorphisme sur l'intersection d'une quadrique et d'une cubique.*

(d) *Si $L^2 = 8$, que L n'est pas divisible dans $\mathrm{Pic}(S)$ et qu'il n'existe pas de diviseur D sur S tel que $D^2 = 0$ et $L \cdot D \in \{1, 2, 3\}$, alors $\varphi_L \colon S \to \mathbf{P}^5$ induit un isomorphisme sur l'intersection de trois quadriques.*

ESQUISSE DE DÉMONSTRATION. Le fait que, sous les hypothèses considérées, φ_L soit un morphisme résulte du th. 2.7(a). Sous les hypothèses de (b), (c) et (d), c'est même un plongement fermé par le th. 2.7(b).

Montrons par exemple le cas (c). L'image de $\varphi_L\colon S \to \mathbf{P}^4$ est une surface de degré 6. On considère les applications canoniques

$$\operatorname{Sym}^2 H^0(S,L) \longrightarrow H^0(S,L^{\otimes 2}) \quad \text{et} \quad \operatorname{Sym}^3 H^0(S,L) \longrightarrow H^0(S,L^{\otimes 3})$$

Le théorème de Riemann–Roch et l'annulation de $H^1(S,L^{\otimes 2})$ et $H^1(S,L^{\otimes 3})$ (th. 2.4) entraînent $h^0(C,L^{\otimes 2}) = 14$ et $h^0(S,L^{\otimes 3}) = 29$.

Comme $\dim(\operatorname{Sym}^2 H^0(S,L)) = 15$, on en déduit que la surface $\varphi_L(S)$ est contenue dans une quadrique Q, qui est irréductible. Comme $\dim(\operatorname{Sym}^3 H^0(S,L)) = 35$, on en déduit que la surface $\varphi_L(S)$ est contenue dans une cubique ne contenant pas Q. C'est donc l'intersection de ces deux hypersurfaces. □

Remarque 2.10. Dans chacun des cas du théorème, la description géométrique donnée est valable si on fait l'hypothèse supplémentaire $\operatorname{Pic}(S) = \mathbf{Z}L$, puisque le diviseur D doit alors être un multiple non nul de L, donc ne peut vérifier $D^2 = 0$. Toujours sous cette hypothèse, on peut montrer que si $L^2 = 10$, alors $\varphi_L\colon S \to \mathbf{P}^6$ induit un isomorphisme entre S et l'intersection de $\operatorname{Gr}(2,5) \subset \mathbf{P}^9$, de $\mathbf{P}^6 \subset \mathbf{P}^9$ et d'une quadrique $Q \subset \mathbf{P}^9$ (*cf.* ex. 1.4).

Chapitre 3

L'application des périodes pour les surfaces K3

Soit S une surface K3. Nous revenons dans ce chapitre sur la structure de Hodge sur $H^2(S,\mathbf{C})$; rappelons (*cf.* § 1.5) que celle-ci permet de reconstruire le groupe $\mathrm{Pic}(S)$. Nous montrons ici que cette structure de Hodge caractérise la surface S (c'est le théorème de Torelli).

3.1. Surjectivité de l'application des périodes

Qu'est-ce que la période d'une surface K3 S ? Rappelons (*cf.* (3)) qu'il existe toujours une isométrie de réseaux

$$\varphi\colon H^2(S,\mathbf{Z}) \xrightarrow{\sim} \Lambda_{\mathrm{K3}}.$$

Une telle isométrie s'appelle un *marquage* de la surface K3 S. La *période* de la surface K3 marquée (S,φ) est alors la droite complexe $\varphi_{\mathbf{C}}(H^{2,0}(S)) \subset \Lambda_{\mathrm{K3}} \otimes \mathbf{C}$, vue comme point de l'espace projectif $\mathbf{P}(\Lambda_{\mathrm{K3}} \otimes \mathbf{C})$ (qui dépend quand même du choix de φ). La théorie de Hodge dit que ce point est en fait dans la variété complexe connexe

$$\Omega := \{[\omega] \in \mathbf{P}(\Lambda_{\mathrm{K3}} \otimes \mathbf{C}) \mid \omega\cdot\omega = 0,\ \omega\cdot\overline{\omega} > 0\}.$$

Notre premier énoncé dit que tous les points de Ω sont des périodes de surfaces K3 marquées. Il est démontré dans [**H1**, Theorem 7.4.1].

Théorème 3.1 (Surjectivité de l'application des périodes des surfaces K3). *Soit $[\omega] \in \Omega$. Il existe une surface K3 S et une isométrie $\varphi\colon H^2(S,\mathbf{Z}) \xrightarrow{\sim} \Lambda_{\mathrm{K3}}$ telle que $\varphi(H^{2,0}(S)) = [\omega]$.*

Il est maintenant temps de construire cette « application des périodes ». On dit que des surfaces K3 marquées (S,φ) et (S',φ') sont *isomorphes* s'il existe un isomorphisme $\sigma\colon S' \xrightarrow{\sim} S$ tel que $\varphi = \varphi' \circ \sigma^*$; des surfaces K3 marquées isomorphes ont même période. On montre que l'ensemble

$$\mathscr{N} := \{\text{classes d'isomorphisme des surfaces K3 marquées}\}$$

peut être muni d'une structure de variété complexe de dimension 20, *qui n'est pas séparée,* pour laquelle l'application des périodes

$$\wp\colon \mathscr{N} \longrightarrow \Omega \tag{5}$$

est holomorphe. Le th. 3.1 dit que $\wp$ est surjective.

Remarque 3.2. Si $[\omega] \in \mathbf{P}(\Lambda_{\mathrm{K3}} \otimes \mathbf{C})$, les deux conditions $\omega\cdot\omega = 0$ et $\omega\cdot\overline{\omega} > 0$ sont équivalentes aux deux conditions suivantes :

— la restriction de la forme quadratique au plan réel $P = \mathbf{R}\,\mathrm{Re}(\omega) \oplus \mathbf{R}\,\mathrm{Im}(\omega) \subset \Lambda_{\mathrm{K3}} \otimes \mathbf{R}$ est définie positive ;

— la paire $(\mathrm{Re}(\omega), \mathrm{Im}(\omega))$ est une base orthogonale de P dont les deux vecteurs ont même norme.

Réciproquement, étant donné un plan orienté $P \subset \Lambda_{\mathrm{K3}} \otimes \mathbf{R}$ sur lequel la forme quadratique de Λ_{K3} est définie positive, on définit un unique élément $\omega := u + iv$ de Ω en prenant pour (u, v) une base orthonormée directe quelconque de P. La variété Ω s'identifie donc à l'ensemble des 2-plans orientés dans $\Lambda_{\mathrm{K3}} \otimes \mathbf{R}$ sur lesquels la forme quadratique est définie positive.

3.2. Surfaces K3 de réseau de Picard donné

La surjectivité de l'application des périodes (th. 3.1) a de nombreuses applications. La première est qu'étant donné un réseau pair Λ satisfaisant certaines conditions, il existe une surface K3 S telle que $\mathrm{Pic}(S) \simeq \Lambda$.

Proposition 3.3. *Soit Λ un sous-réseau de rang $\rho > 0$ de Λ_{K3} sur lequel la forme quadratique est de signature $(1, \rho - 1)$. Il existe une sous-variété Ω_Λ de Ω de dimension $20 - \rho$ (irréductible si $\rho < 20$) telle que, pour toute surface K3 marquée (S, φ), les deux propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) *on a $\Lambda \subset \varphi(\mathrm{Pic}(S))$;*

(ii) *la période de (S, φ) est dans Ω_Λ.*

Démonstration. Étant donné un sous-réseau $\Lambda \subset \Lambda_{\mathrm{K3}}$ comme dans l'énoncé de la proposition, posons

$$\Omega_\Lambda := \Omega \cap \Lambda^\perp.$$

En utilisant la rem. 3.2, on voit que Ω_Λ s'identifie à l'ensemble des plans orientés $P \subset \Lambda^\perp \otimes \mathbf{R}$ sur lequel la forme quadratique est définie positive. Comme cette forme quadratique est de signature $(2, 20 - \rho)$ sur $\Lambda^\perp \otimes \mathbf{R}$, la variété complexe Ω_Λ est *non vide,* de dimension $20 - \rho$, irréductible si $\rho < 20$.

Comme $\mathrm{Pic}(S) = H^2(S, \mathbf{Z}) \cap H^{2,0}(S)^\perp$, la condition $\Lambda \subset \varphi(\mathrm{Pic}(S))$ est équivalente à $\Lambda \subset \varphi(H^{2,0}(S))^\perp$, soit encore à $\Lambda^\perp \supset \varphi(H^{2,0}(S))$, ce qui signifie que la période de (S, φ) est dans $\Lambda^\perp$, c'est-à-dire dans Ω_Λ. □

Corollaire 3.4. *Soit Λ un sous-réseau primitif de rang $\rho > 0$ de Λ_{K3} sur lequel la forme quadratique est de signature $(1, \rho - 1)$. Il existe une surface K3 de réseau de Picard Λ.*

Démonstration. D'après la prop. 3.3, il existe une surface K3 dont le groupe de Picard contient Λ. Plus précisément, les surfaces K3 marquées (S, φ) telles que $\varphi(\mathrm{Pic}(S)) \supset \Lambda$ sont celles dont la période est dans la sous-variété $\Omega_\Lambda \subset \Omega$. Comme Λ est primitif dans Λ_{K3}, si le réseau $\varphi(\mathrm{Pic}(S))$ contient strictement Λ, il est de rang strictement supérieur. La réunion dénombrable

$$\bigcup_{\Lambda \subsetneq \Lambda' \subset \Lambda_{\mathrm{K3}}} \Omega_{\Lambda'} \subset \Omega_\Lambda$$

ne peut recouvrir Ω_Λ par le théorème de Baire, puisque chaque $\Omega_{\Lambda'}$ est de dimension $20 - \mathrm{rang}(\Lambda') < 20 - \mathrm{rang}(\Lambda) = \dim(\Omega_\Lambda)$ (prop. 3.3).

Par le th. 3.1, il existe une surface K3 marquée dont la période est dans $\Omega_\Lambda \smallsetminus \bigcup_{\Lambda \subsetneq \Lambda' \subset \Lambda_{\mathrm{K3}}} \Omega_{\Lambda'}$. Son réseau de Picard est Λ. □

Exemple 3.5. Pour tout entier $e > 0$, il existe une surface K3 S telle que $\mathrm{Pic}(S) = \mathbf{Z}L$, où L est un fibré ample sur S d'auto-intersection $2e$. En effet, il existe dans le plan hyperbolique U (donc dans le réseau Λ_{K3}) un vecteur primitif de carré $2e$: si (u, v) est une base canonique de U, on peut prendre $u + ev$. Il suffit alors d'appliquer le corollaire.

EXEMPLE 3.6 (Quartiques de Cayley–Oguiso). Soit $\Lambda = \mathbf{Z}h \oplus \mathbf{Z}\ell$ le réseau de rang 2 et de matrice $\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$. Ce réseau peut être plongé primitivement dans le réseau $U^{\oplus 2}$ (donc dans le réseau Λ_{K3}) de la façon suivante : si (u_i, v_i), pour $i \in \{1, 2\}$, est une base canonique pour chacune des deux copies de U, il suffit d'envoyer h sur $u_1 + 2v_1$ et ℓ sur $u_1 + u_2 - 2v_2$. Il existe donc, par le cor. 3.4, une surface K3 projective S dont le réseau de Picard est Λ.

Dans ces exemples, on a construit à la « main » un plongement primitif d'un réseau donné dans Λ_{K3}. Des résultats très généraux sur ce problème ont été obtenus par Nikulin. En voici un exemple.

THÉORÈME 3.7 (Nikulin). *Soit L un réseau pair de signature $(1, \rho - 1)$, avec $1 \leq \rho \leq 10$. Il existe un plongement primitif de L dans Λ_{K3}, donc une surface K3 projective de réseau de Picard L.*

3.3. Le théorème de Torelli

Le théorème de Torelli (à l'origine énoncé et prouvé pour les courbes) répond à la question de savoir si une variété kählérienne compacte est déterminée (à isomorphisme près) par (une partie de) sa structure de Hodge. Dans le cas des surfaces K3, cette propriété est vraie.

THÉORÈME 3.8 (Théorème de Torelli pour les surfaces K3). *Des surfaces K3 S et S' sont isomorphes si et seulement s'il existe une isométrie*

$$\varphi \colon H^2(S', \mathbf{Z}) \xrightarrow{\sim} H^2(S, \mathbf{Z})$$

telle que $\varphi_{\mathbf{C}}(H^{2,0}(S')) = H^{2,0}(S)$.

De plus, si l'image par $\varphi_{\mathbf{C}}$ d'une classe de Kähler sur S' est une classe de Kähler sur S, il existe un isomorphisme $\sigma \colon S \xrightarrow{\sim} S'$ tel que $\varphi = \sigma^*$.

Nous verrons plus tard que l'isomorphisme σ est uniquement déterminé par φ (prop. 4.1). Le th. 3.8 s'applique bien sûr lorsque l'image par φ d'une classe ample sur S' est une classe ample sur S. Nous ne démontrerons pas ici ce théorème et renvoyons à la preuve de [**H1**, Theorem 7.5.3].

Répétons que l'application des périodes $\wp \colon \mathscr{N} \to \Omega$ de (5) n'est *pas* injective (puisque $\mathscr{N}$ n'est pas séparé alors que Ω l'est) !

3.4. L'application des périodes pour les surfaces K3 polarisées

Fixons, pour chaque entier positif e, un élément primitif $h_{2e} \in \Lambda_{\mathrm{K3}}$ avec $h_{2e}^2 = 2e$ (il résulte du critère d'Eichler (th. 5.3), que tous ces éléments sont dans la même $O(\Lambda_{\mathrm{K3}})$-orbite). Par exemple, si (u, v) est la base canonique d'une copie de U, on peut prendre $h_{2e} = u + ev$. On a alors

$$\Lambda_{\mathrm{K3},2e} := h_{2e}^{\perp} = U^{\oplus 2} \oplus E_8(-1)^{\oplus 2} \oplus \mathbf{Z}(-2e). \tag{6}$$

Soit maintenant (S, L) une surface K3 polarisée de degré $2e$ et soit $\varphi \colon H^2(S, \mathbf{Z}) \xrightarrow{\sim} \Lambda_{\mathrm{K3}}$ un marquage tel que $\varphi(L) = h_{2e}$ (une telle isométrie existe par le critère d'Eichler). La période $\varphi_{\mathbf{C}}(H^{2,0}(S)) \in \Lambda_{\mathrm{K3}} \otimes \mathbf{C}$ de (S, L, φ) est alors dans $h_{2e}^{\perp}$, donc dans la variété (non connexe) compacte complexe de dimension 19

$$\Omega_{2e} := \{[\omega] \in \mathbf{P}(\Lambda_{\mathrm{K3}} \otimes \mathbf{C}) \mid \omega \cdot \omega = 0,\ \omega \cdot h_{2e} = 0,\ \omega \cdot \overline{\omega} > 0\} \subset \Omega.$$

Cette période dépend du marquage φ. Elle en devient indépendante dans le quotient of Ω_{2e} par l'image $\widetilde{O}(\Lambda_{\mathrm{K3},2e})$ du morphisme (injectif) de restriction

$$\begin{array}{rcl} \{\varphi \in O(\Lambda_{\mathrm{K3}}) \mid \varphi(h_{2e}) = h_{2e}\} & \longrightarrow & O(\Lambda_{\mathrm{K3},2e}) \\ \varphi & \longmapsto & \varphi|_{h_{2e}^\perp}. \end{array}$$

Dans le cas non polarisé, nous n'avions pas considéré le quotient analogue $O(\Lambda_{\mathrm{K3}})\backslash\Omega$ car ce n'est pas une variété. Les choses se passent ici beaucoup mieux : le groupe $O(\Lambda_{\mathrm{K3},2e})$ agit proprement et discontinûment sur Ω_{2e} et le quotient [1]

$$\mathscr{P}_{2e} := O(\Lambda_{\mathrm{K3},2e})\backslash\Omega_{2e}$$

est une variété complexe séparée (avec des singularités quotients) irréductible de dimension 19, non-compacte. Par la théorie de Baily–Borel, c'est même une variété algébrique quasi-projective.

Pour définir une application des périodes (pour les surfaces K3 polarisées), il faut aussi construire un espace de modules, c'est-à-dire une variété qui paramètre les classes d'isomorphisme de variétés K3 polarisées.

Soit (S, L) une surface K3 polarisée de degré $2e$. Le fait qu'une puissance fixe (ici $L^{\otimes 3}$, *cf.* cor. 2.8) est très ample entraîne que S est plongée dans un espace projectif de dimension fixe (ici $\mathbf{P}^{9e+1}$), avec un polynôme de Hilbert fixe (ici $9eT^2 + 2$). Le schéma de Hilbert qui paramètre les sous-schémas fermés de $\mathbf{P}^{9e+1}$ avec ce polynôme de Hilbert est projectif (Grothendieck) et sous sous-schéma $\mathscr{H}$ qui paramètre les K3 surfaces est ouvert et lisse. La question est maintenant de prendre le quotient de $\mathscr{H}$ par l'action canonique du groupe $\mathrm{PGL}(9e + 2)$. La technique usuelle pour prendre ce quotient en géométrie algébrique, la théorie géométrique des invaraints, est difficile à appliquer directement dans ce cas, mais Viehweg a réussi à contourner cette difficulté en évitant une vérification directe de la stabilité tout en construisant quand même un espace de modules grossier quasi-projectif (sur $\mathbf{C}$ seulement ! *Cf.* [**Vi**]).

Théorème 3.9. *Soit e un entier positif. Il existe un espace de modules grossier quasi-projectif $\mathscr{K}_{2e}$ de dimension 19 pour les surfaces K3 polarisées de degré $2e$.*

On peut alors définir une *application des périodes*

$$\begin{array}{rcl} \wp_{2e} \colon \mathscr{K}_{2e} & \longrightarrow & \mathscr{P}_{2e} \\ [(S, L)] & \longmapsto & [p(S, L)] \end{array}$$

pour les surfaces K3 polarisées, qui est un morphisme algébrique (Griffiths). Le théorème de Torelli prend alors la forme suivante.

Théorème 3.10 (Théorème de Torelli pour les surfaces K3 polarisées). *Soit e un entier strictement positif. L'application des périodes*

$$\wp_{2e} \colon \mathscr{K}_{2e} \longrightarrow \mathscr{P}_{2e}$$

est un plongement ouvert.

1. Cette présentation est correcte mais il faut signaler que Ω_{2e} a en fait deux composantes irréductibles (échangées par la conjugaison complexe), qu'on choisit en général une composante Ω_{2e}^+ et qu'on considère les sous-groupes des divers groupes orthogonaux (notés O^+ dans [**M, GHS2, GHS3**]) qui préservent cette composante, de sorte que $\mathscr{P}_{2e} = \widetilde{O}^+(\Lambda_{\mathrm{K3},2e})\backslash\Omega_{2e}^+$.

Les constructions détaillées dans le § 1.1 (avec les énoncés du § 2.5 et les résultats du § 3.2) entraînent que la variété $\mathscr{K}_{2e}$ est unirationnelle pour $e \in \{1, \ldots, 5, 7\}$. Les travaux de Mukai ([**Mu1, Mu2, Mu3, Mu4, Mu5, Mu6**]) montrent qu'elle est en fait unirationnelle pour $e \leq 19$ et $e \notin \{14, 18\}$. À l'autre extrême, Gritsenko–Hulek–Sankaran ont utilisé la description de $\mathscr{K}_{2e}$ donnée dans le th. 3.10 comme ouvert d'un quotient du domaine hermitien symétrique Ω_{2e} par un sous-groupe arithmétique agissant proprement et discontinûment, pour montrer que $\mathscr{K}_{2e}$ est de type général pour $e \geq 31$ (*cf.* [**GHS1, GHS3**] pour plus de détails).

Chapitre 4

Automorphismes des surfaces K3

Soit S une surface K3. Comme pour toute variété complexe compacte, l'espace tangent à l'origine au groupe de Lie complexe $\mathrm{Aut}(S)$ des automorphismes biréguliers de S est l'espace vectoriel $H^0(S, T_S)$. Comme $T_S \simeq \Omega^1_S \otimes (\Omega^2_S)^\vee \simeq \Omega^1_S$, on a ici

$$H^0(S, T_S) \simeq H^0(S, \Omega^1_S) = 0,$$

de sorte que le groupe de Lie $\mathrm{Aut}(S)$ est discret (notons aussi que comme S est une surface qui a un unique modèle minimal, tout automorphisme biméromorphe de S est birégulier). Le théorème suivant permet d'étudier les automorphismes de S par leur seule action sur le réseau $H^2(S, \mathbf{Z})$.

Proposition 4.1. *Soit S une surface K3. Tout automorphisme de S agissant trivialement sur $H^2(S, \mathbf{Z})$ est l'identité.*

Démonstration. On suit [**H1**, Section 15.1.1]. Soit σ automorphisme non trivial de S. Un théorème de Fujiki ([**F**, Theorem 4.8]) dit tout d'abord que le groupe des automorphismes d'une variété kählérienne compacte qui fixe une classe de Kähler a une nombre fini de composantes connexes : comme σ fixe toute classe de Kähler, il est d'ordre fini $n > 1$.

Par la décomposition de Hodge (§ 1.5), σ^* agit aussi trivialement sur $H^0(S, \Omega^2_S)$, donc $\sigma^*\omega = \omega$, pour toute 2-forme holomorphe non nulle ω sur S. Autour d'un point fixe quelconque p de σ, il existe des coordonnées analytiques locales (x_1, x_2) centrées en p telles que $\sigma(x_1, x_2) = (\lambda_p x_1, \lambda_p^{-1} x_2)$, où λ_p est une racine primitive n-ième de 1 ([**H1**, Lemma 15.1.4]). En particulier, l'ensemble $\mathrm{Fix}(\sigma)$ des points fixes de σ est fini. On peut donc utiliser la formule des points fixes holomorphe de Lefschetz

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{2} (-1)^i \operatorname{Tr}(\sigma^*|_{H^i(S, \mathscr{O}_S)}) &= \sum_{p \in \mathrm{Fix}(\sigma)} \mathrm{d\acute{e}t}(\mathrm{Id} - T_{\sigma,p})^{-1} \\ &= \sum_{p \in \mathrm{Fix}(\sigma)} \big((1-\lambda_p)(1-\lambda_p^{-1})\big)^{-1}.\end{aligned}$$

Le membre de gauche de cette égalité vaut 2, de sorte que $\mathrm{Fix}(\sigma)$ n'est pas vide. Comme $|\lambda_p| = 1$, on a $|1 - \lambda_p^{\pm 1}| \le 2$, donc $|(1-\lambda_p)(1-\lambda_p^{-1})| \ge 1/4$, puis $\mathrm{Card}(\mathrm{Fix}(\sigma)) \le 8$.

On peut aussi utiliser la formule des points fixes topologique de Lefschetz

$$\begin{aligned}\mathrm{Card}(\mathrm{Fix}(\sigma)) &= \sum_{i=0}^{4} (-1)^i \operatorname{Tr}(\sigma^*|_{H^i(S, \mathbf{Q})}) \\ &= \chi_{\mathrm{top}}(S) = 24.\end{aligned} \tag{7}$$

On a donc une contradiction et S n'admet aucun automorphisme d'ordre fini non trivial. □

La conclusion de la proposition peut être traduite comme l'injectivité du morphisme de groupes

$$\Psi_S\colon \operatorname{Aut}(S) \longrightarrow O(H^2(S,\mathbf{Z}),\cdot). \tag{8}$$

Le théorème de Torelli (th. 3.8) dit que l'image de Ψ_S est le groupe des isométries qui préservent la structure de Hodge de $H^2(S,\mathbf{Z})$ (c'est-à-dire la droite $H^{2,0}(S)$ dans $H^2(S,\mathbf{C})$) et qui envoient une classe de Kähler sur une classe de Kähler.

Voici une application simple de ce résultat : le groupe des automorphismes d'une surface K3 surface de nombre de Picard 1 n'est pas très intéressant !

Proposition 4.2. *Soit S une surface K3 dont le groupe de Picard est engenré par une classe ample L. Le groupe des automorphismes de S est trivial quand $L^2 \geq 4$ et est d'ordre 2 quand $L^2 = 2$.*

Démonstration. Soit σ un automorphisme de S. On a $\sigma^* L = L$ et σ^* induit une isométrie de Hodge sur le réseau $L^\perp$. On peut montrer que $\sigma^*|_{L^\perp} = \varepsilon \operatorname{Id}$, où $\varepsilon \in \{-1, 1\}$ [1]. Choisissons comme plus haut une identification des réseaux $H^2(S,\mathbf{Z})$ et Λ_{K3} telle que $L = u + ev$, où $L^2 = 2e$ et (u, v) est une base canonique du plan hyperbolique $U \subset \Lambda_{\mathrm{K3}}$. On a alors

$$\sigma^*(u + ev) = u + ev \qquad \text{et} \qquad \sigma^*(u - ev) = \varepsilon(u - ev).$$

Cela entraîne $2e\sigma^*(v) = (1-\varepsilon)u + e(1+\varepsilon)v$, de sorte que $2e \mid (1-\varepsilon)$. Si $e > 1$, cela entraîne $\varepsilon = 1$, donc $\sigma^* = \operatorname{Id}$, et $\sigma = \operatorname{Id}$ par prop. 4.1. Si $e = 1$, il y a aussi la possibilité $\varepsilon = -1$, et σ, si non trivial, est une involution uniquement déterminée de S. Mais dans ce cas, une telle involution existe toujours (th. 2.9(a)). □

Les automorphismes deviennent plus intéressants quand le nombre de Picard augmente. L'exemple suivant est décrit dans [**Og1**].

Théorème 4.3 (Oguiso). *Les quartiques de Cayley–Oguiso admettent un automorphisme sans point fixe et d'entropie positive* [2].

Démonstration. Les quartiques de Cayley–Oguiso ont été construites dans l'ex. 3.6 : ce sont des des surfaces K3 S dont le réseau de Picard est le réseau $\mathbf{Z}h \oplus \mathbf{Z}e$ de matrice $\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$ (il suffit d'ailleurs pour la suite que $\operatorname{Pic}(S)$ contienne ce réseau). Si $\eta := \frac{1}{2}(1+\sqrt{5})$ est le nombre d'or, racine de l'équation $\eta^2 = 1 + \eta$, c'est aussi le réseau $\mathbf{Z}[\eta]$ muni de la forme quadratique $x \cdot x = 4N(x)$. Remarquons qu'on a

$$\eta^n = a_{n-1} + a_n \eta$$

pour tout $n \geq 1$, où $(a_n)_{n\geq 0}$ est la suite de Fibonacci commençant par 0 et 1.

---

1. Si (S, L) est très générale, cela résulte d'un argument standard de théorie des déformations ; l'argument général est malin et repose sur le théorème de Kronecker et le fait que 21, le rang du réseau $L^\perp$, est impair ([**H1**, Corollary 3.3.5]).

2. Si σ est un automorphisme d'un espace métrique (X, d), on pose, pour tout entier positif m et tous $x, y \in X$,

$$d_m(x,y) := \max_{0\leq i<m} d(\sigma^i(x), \sigma^i(y)).$$

Pour $\varepsilon > 0$, soit $s_m(\varepsilon)$ le nombre maximal de boules disjointes dans X de rayon $\varepsilon/2$ pour la distance d_m. L'*entropie topologique* of σ est définie par

$$h(\sigma) := \lim_{\varepsilon\to 0} \limsup_{m\to\infty} \frac{\log s_m(\varepsilon)}{m} \geq 0.$$

Les automorphismes d'entropie positive sont les plus intéressants du point de vue dynamique.

Pour tout $k \in \mathbf{Z}$, l'application $x \mapsto \pm\eta^{2k}x$ est une isométrie du réseau $\mathbf{Z}[\eta]$ [3]. Déterminons lesquelles de ces isométries s'étendent à des isométries φ de Λ_{K3} qui valent $\varepsilon\,\mathrm{Id}$ sur $\mathrm{Pic}(S)^\perp$, avec $\varepsilon \in \{-1, 1\}$. Si on reprend les notations de l'ex. 3.6, on doit avoir les relations

$$\begin{aligned}
\varphi(u_1 + 2v_1) &= a_{2k-1}(u_1 + 2v_1) + a_{2k}(u_1 + u_2 - 2v_2),\\
\varphi(u_1 + u_2 - 2v_2) &= a_{2k}(u_1 + 2v_1) + a_{2k+1}(u_1 + u_2 - 2v_2),\\
\varphi(u_1 - 2v_1 - u_2) &= \varepsilon(u_1 - 2v_1 - u_2),\\
\varphi(u_2 + 2v_2) &= \varepsilon(u_2 + 2v_2).
\end{aligned}$$

On en déduit

$$\begin{aligned}
\varphi(2u_1 - u_2) &= a_{2k-1}(u_1 + 2v_1) + a_{2k}(u_1 + u_2 - 2v_2) + \varepsilon(u_1 - 2v_1 - u_2),\\
\varphi(u_1 + 2u_2) &= a_{2k}(u_1 + 2v_1) + a_{2k+1}(u_1 + u_2 - 2v_2) + \varepsilon(u_2 + 2v_2),
\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}
\varphi(5u_1) &= 2a_{2k-1}(u_1 + 2v_1) + 2a_{2k}(u_1 + u_2 - 2v_2) + 2\varepsilon(u_1 - 2v_1 - u_2)\\
&\quad + a_{2k}(u_1 + 2v_1) + a_{2k+1}(u_1 + u_2 - 2v_2) + \varepsilon(u_2 + 2v_2)\\
&= (2a_{2k-1} + 3a_{2k} + a_{2k+1} + 2\varepsilon)u_1 + 2(2a_{2k-1} + a_{2k} - 2\varepsilon)v_1\\
&\quad + (2a_{2k} + a_{2k+1} - \varepsilon)u_2 - 2(2a_{2k} + a_{2k+1} - \varepsilon)v_2
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\varphi(5u_2) &= 2a_{2k}(u_1 + 2v_1) + 2a_{2k+1}(u_1 + u_2 - 2v_2) + 2\varepsilon(u_2 + 2v_2)\\
&\quad - a_{2k-1}(u_1 + 2v_1) - a_{2k}(u_1 + u_2 - 2v_2) - \varepsilon(u_1 - 2v_1 - u_2)\\
&= (a_{2k} + 2a_{2k+1} - a_{2k-1} - \varepsilon)u_1 + 2(2a_{2k} - a_{2k-1} + \varepsilon)v_1\\
&\quad + (2a_{2k+1} - a_{2k} + 3\varepsilon)u_2 - 2(2a_{2k+1} - a_{2k} - 2\varepsilon)v_2.
\end{aligned}$$

Une condition nécessaire et suffisante pour étendre φ est donc que tous ces coefficients soient divisibles par 5. Lorsque $k = 3$ et $\varepsilon = -1$, on vérifie que c'est possible ($a_5 = 5$, $a_6 = 8$, $a_7 = 13$; c'est la plus petite valeur positive de k pour laquelle c'est le cas).

Il existe donc une isométrie φ de $H^2(S, \mathbf{Z})$ qui vérifie $\varphi(h) = 5h + 8\ell$ et $\varphi(\ell) = 8h + 13\ell$ et qui agit par $-\mathrm{Id}$ sur $\mathrm{Pic}(S)^\perp$, donc en particulier sur $H^{2,0}(S)$. Elle préserve donc la structure de Hodge.

Le th. 2.6 et le fait que le réseau $\mathrm{Pic}(S)$ ne représente pas -2 entraînent que le cône ample de S est son cône positif, c'est-à-dire la composante de $\{x \in \mathrm{Pic}(S) \otimes \mathbf{R} \mid x^2 > 0\}$ qui est d'intersection positive avec h. Comme $h \cdot \varphi(h) = 36 > 0$, l'isométrie φ envoie la classe ample h sur une classe ample. Le théorème de Torelli entraîne qu'il existe un (unique) automorphisme σ de S qui agit par φ sur $H^2(S, \mathbf{Z})$ [4].

Montrons maintenant que σ est sans point base. Comme 1 n'est pas valeur propre de $\sigma^* = \varphi$, le lieu fixe de $\mathrm{Fix}(\sigma)$ ne contient pas de courbe. C'est donc

3. On vérifie sans mal que les isométries de ce réseau sont toutes de la forme $x \mapsto \pm\eta^{2k}x$ ou $x \mapsto \pm\eta^{2k}\overline{x}$, pour $k \in \mathbf{Z}$.

4. D'après **[FGGL]**, cet automorphisme σ était déjà connu de Schur en 1881. De plus, $\mathrm{Aut}(S) \simeq \mathbf{Z}$, engendré par σ.

un ensemble fini dont le cardinal peut être calculé par la formule de Lefschetz topologique (7)

$$\begin{aligned}\mathrm{Card}(\mathrm{Fix}(\sigma)) &= 2+\mathrm{Tr}(\sigma^*|_{H^2(S,\mathbf{Q})})\\ &= 2+\mathrm{Tr}(\sigma^*|_{\mathrm{Pic}(S)\otimes\mathbf{Q}})+\mathrm{Tr}(\sigma^*|_{\mathrm{Pic}(S)^\perp\otimes\mathbf{Q}})\\ &= 2+(5+13)-20=0.\end{aligned}$$

Le fait que σ est d'entropie $h(\sigma)$ positive est une conséquence de résultats de Gromov et Yomdim qui disent que $h(\sigma)$ est le logarithme du plus grand module des valeurs propres de σ^* (ici $\eta^6 = 9+4\sqrt{5}$) agissant sur $H^{1,1}(S,\mathbf{R})$. □

Remarque 4.4. Pour toute surface K3 S, le groupe $\mathrm{Aut}(S)$ est de type fini. La preuve utilise l'application injective Ψ_S définie en (8) ([**H1**, Corollary 15.2.4]).

Chapitre 5

Variétés hyperkählériennes

Nous allons expliquer dans ce chapitre comment les résultats précédents relatifs aux surfaces K3 se généralisent à leurs analogues en dimension supérieure, appelées variétés hyperkählériennes.

5.1. Définition et premières propriétés

DÉFINITION 5.1. *Une* variété hyperkählérienne *est une variété kählérienne compacte simplement connexe X telle que $H^0(X, \Omega_X^2) = \mathbf{C}\omega$, où ω est une 2-forme holomorphe sur X qui est non dégénérée en tout point (comme forme alternée sur l'espace tangent).*

Ces propriétés entraînent que le fibré canonique d'une variété hyperkählérienne X est trivial, que la dimension de X est paire et que le groupe abélien $H^2(X, \mathbf{Z})$ est libre [1]. Les variétés hyperkählériennes de dimension 2 sont les surfaces K3. Le résultat suivant découle de la classification des variétés kählériennes compactes de première classe de Chern nulle (*cf.* [**B2**]).

PROPOSITION 5.2. *Soit X une variété hyperkählérienne de dimension $2m$ et soit ω un générateur de $H^0(X, \Omega_X^2)$. Pour chaque $r \in \{0, \ldots, 2m\}$, on a*

$$H^0(X, \Omega_X^r) = \begin{cases} \mathbf{C}\omega^{\wedge(r/2)} & \textit{si } r \textit{ est pair ;} \\ 0 & \textit{si } r \textit{ est impair.} \end{cases}$$

En particulier, $\chi(X, \mathscr{O}_X) = m + 1$.

Contrairement aux surfaces K3, les variétés hyperkählériennes de dimension fixée $2m \geq 4$ n'ont pas toute le même type topologique. Les types possibles (et même les nombres de Betti possibles) ne sont pas connus et la finitude du nombre de types de déformation n'est pas non plus connue.

Un outil fondamental dans l'étude des variétés hyperkählériennes est la *forme de Beauville–Fujiki*, une forme quadratique q_X canonique sur le groupe abélien libre $H^2(X, \mathbf{Z})$, à valeurs entières et non divisible. Sa signature est $(3, b_2(X) - 3)$, elle est proportionnelle à la forme quadratique

$$x \longmapsto \int_X \sqrt{\mathrm{td}(X)}\, x^2$$

et elle vérifie

$$\forall x \in H^2(X, \mathbf{Z}) \qquad x^{2m} = c_X q_X(x)^m,$$

où c_X (la *constante de Fujiki*) est un nombre rationnel positif et $m := \frac{1}{2}\dim(X)$ (en dimension 2, q_X est bien sûr le cup-produit). De plus, on a $q_X(x) > 0$ pour toute classe de Kähler (par exemple ample) $x \in H^2(X, \mathbf{Z})$.

---

1. La simple connexité de X entraîne $H_1(X, \mathbf{Z}) = 0$, de sorte que la torsion de $H^2(X, \mathbf{Z})$ est nulle par le théorème des coefficients universels.

5.2. Exemples

Les variétés hyperkählériennes sont plus difficiles à construire que les surfaces K3. Cependant, des familles sont connues en chaque dimension (paire) : deux types de déformations, que nous décrivons ci-dessous, ont été découverts par Beauville ([**B1**, § 6 et 7]) et deux autres types (en dimensions 6 et 10) ont été trouvés plus tard par O'Grady ([**O1, O2**]).

5.2.1. Les puissances de Hilbert des surfaces K3. Soit S une surface K3 et soit m un entier positif. L'espace de Hilbert–Douady $S^{[m]}$ paramètre les sous-espaces analytiques de S de longueur m. C'est une variété complexe compacte lisse (Fogarty), kählérienne (Varouchas) de dimension $2m$ et Beauville a montré dans [**B1**, th. 3] que c'est une variété hyperkählérienne. Lorsque $m \geq 2$, il a aussi calculé la constante de Fujiki $c_{S^{[m]}} = \frac{(2m)!}{m!2^m}$ et le groupe de cohomologie

$$H^2(S^{[m]}, \mathbf{Z}) \simeq H^2(S, \mathbf{Z}) \oplus \mathbf{Z}\delta,$$

où 2δ est la classe du diviseur dans $S^{[m]}$ qui paramètre les sous-espaces non réduits. Cette décomposition est orthogonale pour la forme de Beauville $q_{S^{[m]}}$, qui se restreint en le cup-produit sur $H^2(S, \mathbf{Z})$ et vérifie $q_{S^{[m]}}(\delta) = -2(m-1)$. En particulier, on a

$$\begin{aligned} (H^2(S^{[m]}, \mathbf{Z}), q_{S^{[m]}}) &\simeq \Lambda_{\mathrm{K3}} \oplus \mathbf{Z}(-2(m-1)) \\ &\simeq U^{\oplus 3} \oplus E_8(-1)^{\oplus 2} \oplus \mathbf{Z}(-2(m-1)) =: \Lambda_{\mathrm{K3}^{[m]}}. \end{aligned} \tag{9}$$

Le deuxième nombre de Betti de $S^{[m]}$ est donc 23. C'est la valeur maximale possible pour toutes les variétés hyperkählériennes de dimension 4 ([**Gu**]) ou 6 ([**S**, Theorem 3]). Les nombres de Betti impairs de $S^{[m]}$ sont tous nuls.

La structure géométrique de $S^{[m]}$ est expliquée dans [**B1**, Section 6]. Elle est particulièrement simple lorsque $m = 2$: la variété $S^{[2]}$ est le quotient par l'involution qui échange les deux facteurs de l'éclatement de la diagonale dans S^2.

Enfin, tout fibré en droites M sur S induit un fibré en droites sur chaque $S^{[m]}$; on le note M_m.

5.2.2. Variétés de Kummer généralisées. Soit A un tore complexe de dimension 2. Il existe de nouveau sur l'espace de Hilbert–Douady $A^{[m+1]}$ une 2-forme holomorphe partout non dégénérée, mais il n'est pas simplement connexe. On considère le morphisme somme

$$\begin{aligned} A^{[m+1]} &\longrightarrow A \\ (a_1, \ldots, a_m) &\longmapsto a_1 + \cdots + a_m \end{aligned}$$

et l'image inverse $K_m(A)$ de $0 \in A$. Beauville a montré dans [**B1**, th. 4] que c'est une variété hyperkählérienne (de dimension $2m$). Quand $m = 1$, la surface $K_1(A)$ est isomorphe à l'éclatement de la surface $A/\pm 1$ en ses 16 points singuliers ; c'est la surface de Kummer de A. Pour cette raison, les $K_m(A)$ sont appelés variétés de Kummer généralisées. Lorsque $m \geq 2$, on a $c_{K_m(A)} = \frac{(2m)!(m+1)}{m!2^m}$ et il y a de nouveau une décomposition

$$H^2(K_m(A), \mathbf{Z}) \simeq H^2(A, \mathbf{Z}) \oplus \mathbf{Z}\delta$$

qui est orthogonale pour la forme de Beauville $q_{K_m(A)}$, avec $q_{K_m(A)}(\delta) = -2(m+1)$. Le deuxième nombre de Betti de $K_m(A)$ est donc 7 et

$$(H^2(K_m(A), \mathbf{Z}), q_{K_m(A)}) \simeq U^{\oplus 3} \oplus \mathbf{Z}(-2(m+1)) =: \Lambda_{K_m}.$$

Comme pour toutes les variétés hyperkählériennes, le premier nombre de Betti est nul, mais les nombres de Betti impairs ne sont pas tous nuls (on a par exemple $b_3(K_2(A)) = 8$).

5.3. Variétés hyperkählériennes de type $\mathrm{K3}^{[m]}$

Une variété hyperkählérienne X est dite *de type* $\mathrm{K3}^{[m]}$ (avec $m \geq 2$) si c'est une déformation lisse de la m-ième puissance de Hilbert d'une surface K3. Cela fixe la topologie de X, ses nombres de Hodge et sa forme de Beauville. On a en particulier

$$(H^2(X, \mathbf{Z}), q_X) \simeq \Lambda_{\mathrm{K3}^{[m]}} := U^{\oplus 3} \oplus E_8(-1)^{\oplus 2} \oplus \mathbf{Z}(-(2m-2)).$$

Comme pour les surfaces K3, la 2-forme non dégénérée ω induit un isomorphisme $T_X \xrightarrow{\sim} \Omega^1_X$. On a donc en particulier $h^0(X, T_X) = 0$ (le groupe des automorphismes de toute variété hyperkählérienne est discret), $h^2(X, T_X) = h^{1,2}(X) = 0$ et $h^1(X, T_X) = h^{1,1}(X) = b_2(X) - 2 = 21$. La théorie des déformations nous dit alors que X admet un espace de déformation local de dimension $h^1(X, T_X) = 21$. Comme les surfaces K3 ne dépendent que de 20 paramètres, une variété hyperkählérienne générale de type $\mathrm{K3}^{[m]}$ n'est pas isomorphe à la m-ième puissance de Hilbert d'une surface K3.

De la même façon qu'on avait donné dans le § 1.1 des descriptions géométriques des surfaces K3 *polarisées* (de bas degré), on voudrait donner des descriptions géométriques des variétés hyperkählériennes polarisées de type $\mathrm{K3}^{[m]}$, mais en les supposant *générales.*

La situation est un peu plus compliquée que dans le cas des surfaces K3 polarisées, où une polarisation était essentiellement définie (comme élément primitif de Λ_{K3}) par son carré, puisque tous les éléments primitifs de Λ_{K3} de même carré sont dans la même $O(\Lambda_{\mathrm{K3}})$-orbite. Ce n'est plus le cas pour le réseau non-unimodulaire $\Lambda_{\mathrm{K3}^{[m]}}$. On commence donc par une petite discussion de résultats élémentaires sur les réseaux.

5.3.1. Un peu plus de théorie des réseaux. On peut trouver une très bonne introduction à cette théorie dans le superbe livre [**Se**]. Le difficile article [**N**] contient des résultats plus avancés. Soit (L, q) un réseau. Son *groupe discriminant* est le groupe abélien fini

$$D(\Lambda) := \Lambda^\vee / \Lambda,$$

où

$$\Lambda \subset \Lambda^\vee := \mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}}(\Lambda, \mathbf{Z}) = \{x \in \Lambda \otimes \mathbf{Q} \mid \forall y \in \Lambda \quad x \cdot y \in \mathbf{Z}\} \subset \Lambda \otimes \mathbf{Q}.$$

Le réseau Λ est donc unimodulaire si et seulement si le groupe $D(\Lambda)$ est trivial.

Si x est un élément non nul de Λ, on définit sa divisibilité $\gamma(x)$ comme l'entier positif qui engendre le sous-groupe $x \cdot \Lambda$ de $\mathbf{Z}$. On considère aussi $x/\gamma(x)$, qui est un élément primitif (c'est-à-dire non nul et non divisible) de $\Lambda^\vee$, et sa classe $x_* = [x/\gamma(x)] \in D(\Lambda)$, un élément d'ordre $\gamma(x)$ dans le groupe $D(\Lambda)$.

Supposons maintenant que le réseau Λ *est pair.* On étend à $\Lambda \otimes \mathbf{Q}$, donc aussi à $\Lambda^\vee$, la forme quadratique en une forme quadratique à valeurs rationnelles. On définit alors une forme quadratique $\bar{q}\colon D(\Lambda) \to \mathbf{Q}/2\mathbf{Z}$ ainsi : soit $x \in \Lambda^\vee, y \in \Lambda$; alors $q(x+y) = q(x) + 2x \cdot y + q(y)$ ne dépend pas de y modulo $2\mathbf{Z}$. On peut donc poser

$$\bar{q}([x]) := q(x) \in \mathbf{Q}/2\mathbf{Z}.$$

Le *groupe orthogonal stable* $\widetilde{O}(\Lambda)$ est la noyau du morphisme canonique

$$O(\Lambda) \longrightarrow O(D(\Lambda), \bar{q}).$$

Ce morphisme est surjectif quand Λ est indéfini et que $\mathrm{rank}(\Lambda)$ est au moins le nombre minimal number de générateurs du groupe abélien fini $D(\Lambda)$ plus 2 ([**N**]).

Nous utiliserons le résultat suivant (*cf.* [**GHS2**, Lemma 3.5]) à plusieurs reprises. Quand Λ est pair et unimodulaire (et contient au moins deux copies orthogonales du plan hyperbolique U), il dit que la $O(\Lambda)$-orbite d'un vecteur primitif est déterminée par le carré de ce vecteur.

THÉORÈME 5.3 (Critère de Eichler). *Soit Λ un réseau pair qui contient au moins deux copies orthogonales du plan hyperbolique U. La $\widetilde{O}(\Lambda)$-orbite d'un élément primitif $x \in \Lambda$ est déterminée par l'entier $q(x)$ et l'élément x_* de $D(\Lambda)$.*

5.3.2. Espaces de modules de variétés hyperkählériennes polarisées de type $\mathrm{K3}^{[m]}$**.** Un *type de polarisation* est la donnée d'une $O(\Lambda_{\mathrm{K3}^{[m]}})$-orbite d'un élément primitif h de $\Lambda_{\mathrm{K3}^{[m]}}$ de carré strictement positif. Elle détermine certainement les entiers positifs $2n := h^2$ et la divisibilité $\gamma := \mathrm{div}(h)$ (qui divise $2n$ et $2m-2$) ; la réciproque n'est pas vraie en général, mais elle l'est quand $\gamma = 2$ ou quand $\mathrm{pgcd}(\frac{2n}{\gamma}, \frac{2m-2}{\gamma}, \gamma) = 1$ ([**GHS2**, Corollary 3.7 et Example 3.10]) donc par exemple quand $\mathrm{pgcd}(n, m-1)$ est sans carré et impair.

Je ne parlerai pas ici de la construction des espaces de modules ${}^m\mathscr{M}_\tau$ des variétés hyperkählériennes polarisées de type $\mathrm{K3}^{[m]}$ et de type de polarisation fixé τ, qui sont des variétés algébriques quasi-projectives (les étapes sont les mêmes que celles expliquées dans le § 3.4 pour les surfaces K3). Ces espaces ne sont pas toujours irréductibles mais le nombre de leurs composantes irréductibles est connu ([**A**, Corollary 2.4 et Proposition 3.1]). On a en particulier le résultat suivant.

THÉORÈME 5.4 (Gritsenko–Hulek–Sankaran, Apostolov). *Soient n et m des entiers vérifiant $m \geq 2$ et $n > 0$. L'espace de modules quasi-projectif ${}^m\mathscr{M}_{2n}^{(\gamma)}$ qui paramètre les variétés hyperkählériennes de type $\mathrm{K3}^{[m]}$ avec une polarisation de carré $2n$ et de divisibilité γ est irréductible de dimension 20 quand $\gamma = 1$, ou quand $\gamma = 2$ et $n + m \equiv 1 \pmod 4$.*

Lorsque la divisibilité est 1 ou 2 (les deux seuls cas possibles lorsque $m = 2$), on peut donc parler de variétés hyperkählériennes polarisées de type $\mathrm{K3}^{[m]}$ et de degré fixé *générales.*

5.4. Modèles projectifs des variétés hyperkählériennes

Dans ce paragraphe, on considère exclusivement des variétés hyperkählériennes X de type $\mathrm{K3}^{[m]}$ avec une polarisation H de divisibilité $\gamma \in \{1, 2\}$ et vérifiant $q_X(H) = 2n$ (c'est-à-dire que la paire (X, H) représente un point de l'espace de modules irréductible ${}^m\mathscr{M}_{2n}^{(\gamma)}$; le cas $\gamma = 2$ n'arrive que quand $n \equiv 3 \pmod 4$)). On veut savoir quand H est très ample (au moins pour (X, H) général dans ${}^m\mathscr{M}_{2n}^{(\gamma)}$) et décrire le plongement correspondant de X dans un espace projectif.

Il n'y a hélas pas de résultats connus aussi précis que ceux du th. 2.7 concernant les surfaces K3 et nous devrons nous limiter dans beaucoup de cas au cas d'une variété hyperkählérienne polarisée générale. Comme l'amplitude et la très amplitude sont des propriétés ouvertes, il suffit d'exhiber une variété hyperkählérienne polarisée (X, H) pour laquelle H est ample ou très ample pour en déduire la propriété analogue pour un élément général de son espace de module.

Il est naturel d'examiner la situation pour $X = S^{[m]}$, avec $S \subset \mathbf{P}^{e+1}$ surface K3 de degré $2e$, et divers fibrés en droites amples sur X. Il y a un morphisme

$$\varphi_2 \colon S^{[2]} \longrightarrow \mathrm{Gr}(2, e+2) \xhookrightarrow{\text{Plücker}} \mathbf{P}^{\binom{e+2}{2}-1}$$

qui envoie une paire de points sur la droite qu'ils engendrent dans $\mathbf{P}^{e+1}$. Si L est le fibré en droites sur S définissant le plongement $S \subset \mathbf{P}^{e+1}$, c'est le morphisme associé au fibré en droites $L_2 - \delta$ sur $S^{[2]}$ (avec les notations du § 5.2.1), de carré $2e-2$. C'est un morphisme fini (de sorte que $L_2 - \delta$ est ample) si et seulement si S ne contient pas de droite. C'est un plongement (de sorte que $L_2 - \delta$ est très ample) si et seulement si L est 2-*très ample*[2].

Plus généralement, si le fibré en droites L qui définit le plongement $S \subset \mathbf{P}^{e+1}$ est $(m-1)$-très ample, on peut définir un morphisme

$$\varphi_m \colon S^{[m]} \longrightarrow \mathrm{Gr}(m, e+2)$$

en envoyant un sous-espace de longueur m de S sur l'espace projectif qu'il engendre, et φ_m est un plongement si et seulement si L est m-très ample. Le tiré en arrière par φ_m de fibré en droites de Plücker sur la grassmannienne est de classe $L_m - \delta$ sur $S^{[m]}$ et de carré $2e - (2m-2)$.

On admettra le résultat suivant ([**BCNS**, Proposition 3.1]), qui étend le th. 2.7 lorsque le groupe de Picard est de rang 1.

Proposition 5.5. *Soit (S, L) une surface K3 avec $\mathrm{Pic}(S) \simeq \mathbf{Z}L$ et $L^2 = 2e$. Le fibré en droites $L^{\otimes a}$ est k-très ample si et seulement si soit $a = 1$ et $k \leq e/2$, soit $a \geq 2$ et $k \leq 2(a-1)e - 2$.*

Si on se restreint au cas $a = 1$ (resp. $a = 2$), la classe $aL_m - \delta$ est de divisibilité a et de carré $2(e-m+1)$ (resp. $2(4e-m+1)$) ; elle est donc très ample sur $S^{[m]}$ quand $e \geq 2m$ (resp. quand $e \geq (m+2)/2$).

Corollaire 5.6. *Soient m, n et γ des entiers tels que $m \geq 2$, $n > 0$ et $\gamma \in \{1, 2\}$. Soit (X, H) une variété hyperkählérienne polarisée de dimension $2m$ correspondant à un point général de l'espace de modules (irréductible) ${}^m\mathscr{M}_{2n}^{(\gamma)}$.*

— *Quand $\gamma = 1$, le fibré en droites H est sans point base quand $n \geq m-1$ et très ample quand $n \geq m+1$.*

— *Quand $\gamma = 2$, le fibré en droites H est très ample.*

Quand H est très ample, il définit un plongement

$$X \lhook\joinrel\longrightarrow \mathbf{P}^{\binom{n+m+1}{m}-1}.$$

Démonstration. Supposons $\gamma = 1$ (la preuve dans le cas $\gamma = 2$ est complètement similaire). Si (S, L) est une surface K3 polarisée de degré $2e$ très générale, la classe $L_m - \delta$ sur $S^{[m]}$ est de divisibilité 1 et de carré $2e - (2m-2) =: 2n$. Par la prop. 5.5, elle est sans point base quand $2(m-1) \leq e = n+m-1$ et très ample quand $2m \leq e = n+m-1$.

2. Un fibré en droites L sur S est m-très ample si, pour tout sous-schéma $Z \subset S$ de longueur $\leq m+1$, la restriction $H^0(S, L) \to H^0(Z, L|_Z)$ est surjective (de sorte que « 1-très ample » est la même chose que « très ample »).

Comme les propriétés d'être sans point base ou très ample sont ouvertes, elles sont encore satisfaites par une déformation générale de $(S^{[m]}, L_m - \delta)$, c'est-à-dire pour des éléments généraux de ${}^m\mathscr{M}_{2n}^{(1)}$. $\square$

Exemple 5.7 (Cas $m = 2$, $n = 1$, $\gamma = 1$). Une surface K3 polarisée (S, L) générale de degré 4 est une surface quartique dans $\mathbf{P}^3$. Des points Z_1 et Z_2 de $S^{[2]}$ ont même image par $\varphi_2 \colon S^{[2]} \to \mathrm{Gr}(2, 4)$ si et seulement s'ils engendrent la même droite. Si (S, L) est très générale, S ne contient pas de droite et φ_2 est fini de degré $\binom{4}{2}$ (de sorte que la classe $L_2 - \delta$ est ample, sans point base, de carré 2, mais pas très ample, sur $S^{[2]}$).

Exemple 5.8 (Cas $m = 2$, $n = 2$, $\gamma = 1$). Une surface K3 polarisée (S, L) générale de degré 6 est l'intersection d'une quadrique lisse Q et d'une cubique C dans $\mathbf{P}^4$. Deux points Z_1 et Z_2 de $S^{[2]}$ ont même image par $\varphi_2 \colon S^{[2]} \to \mathrm{Gr}(2, 5)$ si et seulement s'ils engendrent la même droite. Si $Z_1 \neq Z_2$, cette droite est dans Q. Inversement, si (S, L) est très générale, S ne contient pas de droite, toute droite contenue dans Q (et il y a un $\mathbf{P}^3$ de telles droites) rencontre C en 3 points et donne 3 points de $S^{[2]}$ identifiés par φ_2. Le morphisme φ_2 est donc fini et birationnel, mais n'est pas un plongement (de sorte que la classe $L_2 - \delta$ est ample, sans point base, de carré 4, mais pas très ample, sur $S^{[2]}$).

5.5. Variétés hyperkählériennes polarisées de dimension 4 de bas degré

Soit (X, H) une variété hyperkählérienne polarisée de dimension 4 correspondant à un point général de ${}^2\mathscr{M}_{2n}^{(\gamma)}$. Le fibré H est sans point base (cor. 5.6) et définit un morphisme

$$\varphi_H \colon X \longrightarrow \mathbf{P}^{\binom{n+3}{2}-1}$$

dont on peut essayer de décrire l'image pour n petit. Sauf peut-être quand $\gamma = 1$ et $n \in \{1, 2\}$, ce morphisme est un plongement (cor. 5.6).

On passe en revue quelques-uns des résultats connus (on rappelle que le cas $\gamma = 2$ n'arrive que quand $n \equiv 3 \pmod 4$).

$\mathbf{q(H) = 2}$. O'Grady a montré que pour (X, H) général dans ${}^2\mathscr{M}_2^{(1)}$, l'application $\varphi_H \colon X \to \mathbf{P}^5$ est un morphisme (comme prédit par le cor. 5.6) qui est un revêtement double ramifié d'une hypersurface sextique singulière appelée *sextique EPW* (pour Eisenbud–Popescu–Walter). Toute *double sextique EPW* est une variété hyperkählérienne de dimension 4 polarisée de degré 2. On a vu dans l'ex. 5.7 des exemples (non généraux) où le morphisme φ_H est de degré 6 sur la quadrique $\mathrm{Gr}(2, 4) \subset \mathbf{P}^5$.

$\mathbf{q(H) = 4}$. On ne connaît pas de description géométrique des éléments (X, H) généraux dans ${}^2\mathscr{M}_4^{(1)}$. En particulier, on ne sait pas si $\varphi_H \colon X \to \mathbf{P}^9$ est un plongement (c'est-à-dire si H est très ample). L'ex. 5.8 montre que φ_H est birationnel sur son image.

$\mathbf{q(H) = 6, \gamma = 1}$. On ne connaît pas de description géométrique de l'image du plongement $\varphi_H \colon X \to \mathbf{P}^{14}$ pour (X, H) général dans ${}^2\mathscr{M}_6^{(1)}$.

$\mathbf{q(H) = 6, \gamma = 2}$. Les éléments généraux (X, H) de ${}^2\mathscr{M}_6^{(2)}$ peuvent être décrits ainsi. Soit $W \subset \mathbf{P}^5$ une hypersurface cubique lisse. Beauville–Donagi ont montré dans **[BD]** que la famille $F(W) \subset \mathrm{Gr}(2, 6) \subset \mathbf{P}^{14}$ des droites contenues dans W est une variété hyperkählérienne de dimension 4 et que la polarisation de Plücker H est de carré 6 et de divisibilité 2. Les éléments généraux ${}^2\mathscr{M}_6^{(2)}$ sont de la forme $(F(W), H)$.

On a $h^0(X,H) = \binom{6}{2} = 15$, et φ_H est le plongement $F(W) \subset \mathrm{Gr}(2,6) \subset \mathbf{P}^{14}$; en particulier, H est très ample.

L'ex. 5.8 montre que les paires $(S^{[2]}, 2L_2 - \delta)$, où (S,L) est une surface K3 polarisée de degré 2, forment une hypersurface dans ${}^2\mathscr{M}_6^{(2)}$ pour laquelle $2L_2 - \delta$ n'est pas très ample. Cette hypersurface est donc disjointe de la famille des variétés des droites des cubiques de dimension 4 décrite plus haut.

Remarque 5.9. Il résulte de descriptions analogues pour n petit que les espaces de modules ${}^2\mathscr{M}_2^{(1)}$, ${}^2\mathscr{M}_6^{(2)}$, ${}^2\mathscr{M}_{22}^{(2)}$ et ${}^2\mathscr{M}_{38}^{(2)}$, sont unirationnels. Il est prouvé dans **[GHS2]** que ${}^2\mathscr{M}_{2n}^{(1)}$ est de type général pour tout $n \geq 12$.

Chapitre 6

L'application des périodes pour les variétés hyperkählériennes

6.1. Surjectivité de l'application des périodes

Soit Λ un réseau de signature $(3, b-3)$ tel qu'il existe une variété hyperkählérienne X pour laquelle Λ est le réseau $(H^2(X, \mathbf{Z}), q_X)$. On peut prendre par exemple pour Λ le réseau $\Lambda_{\mathrm{K3}^{[m]}}$ (avec $m \geq 2$ et $b = 23$) ou le réseau Λ_{K_m} (avec $m \geq 2$ et $b = 7$) (*cf.* § 5.2). Étant donnée une variété hyperkählérienne X et une isométrie $(H^2(X, \mathbf{Z}), q_X) \xrightarrow{\sim} \Lambda$, on peut définir, comme dans le § 3.1, la période de la variété hyperkählérienne marquée (X, φ) comme un point de la variété complexe

$$\Omega_\Lambda := \{[\omega] \in \mathbf{P}(\Lambda \otimes \mathbf{C}) \mid \omega \cdot \omega = 0,\ \omega \cdot \overline{\omega} > 0\}.$$

Comme dans le cas des surfaces K3, tous les points de Ω_Λ sont des périodes de variétés hyperkählériennes. Ce résultat est démontré dans [**H2**, Theorem 8.1].

Théorème 6.1 (Surjectivité de l'application des périodes pour les variétés hyperkählériennes). *Soit $[\omega] \in \Omega_\Lambda$. Il existe une variété hyperkählérienne X et une isométrie $\varphi\colon H^2(X, \mathbf{Z}) \xrightarrow{\sim} \Lambda$ telle que $\varphi(H^{2,0}(X)) = [\omega]$.*

On peut tirer de cet énoncé des conséquences analogues à celles démontrées pour les surfaces K3 dans le § 3.2.

6.2. Le théorème de Torelli

Le théorème de Torelli pour les variétés hyperkählériennes n'a été démontré que relativement récemment par Verbitsky ([**V**], [**H3**]). Il présente des différences importantes avec le théorème analogue pour les surfaces K3, provenant principalement du fait que des variétés hyperkählériennes peuvent être biméromorphiquement isomorphes sans être isomorphes. Or, si $\sigma\colon X \dashrightarrow X'$ est une application biméromorphe entre variétés hyperkählériennes, on montre ([**GHJ**, Section 27.1]) qu'elle induit une isométrie

$$\sigma^*\colon (H^2(X', \mathbf{Z}), q_{X'}) \xrightarrow{\sim} (H^2(X, \mathbf{Z}), q_X)$$

qui préserve les structures de Hodge (c'est-à-dire que $\sigma^*(H^{2,0}(X')) = H^{2,0}(X)$). Malheureusement, la réciproque (qui serait une forme faible de Torelli) n'est pas vraie en général : l'existence d'une isométrie de Hodge ne suffit pas à entraîner l'existence d'un isomorphisme birationnel entre les variétés.

Même si des énoncés généraux sont connus (*cf.* [**M**]), nous nous limiterons dans la suite, pour avoir des énoncés plus agréables, à des variétés hyperkählériennes qui sont de type $\mathrm{K3}^{[m]}$. Le théorème suivant est [**M**, Theorem 1.3(2), Lemma 9.2, Corollary 9.9] (voir aussi [**H3**, Corollary 6.5]).

Théorème 6.2 (Théorème de Torelli pour les variétés hyperkählériennes de type $\mathrm{K3}^{[m]}$). *Soit m un entier tel que $m-1$ soit une puissance d'un nombre premier. Des variétés hyperkählériennes X et X' de type* $\mathrm{K3}^{[m]}$ *sont birationnelllement isomorphes si et seulement s'il existe une isométrie*

$$\varphi\colon H^2(X',\mathbf{Z}) \xrightarrow{\sim} H^2(X,\mathbf{Z})$$

qui vérifie $\varphi_{\mathbf{C}}(H^{2,0}(X')) = H^{2,0}(X)$.

De plus, si l'image par $\varphi_{\mathbf{C}}$ d'une classe de Kähler sur X' est une classe de Kähler sur X, il existe un isomorphisme $\sigma\colon X \xrightarrow{\sim} X'$ *tel que $\varphi = \sigma^*$.*

Pour énoncer un théorème de Torelli sans l'hypothèse étrange sur m mais sous la forme de l'injectivité d'une application des périodes, nous nous limiterons comme dans le § 3.4 au cas polarisé. On fixe donc dans $\Lambda_{\mathrm{K3}^{[m]}}$ un type de polarisation τ, c'est-à-dire une $O(\Lambda_{\mathrm{K3}^{[m]}})$-orbite, et un élément h_τ de τ. On considère ensuite la variété complexe

$$\Omega_{h_\tau} := \{[\omega] \in \mathbf{P}(\Lambda_{\mathrm{K3}^{[m]}} \otimes \mathbf{C}) \mid \omega\cdot\omega = 0,\ \omega\cdot h_\tau = 0,\ \omega\cdot\overline{\omega} > 0\}.$$

La subtilité ici est que, contrairement à ce qu'on avait fait pour les surfaces K3 (*cf.* § 3.4), il ne faut pas, si on veut espérer obtenir l'injectivité de l'application des périodes, quotienter par le groupe $O(\Lambda_{\mathrm{K3}^{[m]}}, h_\tau) := \{\varphi \in O(\Lambda_{\mathrm{K3}^{[m]}})) \mid \varphi(h_\tau) = h_\tau\}$, mais par son sous-groupe

$$\widehat{O}(\Lambda_{\mathrm{K3}^{[m]}}, h_\tau) := \{\varphi \in O(\Lambda_{\mathrm{K3}^{[m]}}, h_\tau) \mid \varphi|_{D(\Lambda_{\mathrm{K3}^{[m]}})} = \pm\,\mathrm{Id}\}$$

(lorsque $m-1$ est une puissance d'un nombre premier, ces deux groupes sont les mêmes). Le quotient

$$\mathscr{P}_\tau := \widehat{O}(\Lambda_{\mathrm{K3}^{[m]}}, h_\tau)\backslash\Omega_{h_\tau}$$

est une variété algébrique quasi-projective irréductible de dimension 20.

Le théorème de Torelli prend maintenant la forme suivante ([**GHS3**, Theorem 3.14], [**M**, Theorem 8.4]).

Théorème 6.3 (Théorème de Torelli pour les variétés hyperkählériennes polarisées de type $\mathrm{K3}^{[m]}$). *Soit m un entier tel que $m \geq 2$ et soit τ un type de polarisation de $\Lambda_{\mathrm{K3}^{[m]}}$. La restriction de l'application des périodes*

$$\wp_\tau\colon {}^m\mathscr{M}_\tau \longrightarrow \mathscr{P}_\tau$$

à n'importe quel composante irréductible de ${}^m\mathscr{M}_\tau$ est un plongement ouvert.

Rappelons que lorsque la divisibilité de τ est 1 ou 2, l'espace ${}^m\mathscr{M}_\tau$ est irréductible et ne dépend que de l'entier pair h_τ^2 (th. 5.4).

Chapitre 7

Automorphismes des variétés hyperkählériennes

Soit X une variété hyperkählérienne. Contrairement à ce qui se passait pour les surfaces K3, le groupe $\mathrm{Bir}(X)$ des automorphismes biméromorphes de X et son sous-groupes $\mathrm{Aut}(X)$ peuvent être distincts. On peut étudier ces groupes via la représentation

$$\Psi_X\colon \mathrm{Bir}(X) \longrightarrow O(H^2(X,\mathbf{Z}),q_X) \tag{10}$$

(dont l'existence demande à être démontrée ; *cf.* [**GHJ**, Section 27.1]). Dans certains cas, le théorème de Torelli (th. 6.2) dit que l'image $\Psi_X(\mathrm{Aut}(X))$ consiste en les éléments de $O(H^2(X,\mathbf{Z}),q_X)$ qui respectent la droite $H^{2,0}(X)$ et envoient une classe de Kähler sur une classe de Kähler.

On a un analogue de la prop. 4.1.

Proposition 7.1. *Soit X une variété hyperkählérienne de type* $\mathrm{K3}^{[m]}$*. Tout automorphisme biméromorphe de X agissant trivialement sur $H^2(X,\mathbf{Z})$ est l'identité.*

Esquisse de démonstration. Si h est une classe de Kähler sur X et que σ est un automorphisme biméromorphe de X qui agit trivialement sur $\mathrm{Pic}(X)$, on a $\sigma^*(h) = h$ et on peut montrer que cela entraîne que σ est un automorphisme biholomorphe ([**H2**, Proposition 9.1]).

Quand X est un schéma de Hilbert ponctuel d'une surface K3, Beauville a montré que Ψ_X is injective ([**B2**, Proposition 10]). Il est d'autre part montré dans [**HT1**, Theorem 2.1] que le noyau de Ψ_X est invariant par déformations lisses. □

Comme dans le cas des surfaces K3, on peut utiliser le théorème de Torelli pour calculer les groupes d'automorphismes de certaines variétés hyperkählériennes.

Proposition 7.2. *Soit (X,H) une variété hyperkählérienne polarisée correspondant à un point très général d'une composante d'un espace de modules ${}^m\mathscr{M}_{2n}^{(\gamma)}$ (avec $m \geq 2$). Le groupe* $\mathrm{Bir}(X)$ *des automorphismes biméromorphes de X est trivial, sauf dans les cas*

— $n = 1$;

— $n = \gamma = m-1$ *et* -1 *est un carré modulo* $m-1$.

Dans chacun de ces cas, on a $\mathrm{Aut}(X) = \mathrm{Bir}(X) \simeq \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ *et l'involution correspondante de X est antisymplectique.*

Démonstration. On montre comme dans l'ex. 3.5 que $\mathrm{Pic}(X) = \mathbf{Z}H$. Un automorphisme biméromorphe laisse donc H invariant, donc est en particulier biholomorphe. Soit σ un automorphisme non trivial de X. Comme σ s'étend aux petites déformations de (X,H), la restriction de σ^* à $H^\perp$ est une homothétie [1]

1. L'argument est classique : soit X une variété hyperkählérienne, soit ω une forme symplectique sur X et soit σ un automorphisme de X ; écrivons $\sigma^*\omega = \xi\omega$, où $\xi \in \mathbf{C}^\star$. Supposons que

dont le rapport est, par [**B1**, Proposition 7], une racine de l'unité ; comme elle est réelle non triviale (puisque Ψ_X est injective par prop. 7.1), ce doit être -1. Nous allons étudier sous quelles conditions une telle isométrie de $\mathbf{Z}H \oplus H^\perp$ s'étend en une isométrie $\varphi \in \widehat{O}(H^2(X,\mathbf{Z}), q_X)$.

Choisissons une identification $H^2(X,\mathbf{Z}) \simeq \Lambda_{\mathrm{K3}^{[m]}}$ et écrivons, comme dans le § 5.3, $H = ax + b\delta$, où $a, b \in \mathbf{Z}$ sont premiers entre eux, x est primitif dans Λ_{K3}, et $\gamma := \operatorname{div}(H) = \operatorname{pgcd}(a, 2m-2)$. En utilisant le critère de Eichler, on peut écrire $x = u + cv$, où (u, v) est la base canonique d'un plan hyperbolique dans Λ_{K3} et $c = \frac{1}{2}x^2 \in \mathbf{Z}$. On a alors $\varphi(a(u+cv) + b\delta) = a(u+cv) + b\delta$ et

$$\varphi(u - cv) = -u + cv, \tag{11}$$

$$\varphi(b(2m-2)v + a\delta) = -b(2m-2)v - a\delta \tag{12}$$

(ces deux vecteurs sont dans $H^\perp$). De ces relations, on tire

$$(2a^2c - b^2(2m-2))\varphi(v) = 2a^2u + b^2(2m-2)v + 2ab\delta. \tag{13}$$

Cela entraîne que $2a^2c - b^2(2m-2)$, qui est égal à $H^2 = 2n$, divise $\operatorname{pgcd}(2a^2, b^2(2m-2)v, 2ab) = 2\operatorname{pgcd}(a, m-1)$. Comme H^2 est divisible par $2\operatorname{pgcd}(a, m-1)$, on obtient $n = \operatorname{pgcd}(a, m-1) \mid \gamma$ donc, puisque $\gamma \mid 2n$,

$$n \mid m-1 \qquad \text{et} \qquad \gamma \in \{n, 2n\}.$$

On vérifie qu'inversement, si ces conditions sont satisfaites, on peut définir une involution φ de $\Lambda_{\mathrm{K3}^{[m]}}$ qui vérifie $\varphi(H) = H$ et $\varphi|_{H^\perp} = -\operatorname{Id}_{H^\perp}$: on utilise (13) pour définir $\varphi(v)$, puis (11) pour définir $\varphi(u)$, et finalement (12) pour définir

$$\varphi(\delta) = -\frac{ab(2m-2)}{n}u - \frac{abc(2m-2)}{n}v - \frac{b^2(2m-2)+n}{n}\delta.$$

L'involution φ agit donc sur $D(H^2(X,\mathbf{Z})) = \mathbf{Z}/(2m-2)\mathbf{Z} = \langle \delta_* \rangle$ par multiplication par $-\frac{b^2(2m-2)+n}{n}$. Pour que φ soit dans $\widehat{O}(H^2(X,\mathbf{Z}), q_X)$, on doit avoir

— soit $-\frac{b^2(2m-2)+n}{n} \equiv -1 \pmod{2m-2}$, c'est-à-dire $n \mid b^2$; comme $n \mid a$ et $\operatorname{pgcd}(a, b) = 1$, cela est seulement possible quand $n = 1$;

— soit $-\frac{b^2(2m-2)+n}{n} \equiv 1 \pmod{2m-2}$, ce qui entraîne $m-1 \mid n$, donc $n = m-1$.

Quand les conditions

$$n \in \{1, m-1\} \qquad \text{and} \qquad \gamma \in \{n, 2n\} \tag{14}$$

sont vérifiées, φ agit sur $D(H^2(X,\mathbf{Z}))$ comme $-\operatorname{Id}$ dans le premier cas et comme Id dans le second cas (les relations $m-1 = n = a^2c - b^2(m-1)$ et $n \mid a$ entraînent $b^2 \equiv -1 \pmod{m-1}$). Par le théorème de Torelli [2], φ est induit par une involution de X.

Enfin, on utilise les conditions sur m, γ et n données dans [**A**, Proposition 3.1] pour montrer que quand (14) est vérifié, l'espace de modules ${}^m\mathscr{M}_{2n}^{(\gamma)}$ est vide sauf dans les cas indiqués dans la proposition. □

(X, σ) se déforme le long d'une sous-variété de l'espace des modules ; l'image de cette sous-variété par l'application des périodes consiste en des points qui sont des vecteurs propres pour l'action de σ^* sur $H^2(X,\mathbf{C})$ et la valeur propre est nécessairement ξ. Dans notre cas, l'espace engendré par l'image de l'application des périodes est $H^\perp$, qui est donc contenu dans l'espace propre $H^2(X,\mathbf{C})_\xi$.

2. Dans une version qu'on n'a pas donnée qui généralise le th. 6.2 au cas m quelconque.

REMARQUE 7.3. Quand $m = 2$ et $n = 1$, l'involution est l'involution canonique sur les double sextiques EPW et le morphisme $\varphi_H \colon X \to \mathbf{P}^5$ se factorise à travers le quotient de X par cette involution suivi par le plongement canonique de la sextique EPW (*cf.* § 5.5).

Le cas du nombre de Picard 2 est de nouveau en général plus riche (*cf.* [**Og2**]), bien que ce ne soit pas vraiment le cas lorsque $X = S^{[m]}$, où S est une surface K3 projective de nombre de Picard 1 : on peut montrer que le groupe $\mathrm{Bir}(X)$ est alors de cardinal 1, 2 ou 4. Donnons deux exemples d'involutions birationnelles non triviales.

EXEMPLE 7.4 (L'involution de Beauville). Soit $S \subset \mathbf{P}^{e+1}$ une surface K3 de degré $2e \geq 4$. En envoyant un point général $Z \in S^{[e]}$ sur l'intersection résiduelle $(\langle Z\rangle \cap S) \smallsetminus Z$, on définit une involution birationelle σ de $S^{[e]}$; elle est birégulière si et seulement si $e = 2$ et que S ne contient aucune droite ([**B2**, Section 6]).

Quand $\mathrm{Pic}(S) \simeq \mathbf{Z}$ (de sorte que S ne contient pas de droite), on peut montrer que $\mathrm{Bir}(S^{[e]}) = \{\mathrm{Id}, \sigma\}$.

EXEMPLE 7.5 (L'involution de O'Grady). Une surface K3 S polarisée générale de degré 10 est l'intersection transverse de la grassmannienne $\mathrm{Gr}(2, \mathbf{C}^5) \subset \mathbf{P}(\bigwedge^2 \mathbf{C}^5) = \mathbf{P}^9$, d'une quadrique $Q \subset \mathbf{P}^9$ et d'un $\mathbf{P}^6 \subset \mathbf{P}^9$ (rem. 2.10). Un point général de $S^{[2]}$ correspond à $V_2, W_2 \subset V_5$. Alors,

$$\mathrm{Gr}(2, V_2 \oplus W_2) \cap S = \mathrm{Gr}(2, V_2 \oplus W_2) \cap Q \cap \mathbf{P}^6 \cap \textstyle\bigwedge^2 (V_2 \oplus W_2)) \subset \mathbf{P}^2$$

est l'intersection de deux coniques générales dans $\mathbf{P}^2$, donc consiste en 4 points. L'involution (birationnelle) de O'Grady $\sigma \colon S^{[2]} \dashrightarrow S^{[2]}$ envoie la paire de points $([V_2], [W_2])$ sur les deux points résiduels de cette intersection. Quand $\mathrm{Pic}(S) \simeq \mathbf{Z}$, on peut montrer que $\mathrm{Bir}(S^{[2]}) = \{\mathrm{Id}, \sigma\}$.

Il existe cependant des cas intéressants (dont certains ont été étudiés géométriquement ; *cf.* [**HT2**]) avec $\rho(X) = 2$ où les groupes $\mathrm{Aut}(X)$ et $\mathrm{Bir}(X)$ sont infinis (isomorphes à $\mathbf{Z}$ ou $\mathbf{Z} \rtimes \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$, puisque $O(H^2(X, \mathbf{Z}), q_X) \simeq \mathbf{Z} \rtimes \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$).

REMARQUE 7.6. Soit X une variété hyperkählérienne. Oguiso a montré dans [**Og3**] et [**Og4**] que *lorsque X n'est pas projective,* les deux groupes $\mathrm{Aut}(X)$ and $\mathrm{Bir}(X)$ sont presque abéliens de type fini. Quand X est projective, le groupe $\mathrm{Bir}(X)$ est encore de type fini ([**BS**]) mais on ne sait pas si le groupe $\mathrm{Aut}(X)$ l'est aussi.

Bibliographie

[A] Apostolov, A., Moduli spaces of polarized irreducible symplectic manifolds are not necessarily connected, *Ann. Inst. Fourier* **64** (2014), 189–202.

[BHPV] Barth, W., Hulek, K., Peters, C., Van de Ven, A., *Compact complex surfaces,* Second edition, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete **4**, Springer-Verlag, Berlin, 2004.

[B1] Beauville, A., Variétés Kählériennes dont la première classe de Chern est nulle, *J. Differential Geom.* **18** (1983), 755–782.

[B2] ———, Some remarks on Kähler manifolds with $c_1 = 0$. *Classification of algebraic and analytic manifolds (Katata, 1982)*, 1–26, Progr. Math., **39**, Birkhaüser Boston, Boston, MA, 1983.

[BD] Beauville, A., Donagi, R., La variété des droites d'une hypersurface cubique de dimension 4, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* **301** (1985), 703–706.

[BCNS] Boissière, S., Cattaneo, A., Nieper-Wißkirchen, M., Sarti, A., The automorphism group of the Hilbert scheme of two points on a generic projective K3 surface, in *Proceedings of the Schiermonnikoog conference, K3 surfaces and their moduli,* Progress in Mathematics **315**, Birkhäuser, 2015.

[BS] Boissière, S., Sarti, A., A note on automorphisms and birational transformations of holomorphic symplectic manifolds, *Proc. Amer. Math. Soc.* **140** (2012), 4053–4062.

[FGGL] Festi, D., Garbagnati, A., van Geemen, B., van Luijk, R., The Cayley–Oguiso free automorphism of positive entropy on a K3 surface, *J. Mod. Dyn.* **7** (2013), 75–96.

[F] Fujiki, A., On automorphism groups of compact Kähler manifolds, *Invent. Math.* **44** (1978), 225–258.

[GHS1] Gritsenko, V., Hulek, K., Sankaran, G.K., The Kodaira dimension of the moduli of K3 surfaces, *Invent. Math.* **169** (2007), 519–567.

[GHS2] ———, Moduli spaces of irreducible symplectic manifolds, *Compos. Math.* **146** (2010), 404–434.

[GHS3] ———, Moduli of K3 surfaces and irreducible symplectic manifolds, *Handbook of moduli.* Vol. I, 459–526, Adv. Lect. Math. (ALM) **24**, Int. Press, Somerville, MA, 2013.

[GHJ] Gross, M., Huybrechts, D., Joyce, D., *Calabi-Yau manifolds and related geometries*, Lectures from the Summer School held in Nordfjordeid, June 2001. Universitext, Springer-Verlag, Berlin, 2003.

[Gu] Guan, D., On the Betti numbers of irreducible compact hyperkähler manifolds of complex dimension four, *Math. Res. Lett.* **8** (2001), 663–669.

[HT1] Hassett, B., Tschinkel, Yu., Hodge theory and Lagrangian planes on generalized Kummer fourfolds, *Mosc. Math. J.* **13** (2013), 33âĂŞ-56.

[HT2] ———, Flops on holomorphic symplectic fourfolds and determinantal cubic hypersurfaces, *J. Inst. Math. Jussieu* **9** (2010), 125–153.

[H1] Huybrechts, D., Lectures on K3 surfaces, Cambridge Studies in Advanced Mathematics **158**, Cambridge University Press, 2016.

[H2] ———, Compact hyperkähler manifolds : basic results, *Invent. Math.* **135** (1999), 63–113.

[H3] ———, A global Torelli theorem for hyperkähler manifolds [after M. Verbitsky], Séminaire Bourbaki, Exp. No. 1040, Juin 2011, Astérisque **348** (2012), 375–403.

[M] Markman, E., A survey of Torelli and monodromy results for holomorphic-symplectic varieties, in *Complex and differential geometry,* 257–322, Springer Proc. Math. **8**, Springer, Heidelberg, 2011.

[Mu1] Mukai, S., Curves, K3 surfaces and Fano 3-folds of genus ≤ 10, in *Algebraic geometry and commutative algebra, Vol. I,* 357–377, Kinokuniya, Tokyo, 1988.

[Mu2] ———, Biregular classification of Fano 3-folds and Fano manifolds of coindex 3, *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.* **86** (1989), 3000–3002.

[Mu3] ———, Curves and K3 surfaces of genus eleven, in *Moduli of vector bundles (Sanda, 1994 ; Kyoto, 1994),* 189–197, Lecture Notes in Pure and Appl. Math. **179**, Dekker, New York, 1996.

[Mu4] ———, Polarized K3 surfaces of genus 18 and 20, in *Complex projective geometry (Trieste, 1989/Bergen, 1989),* 264–276, London Math. Soc. Lecture Note Ser. **179**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1992.

[Mu5] ———, Polarized K3 surfaces of genus thirteen, in *Moduli spaces and arithmetic geometry,* 315–326, Adv. Stud. Pure Math. **45**, Math. Soc. Japan, Tokyo, 2006.

[Mu6] ———, K3 surfaces of genus sixteen, in *Minimal models and extremal rays (Kyoto, 2011),* 379–396, Adv. Stud. Pure Math. **70**, Math. Soc. Japan, 2016.

[N] Nikulin, V., Integral symmetric bilinear forms and some of their geometric applications, *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.* **43** (1979), 111–177. English transl. : *Math. USSR Izv.* **14** (1980), 103–167.

[O1] O'Grady, K., Desingularized moduli spaces of sheaves on a K3, *J. reine angew. Math.* **512** (1999), 49–117.

[O2] ———, A new six-dimensional irreducible symplectic variety, *J. Algebraic Geom.* **12** (2003), 435–505.

[Og1] Oguiso K., Free Automorphisms of Positive Entropy on Smooth Kähler Surfaces, in *Algebraic geometry in East Asia, Taipei 2011,* 187–199, Adv. Stud. Pure Math. **65**, Math. Soc. Japan, Tokyo, 2015.

[Og2] ———, Automorphism groups of Calabi–Yau manifolds of Picard number two, *J. Algebraic Geom.* **23** (2014), 775–795.

[Og3] ———, Tits alternative in hyperkähler manifolds, *Math. Res. Lett.* **13** (2006), 307–316.

[Og4] ———, Bimeromorphic automorphism groups of non-projective hyperkähler manifolds—a note inspired by C. T. McMullen, *J. Differential Geom.* **78** (2008), 163–191.

[SD] Saint-Donat, B., Projective models of K3 surfaces, *Amer. J. Math.* **96** (1974), 602–639.

[S] Sawon, J., A bound on the second Betti number of hyperkähler manifolds of complex dimension six, eprint `arXiv:1511.09105`.

[Se] Serre, J.-P., *Cours d'arithmétique,* P.U.F., Paris, 1970.

[Si] Siu, Y.-T., Every K3 surface is Kähler, *Invent. Math.* **73** (1983), 139–150.

[V] Verbitsky, M., Mapping class group and a global Torelli theorem for hyperkähler manifolds. Appendix A by Eyal Markman, *Duke Math. J.* **162** (2013), 2929–2986.

[Vi] Viehweg, E., Weak positivity and the stability of certain Hilbert points. III, *Invent. Math.* **101** (1990), 521–543.