

# Généralités sur les anneaux (TD1)

FIMFA Algèbre 2 (Tony Ly), Février 2012

## Exercice 1

Soient  $A$  un anneau commutatif unitaire et  $I$  un idéal.

- Montrer que les idéaux de  $A/I$  sont en bijection avec les idéaux de  $A$  contenant  $I$ .
- Montrer que les idéaux premiers (resp. maximaux) de  $A/I$  sont en bijection avec les idéaux premiers (resp. maximaux) de  $A$  contenant  $I$ .
- Soit  $J \supseteq I$  un idéal de  $A$ . Montrer que  $A/J$  est canoniquement isomorphe au quotient de  $A/I$  par  $J/I$ .

On va considérer les exemples des anneaux suivants :

$$\mathbb{C}[X], \quad \mathbb{R}[X]/(X^2 + X + 1), \quad \mathbb{R}[X]/(X^3 - 6X^2 + 11X - 6), \quad \mathbb{R}[X]/(X^4 - 1).$$

- Déterminer les idéaux premiers de ces anneaux.
- Déterminer les morphismes de  $\mathbb{R}$ -algèbres de ces anneaux dans  $\mathbb{R}$  (resp. dans  $\mathbb{C}$ ).

## Exercice 2

Soient  $A$  et  $B$  deux anneaux commutatifs unitaires, et  $f : A \rightarrow B$  un morphisme d'anneaux.

- Montrer que l'image réciproque par  $f$  d'un idéal premier de  $B$  est un idéal premier de  $A$ .
- Que se passe-t-il pour les idéaux maximaux ?

Soient  $I$  et  $J$  deux idéaux de  $A$ .

- Montrer que l'on a  $IJ \subseteq I \cap J$ . A-t-on toujours égalité ?

## Exercice 3

Soit  $X$  un sous-ensemble compact de  $\mathbb{R}^n$ . On note  $C(X, \mathbb{R})$  l'anneau des fonctions continues sur  $X$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$ .

- Déterminer les idéaux maximaux de  $C(X, \mathbb{R})$ .

On munit  $C(X, \mathbb{R})$  de la topologie de la convergence uniforme.

- Montrer que tout idéal premier est contenu dans un unique idéal maximal et qu'il y est dense.  
On pourra utiliser des partitions de l'unité.
- Donner un exemple d'idéal premier non maximal.

## Exercice 4

Soit  $A$  un anneau commutatif unitaire.

- On suppose  $A$  intègre et que  $A$  possède un nombre fini d'idéaux. Montrer que  $A$  est un corps.
- On suppose que  $A$  possède un nombre fini d'idéaux. Montrer que tout idéal premier de  $A$  est maximal.
- On suppose que tout idéal propre de  $A$  est premier. Montrer que  $A$  est un corps.

## Exercice 5

Soit  $k$  un corps. On note  $A$  le sous-anneau de  $M_2(k)$  composé des matrices triangulaires supérieures.

- Déterminer les éléments nilpotents et les éléments inversibles de  $A$ .
- Déterminer les idéaux bilatères de  $A$ , ainsi que les quotients correspondants.

### Exercice 6

Soit  $k$  un corps. On note  $k[[X]] = \{ \sum_{i \geq 0} a_i X^i \mid a_i \in k \text{ pour tout } i \geq 0 \}$  l'anneau des séries formelles en  $X$  à coefficients dans  $k$ .

- Montrer que  $k[[X]]$  possède un unique idéal maximal, engendré par  $X$ .
- En déduire que  $k[[X]]$  est principal, puis qu'il est euclidien.

### Exercice 7

Soit  $A$  un anneau commutatif unitaire.

- Montrer que si  $A$  n'est pas un corps, alors  $A[X]$  n'est pas principal.
- Montrer que  $\mathbb{Z}[X]$  est factoriel, c'est-à-dire qu'il est intègre et que tout élément  $t \in \mathbb{Z}[X]$  possède une décomposition finie  $t = u \prod_i p_i$  avec  $u \in \mathbb{Z}[X]^\times$  et les  $p_i$  irréductibles, unique à permutations des termes et multiplications par des inversibles près.

### Exercice 8 (Théorème des deux carrés)

On considère  $\mathbb{Z}[i]$  l'anneau des entiers de Gauss, et on note  $\Sigma = \{a^2 + b^2 \mid a, b \in \mathbb{N}\}$ .

- En introduisant l'application norme

$$\begin{aligned} N : \quad \mathbb{Z}[i] &\rightarrow \mathbb{Z} \\ a + ib &\mapsto (a + ib)(a - ib) \end{aligned}$$

déterminer les éléments inversibles de  $\mathbb{Z}[i]$ .

- Montrer que  $\Sigma$  est stable par multiplication.
- Montrer que  $\mathbb{Z}[i]$  est euclidien.

Soit  $p$  un nombre premier.

- Montrer que  $p$  est un élément de  $\Sigma$  si et seulement si  $p$  n'est pas irréductible dans  $\mathbb{Z}[i]$ .
- En utilisant l'isomorphisme d'anneaux  $\mathbb{Z}[i]/p\mathbb{Z}[i] \simeq \mathbb{F}_p[X]/(X^2 + 1)$ , montrer que  $p$  est un élément de  $\Sigma$  si et seulement si on a  $p = 2$  ou  $p \equiv 1 \pmod{4}$ .

Soient  $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$  et  $\prod_p p^{v_p(n)}$  sa décomposition en facteurs premiers.

- Montrer que  $n$  est un élément de  $\Sigma$  si et seulement si  $v_p(n)$  est pair pour tout premier  $p \equiv 3 \pmod{4}$ .

### Exercice 9

Soit  $R$  un anneau euclidien qui n'est pas un corps.

- Montrer que l'on peut trouver un élément non inversible  $x$  de  $R$  tel que la restriction à  $R^\times \cup \{0\}$  de la projection canonique de  $R$  sur  $R/(x)$  soit surjective. On pourra choisir  $x$  tel que  $\phi(x)$  soit minimal parmi les éléments  $x \notin R^\times$ , où  $\phi$  désigne le stathme d'une division euclidienne de  $R$ .

Soient  $\alpha = \frac{1 + i\sqrt{19}}{2}$  et  $A = \mathbb{Z}[\alpha]$ .

- En s'inspirant de 8.(a), déterminer  $A^\times$ .
- Montrer que  $A$  n'est pas euclidien.
- Si  $a, b \in A \setminus \{0\}$ , montrer qu'il existe  $q, r \in A$  tels que  $r = 0$  ou  $|r| < |b|$  et qui vérifient, soit  $a = bq + r$ , soit  $2a = bq + r$ .
- Montrer que l'idéal engendré par 2 dans  $A$  est maximal.
- Montrer que  $A$  est un anneau principal.

### Exercice 10 (Résultant de Sylvester)

Soient  $k$  un corps et  $P, Q \in k[X]$  des polynômes de degré respectif  $p$  et  $q$ . On appelle *résultant* de  $P$

et  $Q$ , que l'on note  $\mathcal{R}(P, Q)$  le déterminant de l'application  $\begin{array}{ccc} k_{q-1}[X] \times k_{p-1}[X] & \rightarrow & k_{p+q-1}[X] \\ (A, B) & \mapsto & AP + BQ \end{array}$ .

- A quelle condition a-t-on  $\mathcal{R}(P, Q) = 0$ ?
- En déduire que l'ensemble des nombres algébriques sur  $\mathbb{Q}$  est un corps.