Olivier Debarre

TORES ET VARIÉTÉS ABÉLIENNES COMPLEXES

Olivier Debarre

Institut de Recherche Mathématique Avancée, Université Louis Pasteur et CNRS,
7 rue René Descartes, 67084 Strasbourg Cédex, France.

E-mail : debarre@math.u-strasbg.fr

Url : http://www-irma.u-strasbg.fr/˜debarre

***Classification mathématique par sujets* (2000). —** 14-01, 14K20, 14K25, 14H52, 18F20, 32C10, 32C17, 32C18, 32G13 55N10, 55N30, 55Q52, 58A10, 58A12.

***Mots clefs*. —** Tore complexe, variété abélienne, fonction thêta, espace de modules, théorème de Riemann–Roch, thêtaconstante (ou thetanull).

TORES ET VARIÉTÉS ABÉLIENNES COMPLEXES

Olivier Debarre

***Résumé.* —** Un des buts de ce livre est d'initier le lecteur à des aspects modernes de la géométrie analytique et algébrique complexe à travers la théorie classique des tores complexes et des variétés abéliennes. Partant des courbes elliptiques complexes, on passe ensuite au cas de la dimension supérieure, en caractérisant de plusieurs points de vue les tores complexes qui sont des variétés abéliennes, c'est-à-dire qui se plongent de façon holomorphe dans un espace projectif. On démontre des théorèmes classiques sur les variétés abéliennes et on passe en revue la construction de leurs espaces de modules. Le dernier chapitre contient des résultats nouveaux sur la géométrie et la topologie de certaines sous-variétés d'un tore complexe.

***Abstract* (Complex Tori and Abelian Varieties). —** This book takes the classical theory of complex tori and complex abelian varieties as an excuse to go through more modern aspects of complex algebraic and analytic geometry. Starting with complex elliptic curves, it moves on to the higher-dimensional case, giving characterizations from different points of view of those complex tori which are abelian varieties, i.e. which can be holomorphically embedded in a projective space. Standard theorems about abelian varieties are proved, and moduli spaces are discussed. The last chapter includes new results on the geometry and topology of some subvarieties of a complex torus.

TABLE DES MATIÈRES

INTRODUCTION

Ce livre est une version étoffée d'un cours de D.E.A. donné à l'Université Louis Pasteur au printemps 1997, dont le but était d'offrir une introduction à la théorie classique des tores complexes qui soit la plus élémentaire possible, un peu dans l'esprit du livre [**SD**], tout en présentant en parallèle un point de vue plus « moderne », ce qui permet d'une part d'éclairer les calculs des mathématiciens du XIXe siècle, d'autre part de familiariser le lecteur avec des théories plus récentes (faisceaux, classes de Chern, cohomologie, etc.). Les tores complexes sont idéaux de ce point de vue : on peut faire tous les calculs « à la main », sans que la théorie soit totalement triviale. Les connaissances demandées au lecteur sont donc très limitées ; il devrait pouvoir lire les chapitres I à VI en sachant simplement ce que sont une variété et une fonction holomorphe. Les deux derniers chapitres, qui n'ont pas été abordés dans le cours proprement dit, sont d'accès peut-être plus difficile : l'avant-dernier parce qu'il est assez technique, le dernier parce qu'il nécessite quelques connaissances (très élémentaires) de géométrie analytique (ou algébrique) complexe. Je n'ai cependant pas du tout cherché ni à écrire un texte « auto-suffisant », n'hésitant au contraire pas à interpréter (souvent en note de bas de page) certains des résultats dans le cadre de théories plus vastes mais inutiles au bon déroulement logique du livre, ni à fournir partout des démonstrations complètes. Chaque chapitre est suivi d'un nombre variable d'exercices.

Après un court premier chapitre consacré à des résultats élémentaires sur les réseaux, on passe dans le chapitre II à la théorie analytique classique des courbes elliptiques complexes : définition et propriétés de la fonction $\wp$ de Weierstrass, réalisation des courbes elliptiques comme cubiques planes, définition des fonctions thêta, des diviseurs et du groupe de Picard d'une courbe elliptique. On termine par la construction d'un espace de modules pour les courbes elliptiques, en expliquant comment l'ensemble de leurs classes d'isomorphisme peut être paramétré, via l'invariant modulaire j, par la droite complexe. Ce panorama rapide permet d'expliquer dans un cadre simple beaucoup des questions (mais pas toutes !) traitées dans la suite du livre pour les tores complexes de dimension quelconque.

On aborde dans le chapitre III une des questions centrales de ce livre : à quelle condition un tore complexe admet-il un plongement [1] holomorphe dans un espace projectif ? On explique d'abord une condition nécessaire, valable d'ailleurs pour toute variété complexe :

1. Nous utilisons la terminologie habituelle : un plongement est une application $X \to \mathbf{P}^n$ qui induit un isomorphisme de variétés complexes entre X et son image.

l'existence d'une forme de Kähler entière sur la variété. C'est le prétexte à une introduction rapide à la cohomologie de de Rham et à sa description pour les espaces projectifs et surtout pour les tores complexes, cas dans lequel une forme de Kähler entière admet une description extrêmement concrète en termes du réseau associé.

On examine dans le chapitre IV la même question, mais d'un point de vue très classique, en se limitant ce coup-ci uniquement aux tores complexes. L'idée est de montrer que tout morphisme d'un tore complexe vers un espace projectif est donné par des fonctions d'un type très particulier, dites fonctions thêta. C'est l'occasion de parler de diviseurs sur une variété complexe, le point essentiel étant de construire, pour tout diviseur effectif sur un tore complexe, une fonction thêta dont il est le diviseur (nous admettons certains des rudiments de la théorie des diviseurs, en partie le fait que l'anneau des germes de fonctions holomorphes sur une variété complexe est factoriel). On retrouve ainsi le fait qu'un tore complexe admettant un plongement holomorphe dans un espace projectif possède une forme de Kähler entière, en obtenant un résultat général plus précis : toute application holomorphe d'un tore complexe X vers un espace projectif se factorise à travers un tore quotient de X appelé « abélianisé de X », qui, lui, admet une forme de Kähler entière. Toutes les fonctions méromorphes et tous les diviseurs de X proviennent de son abélianisé (cor. IV.3.6, p. 45).

On fait le lien dans le chapitre V entre les approches des deux chapitres précédents en définissant les fibrés en droites sur une variété complexe. Un bref survol (sans démonstration) de la théorie des faisceaux et de leur cohomologie nous permet de définir la première classe de Chern d'un fibré en droites de façon cohomologique comme une application du groupe de Picard vers le second groupe de cohomologie entière. On explique aussi comment calculer la première classe de Chern réelle à l'aide d'une métrique hermitienne. La plupart de ces résultats ne sont pas essentiels pour la suite. Ils nous permettent cependant de déterminer tous les fibrés en droites sur un tore complexe (théorème d'Appell-Humbert V.5.10, p. 62). Le lien entre les approches précédentes est alors clair : à toute application holomorphe u d'un tore complexe X vers un espace projectif $\mathbf{P}W$ est associé un fibré en droites L sur X, à savoir l'image inverse du fibré $\mathscr{O}_{\mathbf{P}W}(1)$ par u. Lorsque u réalise un isomorphisme sur son image, la forme de Kähler entière sur X construite dans le chapitre III représente l'image inverse par u de la première classe de Chern réelle de $\mathscr{O}_{\mathbf{P}W}(1)$, tandis que celle construite dans le chapitre IV représente la première classe de Chern de L : elles coïncident.

On étudie dans le chapitre VI la réciproque de la question posée plus haut : un tore complexe admettant une forme de Kähler entière peut-il se plonger dans un espace projectif ? La réponse est bien sûr affirmative pour toutes les variétés complexes compactes (c'est le célèbre théorème de Kodaira), mais on peut démontrer ce résultat « à la main » dans le cas des tores complexes, en construisant explicitement un tel plongement à l'aide des fonctions thêta de Riemann. On démontre tout d'abord les conditions de Riemann, qui caractérisent concrètement, en termes du réseau associé, les tores complexes sur lesquels existe une forme de Kähler entière. Le phénomène nouveau par rapport à la dimension 1 est que « la plupart » des tores complexes ne vérifient pas ces conditions en dimension > 1 (leur abélianisé est nul). On démontre ensuite le théorème de Riemann–Roch dans le cas d'un fibré en droites ample sur un tore complexe (c'est-à-dire que l'on calcule la dimension de l'espace de ses sections). Le théorème de Lefschetz s'en déduit, qui montre qu'un tel fibré en droites (qui existe sur un tore complexe satisfaisant aux conditions de Riemann) permet de construire un plongement holomorphe du tore dans un espace projectif. On a ainsi complètement répondu à la question initiale, en obtenant une condition nécessaire et suffisante sur un réseau pour que le tore complexe associé se réalise comme sous-variété d'un espace projectif. Par le fameux théorème de Chow, une telle sous-variété est alors algébrique, c'est-à-dire qu'elle est définie par des équations polynomiales (homogènes). C'est ce que l'on appelle une variété abélienne complexe.

Ce chapitre se termine par quelques constructions classiques sur les tores complexes : dualité, dimension de l'espace des sections d'un fibré en droites quelconque, polarisation sur une variété abélienne, théorème de réductibilité de Poincaré pour les variétés abéliennes, description (rapide) de l'algèbre des endomorphismes rationnels d'une variété abélienne, involution de Rosati. On montre que le corps des fonctions méromorphes sur un tore complexe est une extension de type fini du corps des nombres complexes, de degré de transcendance égal à la dimension de son abélianisé. Sont aussi inclus quelques résultats moins connus, comme l'unicité de la décomposition d'une variété abélienne polarisée en produit de facteurs indécomposables (cor. VI.9.2, p. 81).

Le but du chapitre VII est de présenter un survol de la théorie des espaces de modules de variétés abéliennes polarisées, en sacrifiant le détail des démonstrations plutôt que la précision des énoncés, l'idée étant d'une part de ne pas noyer le lecteur débutant, d'autre part d'aider les spécialistes à se retrouver dans le maquis parfois épais des notations des ouvrages de référence sur le sujet. Les conditions de Riemann du chapitre précédent permettent de montrer que les variétés abéliennes polarisées de dimension et de type donnés sont paramétrées par le quotient d'un demi-espace de Siegel par un sous-groupe arithmétique du groupe symplectique, qu'un théorème de Cartan permet de munir d'une structure d'espace analytique dont on détermine précisément les points singuliers (th. VII.1.5, p. 94, et prop. VII.3.4, p. 98). En dimension 1, l'invariant j permettait de réaliser un isomorphisme entre cet espace de module et la droite complexe. De façon tout-à-fait analogue, on montre, en suivant Igusa, que les « thêta-constantes » (définies à partir des fonctions thêta de Riemann) sont des formes modulaires pour certains sous-groupes arithmétiques du groupe symplectique et permettent de plonger ces espaces de modules comme variétés algébriques quasi-projectives dans des espaces projectifs. C'est le théorème principal de ce chapitre, aboutissement des travaux de J. Igusa, D. Mumford et G. Kempf, dont on esquisse de façon assez détaillée la preuve. Les démonstrations complètes se trouvent dans l'ouvrage de référence [**LB**].

Le dernier chapitre est de nature franchement plus géométrique et contient des résultats plus récents dont certains apparaissent pour la première fois dans un livre. On y utilise quelques outils géométriques supplémentaires : dimension d'une variété analytique (peut-être singulière), dimension des fibres d'une application holomorphe, variétés normales, théorème de pureté, factorisation de Stein, mais rien n'empêche le lecteur de les admettre (des références précises sont fournies). Le résultat principal de ce chapitre est un théorème de connexité (th. VIII.3.1, p. 111) du type Fulton-Hansen, dont on tire deux conséquences principales. La première est que, sous quelques hypothèses simples, le groupe fondamental d'une sous-variété d'un tore complexe X de dimension strictement plus grande que la moitié de celle de X est isomorphe à celui de X (cor. VIII.3.4, p. 115). La seconde est que l'application de Gauss d'une sous-variété lisse d'un tore complexe invariante par translation par aucun sous-tore non nul, est à fibres finies (cor. VIII.4.4, p. 120), de sorte que son fibré canonique est ample. Ce dernier résultat n'est pas original, mais il est obtenu comme conséquence d'un nouveau théorème (th. VIII.4.2, p. 119) montrant que pour des sous-variétés A et B d'un tore complexe avec $B \subset A$, la dimension de $A - B$ est égale à celle de la réunion des espaces tangents à A en les points de B.

CHAPITRE I

RÉSEAUX ET TORES COMPLEXES

1. Réseaux

Soit V un espace vectoriel réel de dimension finie n.

***Définition 1.1.* —** Un sous-groupe Γ de V est dit *discret* si pour tout compact K de V, l'ensemble $K \cap \Gamma$ est fini.

De façon équivalente, pour qu'un sous-groupe de V soit discret, il faut et il suffit qu'il soit fermé et que la topologie induite par celle de V soit la topologie discrète. Par exemple, le sous-groupe $\mathbf{Z}^n$ de $\mathbf{R}^n$ est discret. Si l'on choisit une norme sur V, un sous-groupe de V est discret si et seulement s'il ne contient qu'un nombre fini de vecteurs de norme au plus 1.

***Théorème 1.2.* —** *Soit Γ un sous-groupe de V. Pour que Γ soit discret, il faut et il suffit qu'il existe un entier $r \leq n$ et des vecteurs $e_1, \ldots, e_r$ linéairement indépendants sur $\mathbf{R}$ tels que*

$$\Gamma = \mathbf{Z}e_1 \oplus \cdots \oplus \mathbf{Z}e_r.$$

Démonstration. — On procède par récurrence sur la dimension de V. On considère une famille $\mathbf{R}$-libre maximale $\{f_1, \ldots, f_r\}$ d'éléments de Γ et on pose

$$K = \left\{\textstyle\sum_{j=1}^r t_j f_j \mid 0 \leq t_1, \ldots, t_r \leq 1\right\}.$$

Pour tout élément x de Γ, il existe des réels $x_1, \ldots, x_r$ uniquement déterminés tels que $x = \sum_{j=1}^r x_j f_j$. Pour tout entier p, le point

$$x^{(p)} = px - \sum_{j=1}^r [px_j] f_j = \sum_{j=1}^r (px_j - [px_j]) f_j$$

est dans l'ensemble $K \cap \Gamma$, qui est fini puisque Γ est discret. Il existe donc des entiers distincts p et q tels que $x^{(p)} = x^{(q)}$, de sorte que les x_j sont *rationnels*. Pour tout élément x de Γ, on a

$$x = x^{(1)} + \sum_{j=1}^r [x_j] f_j,$$

de sorte que le $\mathbf{Z}$-module Γ est engendré par $f_1, \dots, f_r$ et l'ensemble fini $K \cap \Gamma$. Il existe donc un entier d tel que tout élément de $d\Gamma$ s'écrive comme combinaison linéaire à coefficients *entiers* de $f_1, \dots, f_r$. Choisissons un élément $f = \sum_{j=1}^{r} a_j f_j$ de Γ tel que da_r soit un entier strictement positif minimal parmi toutes les $r^{\text{ièmes}}$ « coordonnées » des éléments de $d\Gamma$. Pour tout $x = \sum_{j=1}^{r} x_j f_j$ dans Γ, on fait la division euclidienne $dx_r = qda_r + s$ de dx_r par da_r, avec $0 \leq s < da_r$. L'entier s est la $r^{\text{ième}}$ coordonnée de l'élément $dx - qdf$ de $d\Gamma$, donc est nul. Si W est le sous-espace vectoriel de V engendré par $f_1, \dots, f_{r-1}$, on en déduit

$$\Gamma = \mathbf{Z}f \oplus (W \cap \Gamma).$$

Le sous-groupe $W \cap \Gamma$ de W est discret : on peut lui appliquer l'hypothèse de récurrence, ce qui termine la démonstration. □

L'entier r qui apparaît dans le théorème est uniquement déterminé : c'est la dimension du sous-espace vectoriel de V engendré par Γ. On l'appelle le *rang* de Γ.

***Définition 1.3.* —** Un réseau dans V est un sous-groupe discret de rang la dimension de V.

1.4. — Soit Γ un sous-groupe discret de V de rang r ; on munit V/Γ de la topologie quotient, c'est-à-dire qu'un sous-ensemble de V/Γ est ouvert si et seulement si son image réciproque par la surjection canonique $\pi\colon V \to V/\Gamma$ est ouverte dans V. Le théorème montre que V/Γ est homéomorphe à $(\mathbf{R}/\mathbf{Z})^r \times \mathbf{R}^{n-r}$, donc à $(S^1)^r \times \mathbf{R}^{n-r}$, où S^1 est le cercle unité. En particulier, pour que Γ soit un réseau, il faut et il suffit que V/Γ soit *compact*.

Si Γ est un réseau dans V, la surjection canonique $V \to V/\Gamma$ est un revêtement topologique ; comme V est simplement connexe, c'est le revêtement universel de V/Γ, dont le *groupe fondamental* est donc isomorphe à Γ.

2. Tores complexes

On supposera à partir de maintenant que V est un espace vectoriel complexe de dimension g et que Γ est un réseau dans V. Il est donc de rang $2g$. On note X le tore V/Γ.

2.1. — On peut mettre sur X une structure de variété complexe, que l'on peut définir soit par la famille de cartes $\pi|_\Omega\colon \Omega \to \pi(\Omega)$, où Ω est un ouvert de V qui ne rencontre aucun de ses translatés par des éléments de Γ non nuls (on dira que Ω est « Γ-petit ») : les changements de cartes sont alors des translations par des éléments de Γ, qui sont holomorphes ; soit en décrétant que si U est un ouvert de X, une fonction $f\colon U \to \mathbf{C}$ est holomorphe si et seulement si $f \circ \pi$ est holomorphe sur l'ouvert $\pi^{-1}(U)$ de V (on définit en fait ainsi le faisceau des fonctions holomorphes sur X ; *cf.* § V.3, p. 54). En d'autres termes, les fonctions holomorphes sur U correspondent aux fonctions holomorphes Γ-périodiques sur $\pi^{-1}(U)$.

Toute fonction holomorphe sur un tore complexe est constante, puisqu'elle induit une fonction holomorphe bornée sur son revêtement universel, donc constante par le théorème de Liouville.

On définit de façon analogue les fonctions *méromorphes* sur X : ce sont tout simplement les fonctions méromorphes [(1)] sur V qui sont Γ-périodiques. Elles forment un corps que l'on note $\mathscr{M}(X)$, et que l'on appelle le *corps des fonctions* de X.

Soient $X' = V'/\Gamma'$ un autre tore complexe et $u\colon X \to X'$ une application *continue ;* comme V est simplement connexe et que la surjection canonique $\pi'\colon V' \to X'$ est le revêtement universel de X', l'application u se relève en une application continue $\widetilde{u}\colon V \to V'$ telle que le diagramme suivant soit commutatif

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\widetilde{u}} & V' \\ {\scriptstyle\pi}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle\pi'} \\ X & \xrightarrow{u} & X' \end{array} \tag{1}$$

Vue la définition des structures complexes sur X et X', l'application u est holomorphe si et seulement si $\widetilde{u}$ l'est. En particulier, les opérations de groupe de X sont holomorphes : on dit que X est un *groupe de Lie complexe*.

***Définition 2.2.* —** On appelle *tore complexe* tout quotient d'un espace vectoriel complexe V par un réseau, muni de la structure de groupe de Lie explicitée ci-dessus. Sa *dimension* est la dimension de l'espace vectoriel complexe V.

***Théorème 2.3.* —** *Soit $u\colon X \to X'$ une application holomorphe.*

a) Il existe une application affine $\widetilde{u}\colon V \to V'$ *qui induit u par passage aux quotients.*

b) Supposons $u(0) = 0$; l'application u est un morphisme de groupes de Lie. Son image est un sous-tore de X' ; la composante connexe $(\operatorname{Ker} u)^0$ *de* 0 *dans* $\operatorname{Ker} u$ *est un sous-tore de X qui est d'indice fini dans* $\operatorname{Ker} u$ *et*

$$\dim X = \dim(\operatorname{Ker} u)^0 + \dim \operatorname{Im} u.$$

Démonstration. — Reprenons le diagramme (1). Soit γ un élément de Γ ; l'application holomorphe de V dans V' qui à v associe $\widetilde{u}(v+\gamma) - \widetilde{u}(v)$ est à valeurs dans Γ', donc constante. Cela entraîne que chaque dérivée partielle de $\widetilde{u}$ est Γ-périodique holomorphe, donc constante par le théorème de Liouville. Il s'ensuit que $\widetilde{u}$ est affine, ce qui montre a).

Si $u(0) = 0$, on peut supposer $\widetilde{u}$ linéaire. Le sous-groupe $\widetilde{u}(V) \cap \Gamma'$ est discret dans $\widetilde{u}(V)$; c'est même un réseau puisqu'il contient $\widetilde{u}(\Gamma)$ qui engendre $\widetilde{u}(V)$. L'image de u est donc le sous-tore $\widetilde{u}(V)/\widetilde{u}(V) \cap \Gamma'$ de X, de dimension $\dim \widetilde{u}(V)$.

Le noyau de u est $\widetilde{u}^{-1}(\Gamma')/\Gamma$. Posons $W = \operatorname{Ker} \widetilde{u}$; le sous-groupe $\widetilde{u}^{-1}(\Gamma')/W$ de V/W est discret (il est fermé et $\widetilde{u}$ induit une injection continue $\widetilde{u}^{-1}(\Gamma')/W \subset \Gamma'$). Il en est de même de son sous-groupe $(W + \Gamma)/W$; comme celui-ci engendre V/W, ce sont tous deux des réseaux dans V/W. On en déduit que le groupe $\widetilde{u}^{-1}(\Gamma')/(W + \Gamma)$ est fini. On a donc $(\operatorname{Ker} u)^0 \simeq (W + \Gamma)/\Gamma \simeq W/W \cap \Gamma$; ce groupe est d'indice fini donc fermé dans $\operatorname{Ker} u$;

1. On rappelle qu'une fonction méromorphe sur un ouvert est localement représentée comme le quotient f/g de fonctions holomorphes f et g, où g n'est pas identiquement nulle. Ce n'est pas à proprement parler une fonction, même si l'on admet la valeur ∞, puisqu'elle n'est pas définie là où f et g s'annulent. On donnera de ces fonctions une définition précise dans l'exemple V.3.2.3), p. 54.

il est donc compact et c'est bien un sous-tore de X, de dimension $\dim W$. La formule sur les dimensions en résulte. □

2.4. — On dit qu'un morphisme de groupes $u\colon X \to X'$ est une *isogénie* si u est surjectif et de noyau fini. Si Γ' est un réseau de V contenu dans le réseau Γ, la surjection canonique $V/\Gamma' \to V/\Gamma$ est une isogénie.

3. Espaces projectifs

Soit W un espace vectoriel complexe de dimension $n+1$. On va munir l'espace projectif $\mathbf{P}W$ des droites vectorielles de W d'une structure de variété complexe compacte de dimension n pour laquelle l'application quotient canonique $p\colon W \smallsetminus \{0\} \to \mathbf{P}W$ est holomorphe. Faisons-le pour $\mathbf{P}^n$, l'espace projectif associé à $\mathbf{C}^{n+1}$, muni de la topologie quotient associée à p.

Pour $0 \le j \le n$, on note $\widetilde{U}_j$ le fermé de $\mathbf{C}^{n+1}$ (isomorphe à $\mathbf{C}^n$), défini par $z_j = 1$ et U_j son image (ouverte) par p (appelée *ouvert standard* de $\mathbf{P}^n$). La structure complexe est définie par la famille de cartes $\varphi_j\colon \mathbf{C}^n \simeq \widetilde{U}_j \xrightarrow{p} U_j$; le changement de cartes entre $\widetilde{U}_0$ et $\widetilde{U}_1$ est $(z_1, \dots, z_n) \to (1/z_1, z_2/z_1, \dots, z_n/z_1)$, holomorphe sur son domaine de définition. On peut préférer, comme on l'a fait plus haut pour les tores complexes, décréter que si U est un ouvert de $\mathbf{P}^n$, une fonction $f\colon U \to \mathbf{C}$ est holomorphe si et seulement si $f \circ p$ est holomorphe sur l'ouvert $p^{-1}(U)$ de $\mathbf{C}^{n+1} \smallsetminus \{0\}$. En d'autres termes, les fonctions holomorphes sur U correspondent aux fonctions holomorphes sur $p^{-1}(U)$ invariantes par l'action de $\mathbf{C}^*$.

3.1. — On s'intéressera beaucoup dans ce livre aux applications holomorphes d'un tore complexe $X = V/\Gamma$ dans un espace projectif $\mathbf{P}^n$. Un moyen d'en construire (on verra au § IV.2, p. 41, que c'est le seul) est de partir d'un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\widetilde{u}} & \mathbf{C}^{n+1} \smallsetminus \{0\} \\ {\scriptstyle\pi}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle p} \\ X & \xrightarrow{u} & \mathbf{P}^n \end{array} \tag{2}$$

où les composantes $\widetilde{u}_0, \dots, \widetilde{u}_n$ de $\widetilde{u}$ sont des fonctions holomorphes sur V *sans zéro commun ;* on écrira souvent, pour simplifier les notations, $u(z) = (\widetilde{u}_0(z), \dots, \widetilde{u}_n(z))$. Ces fonctions doivent bien sûr vérifier certaines conditions pour qu'une telle factorisation existe ; dès que u existe, elle est automatiquement holomorphe.

3.2. — On cherche sous quelles conditions l'application u induit un isomorphisme de variétés complexes entre X et $u(X)$ (on dit que u est un « plongement holomorphe »). Par le théorème des fonctions implicites, il faut et il suffit que u soit injective et que son application tangente [2] soit injective en tout point (*cf.* exerc. I.4). L'espace tangent en un point $\pi(z)$ de X s'identifie à V, et l'application tangente à u est simplement l'application tangente à $p \circ \widetilde{u}$

2. Aussi appelée sa différentielle !

en z. L'application tangente à p en $y = \widetilde{u}(z)$ a pour noyau la droite $\mathbf{C}y$, de sorte que le noyau de l'application tangente $T_z(p \circ \widetilde{u})$ est l'image inverse de la droite $\mathbf{C}y$ par $T_z\widetilde{u}$. Ainsi, pour que l'application tangente à u soit injective, il faut et il suffit que la matrice

$$\begin{pmatrix} \widetilde{u}_0(z) & \dfrac{\partial\widetilde{u}_0}{\partial z_1}(z) & \cdots & \dfrac{\partial\widetilde{u}_0}{\partial z_g}(z) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \widetilde{u}_n(z) & \dfrac{\partial\widetilde{u}_n}{\partial z_1}(z) & \cdots & \dfrac{\partial\widetilde{u}_n}{\partial z_g}(z) \end{pmatrix}$$

soit de rang $g+1$ pour tout z dans V (comme plus haut, g est la dimension de V).

Exercices

I.1. — Soit m un entier strictement positif. Déterminer la nature du groupe $X[m]$ des points de m-torsion d'un tore complexe X (c'est-à-dire le groupe des points x de X tels que $mx = 0$).

I.2. — a) Soient $X = \mathbf{C}^g/\Gamma$ un tore complexe et Y un sous-tore de X de dimension h. Montrer qu'il existe un sous-groupe Γ' de Γ de rang $2h$ tel que l'espace vectoriel réel W engendré par Γ' soit stable par multiplication par i, et que $Y = W/\Gamma'$.

b) Identifions $\mathbf{C}^g$ à $\mathbf{R}^{2g}$. À toute matrice réelle M inversible d'ordre $2g$, on associe le réseau Γ_M de $\mathbf{C}^g$ engendré par les colonnes de M. On paramètre ainsi l'ensemble des réseaux dans $\mathbf{C}^g$ (donc aussi l'ensemble des tores complexes de dimension g) par l'ouvert dense $U = \mathrm{GL}_{2g}(\mathbf{R})$ de $\mathbf{R}^{4g^2}$. Montrer qu'il existe une famille dénombrable $(Z_n)_{n\in\mathbf{N}}$ d'hypersurfaces algébriques réelles de $\mathbf{R}^{4g^2}$ telle que, pour toute matrice M dans $U \smallsetminus \bigcup_{n\in\mathbf{N}} Z_n$, les seuls sous-tores complexes de $X = \mathbf{C}^g/\Gamma_M$ soient $\{0\}$ et X. On dit qu'un tore complexe $\ll$ très général $\gg$ est simple.

I.3. — Soit P un polynôme homogène en $n+1$ variables. On considère le sous-ensemble X de $\mathbf{P}^n$ des points dont les coordonnées homogènes annulent P (cette propriété est bien indépendante du choix des coordonnées). Pour que X soit une sous-variété complexe de $\mathbf{P}^n$, il faut et il suffit que le seul zéro commun des $n+1$ dérivées partielles de P soit 0.

I.4. — Soient X et Y des variétés complexes compactes et $u\colon X \to Y$ une application holomorphe injective dont l'application tangente est partout injective. Montrer que $u(X)$ est une sous-variété complexe de Y et que u induit un isomorphisme de X sur $u(X)$.

CHAPITRE II

COURBES ELLIPTIQUES

Dans ce chapitre, nous étudions en détail les courbes elliptiques, c'est-à-dire les tores complexes de dimension 1 : fonction $\wp$ de Weierstrass, réalisation comme cubiques planes, fonctions thêta, diviseurs, espace de modules. On retrouve déjà dans ce cadre simple la plupart des éléments (mais pas tous) de la théorie en dimension quelconque. Il sert donc aussi, à part son intérêt propre (et historique), d'introduction au reste du livre.

1. La fonction $\wp$ de Weierstrass

Une courbe elliptique E est un tore complexe de dimension 1 ; elle s'écrit donc $E = \mathbf{C}/\Gamma$, où $\Gamma = \gamma_1 \mathbf{Z} \oplus \gamma_2 \mathbf{Z}$, avec γ_1 et γ_2 non nuls et γ_1/γ_2 non réel.

***Remarques 1.1.* —** 1) Posons $\tau = \pm\gamma_1/\gamma_2$, le signe étant choisi de façon que $\operatorname{Im}\tau > 0$, et notons Γ_τ le réseau $\tau\mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}$; la courbe E est isomorphe à la courbe elliptique $E_\tau = \mathbf{C}/\Gamma_\tau$ par l'application holomorphe $u\colon E \to E_\tau$ induite par $\widetilde{u}(z) = \pm z/\gamma_2$.

2) L'application $z \mapsto e^{2i\pi z}$ induit un isomorphisme de groupes entre $\mathbf{C}/\mathbf{Z}$ et $\mathbf{C}^*$, donc aussi entre E et $\mathbf{C}^*/q^{\mathbf{Z}}$, où $q = e^{2i\pi\tau}$ et $q^{\mathbf{Z}}$ est le sous-groupe (discret) de $\mathbf{C}^*$ engendré par q. C'est un point de vue important pour l'étude des courbes elliptiques sur des corps autres que $\mathbf{C}$.

Notre premier but est de déterminer le corps des fonctions méromorphes de E, c'est-à-dire le corps des fonctions méromorphes sur $\mathbf{C}$ qui sont Γ-périodiques (le réseau Γ étant fixé, on parlera simplement de fonction elliptique). On considère la série

$$\frac{1}{z^2} + \sum_{\gamma\in\Gamma'} \Big(\frac{1}{(z-\gamma)^2} - \frac{1}{\gamma^2} \Big),$$

où Γ' désigne le réseau Γ privé de l'origine.

***Théorème 1.2.* —** *La série ci-dessus converge absolument et normalement sur tout compact de $\mathbf{C} \smallsetminus \Gamma$. Elle définit une fonction paire $\wp$ méromorphe dont les seuls pôles sont les points de Γ ; ils sont d'ordre 2.*

Démonstration. — On majore, sur chaque compact de $\mathbf{C} \setminus \Gamma$, chaque terme de la série par une constante fois $|\gamma|^{-3}$, et la série $\sum_{\gamma\in\Gamma'} |\gamma|^{-3}$ converge. Plus précisément, posons $\mu = \frac{1}{2}\min_{z\in\Gamma'}|z| > 0$. Pour γ et γ' distincts dans Γ, on a $|\gamma - \gamma'| \geq 2\mu$, donc les boules ouvertes $B(\gamma,\mu)$ et $B(\gamma',\mu)$ sont disjointes. On en déduit que pour $N > \mu$, on a

$$\operatorname{Card}\{\gamma \in \Gamma \mid N \leq \gamma \leq N+1\} \leq \pi((N+\mu+1)^2 - (N-\mu)^2)/\pi\mu^2 = O(N),$$

de sorte que la série

$$\sum_{\gamma\in\Gamma', N\leq\gamma\leq N+1} \frac{1}{|\gamma^3|} = O\Big(\frac{1}{N^2}\Big)$$

converge.

Il est clair que $\wp$ est paire ; pour montrer qu'elle est elliptique, on passe par sa dérivée

$$\wp'(z) = \sum_{\gamma\in\Gamma} \frac{-2}{(z-\gamma)^3},$$

qui l'est clairement. Pour chaque γ dans Γ, il existe donc une constante $c(\gamma)$ telle que

$$\wp(z+\gamma) = \wp(z) + c(\gamma)$$

pour tout z. En faisant $z = -\gamma/2$, on obtient $c(\gamma) = 0$.

On peut obtenir le développement de Laurent de $\wp$ à l'origine : pour $|z| < 2\mu$, on a

$$\begin{aligned}
\wp(z) &= \frac{1}{z^2} + \sum_{\gamma\in\Gamma'}\Big(\frac{1}{(z-\gamma)^2} - \frac{1}{\gamma^2}\Big)\\
&= \frac{1}{z^2} + \sum_{\gamma\in\Gamma'}\frac{1}{\gamma^2}\Big(\frac{1}{\big(1-\frac{z}{\gamma}\big)^2} - 1\Big)\\
&= \frac{1}{z^2} + \sum_{\gamma\in\Gamma'}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\gamma^2}(n+1)\Big(\frac{z}{\gamma}\Big)^n\\
&= \frac{1}{z^2} + \sum_{n=1}^{\infty}(n+1)G_{n+2}\, z^n,
\end{aligned}$$

où l'on a posé $G_n = \sum_{\gamma\in\Gamma'} \frac{1}{\gamma^n}$ pour tout entier $n \geq 3$. Comme $\wp$ est paire, on en déduit

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{k=1}^{\infty}(2k+1)G_{2k+2}\, z^{2k}.$$

En tout état de cause, $\wp$ est bien méromorphe. □

Proposition 1.3. — *Pour tout complexe z, on a*

$$\wp'(z)^2 = 4\wp(z)^3 - 60G_4\wp(z) - 140G_6.$$

Démonstration. — On écrit les développements de Laurent en 0 :

$$\begin{aligned}
\wp(z) &= z^{-2} + 3G_4z^2 + 5G_6z^4 + \cdots\\
\wp'(z) &= -2z^{-3} + 6G_4z + 20G_6z^3 + \cdots,
\end{aligned}$$

d'où il ressort que

$$\begin{aligned}\wp'(z)^2 &= 4z^{-6} - 24G_4z^{-2} - 80G_6 + \cdots\\ 4\wp(z)^3 &= 4z^{-6} + 36G_4z^{-2} + 60G_6 + \cdots .\end{aligned}$$

On en déduit que la différence des deux membres de l'égalité de la proposition est une fonction elliptique *holomorphe*, donc constante. Comme elle est nulle en 0, elle est identiquement nulle. □

On considérera aussi les fonctions $\wp$ et $\wp'$ comme des fonctions méromorphes sur E. On définit une application holomorphe $u\colon E\smallsetminus\{0\} \to \mathbf{P}^2$ par la formule suivante en coordonnées homogènes

$$u(x) = (\wp(x), \wp'(x), 1).$$

Avec les notations de I.3.1, p. 8, on peut aussi définir u à partir de la fonction $\widetilde{u}\colon \mathbf{C} \dashrightarrow \mathbf{C}^3 \smallsetminus \{0\}$ telle que $\widetilde{u}(z) = (z^3\wp(z), z^3\wp'(z), z^3)$ qui est holomorphe au voisinage de 0, de sorte que l'on peut prolonger u en une application holomorphe $u\colon E \to \mathbf{P}^2$ en posant $u(0) = (0, 1, 0)$.

Son image est contenue dans la cubique plane C d'équation homogène

$$Y^2Z = 4X^3 - g_2XZ^2 - g_3Z^3$$

(*cf.* exerc. I.3, p. 9), où l'on a posé $g_2 = 60G_4$ et $g_3 = 140G_6$. Nous allons montrer que u induit un isomorphisme de variétés complexes entre E et C.

Soit f une fonction méromorphe non identiquement nulle sur E, c'est-à-dire une fonction méromorphe Γ-périodique sur $\mathbf{C}$. Pour tout point x de E, on note $\mathrm{ord}_x(f)$ l'ordre d'annulation de f en x si f est définie en x, l'ordre de son pôle sinon. En intégrant f le long d'un parallélogramme ne contenant pas de pôle de f et de côtés une base de Γ, on obtient grâce au théorème des résidus

(3) $$\sum_{x\in E} \mathrm{res}_x(f) = 0,$$

d'où, en l'appliquant à f'/f,

(4) $$\sum_{x\in E} \mathrm{ord}_x(f) = 0.$$

1.4. — Posons $\gamma_3 = \gamma_1 + \gamma_2$; le groupe E a trois points d'ordre 2, à savoir les images dans E des complexes $\gamma_1/2$, $\gamma_2/2$ et $\gamma_3/2$; ce sont des zéros de $\wp'$, puisque $\wp'(\gamma_j/2) = \wp'(-\gamma_j/2) = -\wp'(\gamma_j/2)$. Comme $\wp'$ a un seul pôle, 0, qui est triple, ce sont par (4) les seuls zéros de $\wp'$ sur E et ils sont simples.

1.5. — Pour tout point x_0 non nul de E, la fonction $x \mapsto \wp(x) - \wp(x_0)$ a un seul pôle, 0, qui est double. Ses deux seuls zéros dans E sont donc x_0 et $-x_0$ (si x_0 est d'ordre 2, on a $\wp'(x_0) = 0$, de sorte que x_0 est un zéro double de $\wp$). On a donc $\wp(x) = \wp(x_0)$ si et seulement si $x = \pm x_0$.

***Théorème 1.6.* —** *Le discriminant $\Delta = g_2^3 - 27g_3^2$ n'est pas nul* [(1)]*, de sorte que la courbe plane C est une variété complexe. L'application u induit un isomorphisme de variétés complexes entre E et C.*

Démonstration. — La fonction $\wp'$ s'annule en chaque $\gamma_j/2$ par 1.4. Les $\wp(\gamma_j/2)$ sont donc racines du polynôme $4X^3 - g_2X - g_3$; ils sont distincts par 1.5, donc Δ n'est pas nul. Cela est équivalent au fait que les trois dérivées partielles de l'équation homogène $Y^2Z = 4X^3 - g_2XZ^2 - g_3Z^3$ de C n'ont pas de zéro commun hors de l'origine, de sorte que C est une variété complexe (*cf.* exerc. I.3, p. 9).

Soit $(\alpha, \beta, 1)$ un point de C ; la fonction $x \mapsto \wp(x) - \alpha$ a un zéro x_0 (sinon son inverse serait holomorphe, donc constant). On a alors $\wp'(x_0)^2 = \beta^2$; quitte à remplacer x_0 par $-x_0$, on a $\wp'(x_0) = \beta$ et $u(x_0) = (\alpha, \beta, 1)$. Comme $u(0) = (0, 1, 0)$, l'application u est surjective.

Supposons enfin $u(x_1) = u(x_2)$ avec x_1 et x_2 non nuls dans E ; on a alors $\wp(x_1) = \wp(x_2)$, d'où $x_2 = \varepsilon x_1$ par 1.5, avec $\varepsilon \in \{-1, 1\}$, de sorte que $\wp'(x_2) = \varepsilon\wp'(x_1)$ puisque $\wp'$ est impaire. Comme $\wp'(x_1) = \wp'(x_2)$, on en déduit $\varepsilon = 1$, c'est-à-dire $x_1 = x_2$, sauf peut-être si $\wp'(x_1) = 0$, auquel cas x_1 est d'ordre 2 et $-x_1 = x_1$; on a donc dans tous les cas $x_1 = x_2$.

L'application holomorphe u est donc bijective. Pour montrer qu'elle induit un isomorphisme sur C, il faut vérifier que son application tangente est partout injective, c'est-à-dire, par I.3.2, p. 8, que la matrice

$$\begin{pmatrix} z^3\wp(z) & \big(z^3\wp(z)\big)' \\ z^3\wp'(z) & \big(z^3\wp'(z)\big)' \\ z^3 & 3z^2 \end{pmatrix}$$

est de rang 2 pour tout nombre complexe z. En $z = 0$, c'est $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$; ailleurs, c'est équivalent à

$$\begin{pmatrix} \wp(z) & \wp'(z) \\ \wp'(z) & \wp''(z) \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

qui est de rang 2 puisque $\wp'$ n'a pas de zéro double (*cf.* 1.4). □

On peut montrer (en utilisant le théorème 4.3 ; *cf.* [**R**, (3.13), p. 49]) que réciproquement, pour toute cubique lisse d'équation $Y^2Z = 4X^3 - aXZ^2 - bZ^3$ dans $\mathbf{P}^2$, il existe une courbe elliptique isomorphe (en tant que variété complexe) à cette cubique.

1. Il faut mentionner ici la très belle formule de Jacobi ([**S**, th. 6, p. 153]) : pour le réseau $\Gamma_\tau = \tau\mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}$ défini dans la remarque 1.1.1), on a

$$\Delta = (2\pi)^{12} \prod_{n=1}^{\infty} (1 - e^{2in\pi\tau})^{24}.$$

2. Fonctions thêta et diviseurs

Il y a (au moins) deux façons d'approcher le problème de la construction d'un plongement holomorphe d'une courbe elliptique, ou plus généralement d'un tore complexe V/Γ, dans un espace projectif $\mathbf{P}^n$. La première approche consiste à chercher n fonctions Γ-périodiques méromorphes $f_1, \ldots, f_n$ et à essayer de prolonger l'application méromorphe $u\colon V/\Gamma \dashrightarrow \mathbf{P}^n$ définie par

$$u(x) = (f_1(x), \ldots, f_n(x), 1)$$

en une application holomorphe. C'est l'approche suivie dans le théorème 1.6 pour les courbes elliptiques. La seconde approche consiste, comme dans I.3.1, p. 8, à chercher des fonctions *holomorphes* $\widetilde{u}_0, \ldots, \widetilde{u}_n$ sur V, sans zéro commun, telles que l'application holomorphe

$$(\widetilde{u}_0, \ldots, \widetilde{u}_n)\colon V \longrightarrow \mathbf{C}^{n+1} \smallsetminus \{0\}$$

induise par passage aux quotients une application $V/\Gamma \to \mathbf{P}^n$. Il faut pour cela qu'il existe pour chaque élément γ de Γ une application $f_\gamma\colon V \to \mathbf{C}^*$ telle que

$$\widetilde{u}_j(z+\gamma) = f_\gamma(z)\widetilde{u}_j(z)$$

pour tout $j \in \{0, \ldots, n\}$. Cela motive la définition suivante, dans laquelle on revient au cas de la dimension 1 : on fixe un réseau Γ et on note E la courbe elliptique associée.

***Définition 2.1.* —** On appelle *fonction thêta* associée à Γ toute fonction entière ϑ sur $\mathbf{C}$ non identiquement nulle telle qu'il existe, pour chaque élément γ de Γ, des constantes a_γ et b_γ satisfaisant à

$$\vartheta(z+\gamma) = e^{2i\pi(a_\gamma z + b_\gamma)}\vartheta(z)$$

pour tout z dans $\mathbf{C}$. La famille $(a_\gamma, b_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ est appelée le *type* de ϑ.

L'équation fonctionnelle est équivalente à

$$\frac{\theta'}{\theta}(z+\gamma) = 2i\pi a_\gamma + \frac{\theta'}{\theta}(z).$$

En d'autres termes, les fonctions thêta sont les fonctions entières non identiquement nulles pour lesquelles $(\vartheta'/\vartheta)'$ est une fonction elliptique. Des fonctions thêta $\vartheta_0, \ldots, \vartheta_n$ de même type sans zéro commun définissent une application holomorphe de E dans $\mathbf{P}^n$.

***Exemples 2.2.* —** 1) Toute fonction du type $z \mapsto e^{az^2+bz+c}$ est une fonction thêta, dite *triviale ;* ce sont exactement les fonctions thêta qui ne s'annulent pas (*cf.* exerc. II.3).

2) **La fonction σ de Weierstrass**, définie par le produit infini

$$\sigma(z) = z \prod_{\gamma\in\Gamma'} \Big(1 - \frac{z}{\gamma}\Big) e^{\frac{z}{\gamma} + \frac{z^2}{2\gamma^2}},$$

est une fonction thêta, puisque la dérivée de σ'/σ est $-\wp$.

3) **Les fonctions thêta de Riemann** sont définies pour tout couple (a,b) de réels par

$$\vartheta\Big[\begin{matrix} a \\ b \end{matrix}\Big](z) = \sum_{m\in\mathbf{Z}} e^{i\pi(\tau(m+a)^2 + 2(m+a)(z+b))}$$

(que l'on note aussi $\vartheta\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}(z,\tau)$). Elles vérifient, pour tous entiers p et q,

$$\vartheta\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}(z+\tau p+q) = e^{i\pi(-2pz-p^2\tau+2pb-2aq)}\vartheta\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}(z),$$

donc sont des fonctions thêta pour le réseau Γ_τ.

2.3. — Un *diviseur* sur E est une combinaison linéaire formelle $\sum_{x\in E} n_x[x]$, où les n_x sont des entiers nuls sauf pour un nombre fini d'entre eux ; son *degré* est la somme des n_x. Ce diviseur est *effectif* si les entiers n_x sont tous positifs.

À toute fonction méromorphe f non identiquement nulle sur E, on associe le diviseur

$$\operatorname{div}(f) = \sum_{x\in E} \operatorname{ord}_x(f)\,[x],$$

qui est de degré 0 par (4). Bien qu'une fonction thêta ϑ ne définisse pas une fonction sur E, son « diviseur sur $\mathbf{C}$ » est invariant par translation par Γ ; on peut ainsi définir le diviseur $\operatorname{div}(\vartheta)$ de ϑ sur E. Comme ϑ est holomorphe, ce diviseur est effectif.

***Exemples 2.4.* —** 1) Le diviseur de σ est $[0]$.

2) Le diviseur de $\vartheta\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ est le translaté de celui de $\vartheta\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ par $\tau a+b$.

***Proposition 2.5.* —** *Soient (γ_1,γ_2) une base directe de Γ et ϑ une fonction thêta. On a*

$$a_{\gamma_1}\gamma_2 - a_{\gamma_2}\gamma_1 = \deg(\operatorname{div}(\vartheta)).$$

Démonstration. — Il suffit d'intégrer ϑ'/ϑ sur un parallélogramme de côtés γ_1 et γ_2 ne contenant aucun zéro de ϑ, en utilisant le fait que $(\vartheta'/\vartheta)(z+\gamma_j) = (\vartheta'/\vartheta)(z)+2i\pi a_{\gamma_j}$. □

***Exemples 2.6.* —** 1) Pour toute fonction thêta de Riemann, on a $a_{\tau m+n} = -m$; son diviseur est donc de degré 1. Comme $\vartheta\begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix}$ est impaire et sans pôle, son diviseur est $[0]$ et l'exemple 2.4.2) entraîne [(2)]

$$\operatorname{div}\vartheta\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \big[\tau(a+1/2)+(b+1/2)\big].$$

2) Fixons un entier $d\geq 1$. On vérifie que la fonction $z\mapsto\vartheta\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}(dz,d\tau)$ est une fonction thêta pour le réseau Γ_τ, avec $a_{\tau m+n} = -md$; son diviseur est donc de degré d et il est invariant par la translation $z\mapsto z+\frac{1}{d}$. On a par exemple (utiliser l'exemple 2.4.2))

$$\operatorname{div}\vartheta\begin{bmatrix} l/d \\ 0 \end{bmatrix}(d\bullet,d\tau) = \sum_{j=0}^{d-1}\Big[\frac{2l+d}{2d}\tau+\frac{2j+1}{2d}\Big].$$

2. Ici et plus bas, on confond, pour ne pas alourdir le texte, un nombre complexe et son image dans E.

2.7. — Les fonctions thêta de Riemann permettent aussi de réaliser une courbe elliptique comme une cubique plane. Posons pour simplifier

$$\vartheta_{00} = \vartheta\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix} \qquad \vartheta_{10} = \vartheta\begin{bmatrix}1/2\\0\end{bmatrix} \qquad \vartheta_{01} = \vartheta\begin{bmatrix}0\\1/2\end{bmatrix} \qquad \vartheta_{11} = \vartheta\begin{bmatrix}1/2\\1/2\end{bmatrix}.$$

On vérifie que les fonctions ϑ_{00}, ϑ_{10} et ϑ_{01} sont paires, tandis que ϑ_{11} est impaire.

Proposition 2.8. — *L'application holomorphe $u\colon E \to \mathbf{P}^2$ définie (comme en I.3.1, p. 8) par*

$$z \longmapsto \big(\vartheta_{00}(z)\vartheta_{11}(z)^2, \vartheta_{10}(z)\vartheta_{01}(z)\vartheta_{11}(z), \vartheta_{00}(z)^3\big)$$

induit un isomorphisme de E sur la cubique lisse d'équation homogène

$$Y^2Z = X(\beta Z + \alpha X)(\alpha Z - \beta X),$$

où

$$\alpha = \frac{\vartheta_{10}(0)^2}{\vartheta_{00}(0)^2} \qquad\qquad \beta = \frac{\vartheta_{01}(0)^2}{\vartheta_{00}(0)^2}.$$

Indications de démonstration. — Les trois fonctions définissant u n'ont pas de zéro commun par l'exemple 2.6.1). Le fait que u soit bien à valeurs dans la cubique et que cette cubique soit lisse résulte de l'exercice II.6, b) et c). Pour montrer que u est bijective, on procède comme dans la démonstration du théorème 1.6. □

2.9. — Le corps des fonctions méromorphes d'une courbe elliptique est engendré sur $\mathbf{C}$ par $\wp$ et $\wp'$, et son degré de transcendance est 1 ; de plus, toute fonction méromorphe sur une courbe elliptique est quotient de deux fonctions thêta de même type (*cf.* exerc. II.8).

3. Diviseurs et théorème de Riemann–Roch

Revenons aux diviseurs sur une courbe elliptique E, définis en 2.3. Ils forment un groupe abélien, noté $\operatorname{Div}(E)$; les diviseurs de degré 0 forment un sous-groupe noté $\operatorname{Div}^0(E)$. Un *diviseur principal* est le diviseur d'une fonction méromorphe non identiquement nulle sur E. Comme on a $\operatorname{div}(fg) = \operatorname{div}(f) + \operatorname{div}(g)$ et $\operatorname{div}(1/f) = -\operatorname{div}(f)$, les diviseurs principaux forment un sous-groupe de $\operatorname{Div}(E)$; par (4), c'est même un sous-groupe de $\operatorname{Div}^0(E)$.

On dit que des diviseurs D et D' sont *linéairement équivalents*, et l'on note $D \equiv D'$, si $D - D'$ est principal. On appelle *groupe des classes de diviseurs*, ou *groupe de Picard* de E, et l'on note $\operatorname{Pic}(E)$, le quotient de $\operatorname{Div}(E)$ par le sous-groupe des diviseurs principaux. On note aussi $\operatorname{Pic}^0(E)$ le noyau du degré $\operatorname{Pic}(E) \to \mathbf{Z}$.

Théorème 3.1. — *Le morphisme*

$$\begin{array}{rccc} \varphi\colon & E & \longrightarrow & \operatorname{Pic}^0(E) \\ & x & \longmapsto & \text{classe de } [x] - [0] \end{array}$$

est un isomorphisme de groupes.

Démonstration. — Pour montrer que φ est un morphisme de groupes, nous utiliserons la fonction σ de Weierstrass définie dans l'exemple 2.2.2). Soient z_1 et z_2 des nombres complexes ; on pose

$$f(z) = \frac{\sigma(z - z_1 - z_2)\sigma(z)}{\sigma(z - z_1)\sigma(z - z_2)}.$$

Le fait que σ est une fonction thêta entraîne que la fonction méromorphe f est elliptique, de diviseur $[\pi(z_1)+\pi(z_2)]-[\pi(z_1)]-[\pi(z_2)]+[0]$. On a donc $\varphi(\pi(z_1)+\pi(z_2)) = \varphi(\pi(z_1))+\varphi(\pi(z_2))$.

À cause de (3), une fonction elliptique ne peut avoir un unique pôle simple : le diviseur $\varphi(x)$ n'est donc pas principal pour $x \neq 0$ et φ est injective. Soit $D = \sum_x n_x[x]$ un diviseur de degré 0 ; on écrit

$$D = \sum_x n_x([x] - [0]) = \sum_x n_x\varphi(x) = \varphi\Big(\sum_x n_x x\Big),$$

ce qui montre que φ est surjective. □

3.2. — Pour tout diviseur $D = \sum n_x[x]$ de degré 0, on a

$$D = \sum n_x([x] - [0]) \equiv \Big[\sum n_x x\Big] - [0];$$

de sorte que D est principal si et seulement si $s(D) = \sum n_x x$ est nul *dans* E.

Si D est un diviseur (quelconque), on pose

(5) $\quad L(D) = \{0\} \cup \{f \text{ fonction elliptique méromorphe } \mid f \neq 0 \text{ et } \operatorname{div}(f) + D \geq 0\}.$

C'est un espace vectoriel. Il est réduit aux constantes si $D = 0$, à cause du théorème de Liouville, et $L(-D)$ est nul pour D effectif non nul. Pour tout point x de E, l'espace $L([x])$ est aussi réduit aux constantes puisqu'une fonction elliptique ne peut avoir un seul pôle, simple (*cf.* (3)).

Si g est une fonction elliptique non nulle, la bijection $f \mapsto fg$ envoie $L(D + \operatorname{div}(g))$ sur $L(D)$. La dimension de $L(D)$ ne dépend que de la classe de D dans le groupe $\operatorname{Pic}(E)$.

***Théorème 3.3* (Riemann–Roch).** — *Soit D un diviseur de degré $d \geq 1$ sur la courbe elliptique E. L'espace vectoriel $L(D)$ est de dimension d.*

Indications de démonstration. — Notons $D = \sum_x n_x[x]$; soit D_0 le diviseur de la fonction $\vartheta(z) = \vartheta\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}(dz, d\tau)$ étudiée dans l'exemple 2.6.2). Soit z_0 un nombre complexe tel que $d\pi(z_0) = s(D_0) - s(D)$ dans E. L'application qui à f associe la fonction $z \mapsto f(z - z_0)$ induit un isomorphisme de $L(D)$ sur $L(D')$, où $D' = \sum_x n_x[x + \pi(z_0)]$. Par construction, $s(D') = s(D_0)$; par 3.2, le diviseur $D' - D_0$ est principal, de sorte que les espaces vectoriels $L(D')$ et $L(D_0)$ ont même dimension. Il suffit donc de montrer que $L(D_0)$ est de dimension d. L'application $f \mapsto f\vartheta$ induit un isomorphisme de $L(D_0)$ sur l'espace vectoriel des fonctions thêta de même type que ϑ. Un calcul direct (th. VI.2.2, p. 67, ou [**R**, pp. 23–25]), montre que ce dernier a pour base les

$$\vartheta\begin{bmatrix} l/d \\ 0 \end{bmatrix}(d\bullet, d\tau) \qquad l \in \{0, \ldots, d-1\};$$

il est donc de dimension d. □

4. Espace de modules

On cherche à paramétrer les classes d'isomorphisme de courbes elliptiques. Toute courbe elliptique est isomorphe à une courbe elliptique $E_\tau = \mathbf{C}/\Gamma_\tau$, où τ est dans le demi-espace de Siegel

$$\mathscr{H} = \{\tau \in \mathbf{C} \mid \operatorname{Im} \tau > 0\}.$$

Observons que le groupe $\mathrm{GL}_2^+(\mathbf{R})$ opère à gauche sur $\mathscr{H}$ par la formule

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \tau = \frac{a\tau + b}{c\tau + d}$$

(on vérifie l'égalité $\operatorname{Im}\left(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}\right) = (ad - bc)\,|c\tau + d|^{-2} \operatorname{Im} \tau > 0$).

Proposition 4.1. — *Pour que les courbes elliptiques E_τ et $E_{\tau'}$ soient isomorphes, il faut et il suffit qu'il existe une matrice M dans $\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$ vérifiant $\tau' = M \cdot \tau$.*

Démonstration. — Si E_τ et $E_{\tau'}$ sont isomorphes, il existe d'après le théorème I.2.3 un nombre complexe non nul α tel que $\alpha\Gamma_{\tau'} = \Gamma_\tau$, donc des entiers a, b, c, d tels que

$$\alpha\tau' = \tau a + b \quad \text{et} \quad \alpha = \tau c + d,$$

donc

$$\tau' = \frac{a\tau + b}{c\tau + d}.$$

Comme $\operatorname{Im} \tau' = (ad - bc)\,|\tau c + d|^{-2} \operatorname{Im} \tau$, on a $ad - bc > 0$. Mais il existe aussi des entiers a', b', c', d' tels que

$$\alpha^{-1}\tau = \tau' a' + b' \quad \text{et} \quad \alpha^{-1} = \tau' c' + d'.$$

En multipliant ces égalités par α, on obtient

$$\tau = a'(\tau a + b) + b'(\tau c + d) \quad \text{et} \quad 1 = c'(\tau a + b) + d'(\tau c + d),$$

ce qui entraîne que les matrices $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$ sont inverses l'une de l'autre, donc de déterminant 1. □

4.2. — L'ensemble des classes d'isomorphisme de courbes elliptiques est donc en bijection avec l'espace quotient $\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})\backslash\mathscr{H}$. On peut, grâce à un théorème de Cartan (*cf.* th. VII.1.2, p. 91), munir cet espace quotient d'une structure de variété complexe, de façon que, pour toute variété complexe X, une application $\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})\backslash\mathscr{H} \to X$ est holomorphe si et seulement si la composée $\mathscr{H} \to \mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})\backslash\mathscr{H} \to X$ l'est. L'ensemble des classes d'isomorphisme est alors paramétré (en un sens ici vague, mais que l'on peut rendre beaucoup plus précis) par la variété complexe $\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})\backslash\mathscr{H}$; on dit que cette dernière est un « espace de modules » pour les courbes elliptiques.

On remarquera que, pour tout élément $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ de $\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$, on a

$$\Gamma_{M\cdot\tau} = (c\tau + d)^{-1}\Gamma_\tau;$$

il en résulte que, pour tout entier $k \geq 2$, on a

$$G_{2k}(M\cdot\tau) = (c\tau + d)^{2k}G_{2k}(\tau).$$

On dit [(3)] que G_{2k} est une *forme modulaire de poids* $2k$. En particulier, g_2, g_3 et Δ sont des formes modulaires de poids respectifs 4, 6 et 12. On définit l'*invariant modulaire*

$$j(\tau) = 1728\,\frac{g_2^3(\tau)}{\Delta(\tau)}$$

(on a vu que Δ ne s'annule pas sur $\mathscr{H}$) ; c'est une forme modulaire de poids 0. L'application holomorphe $j\colon \mathscr{H} \to \mathbf{C}$ est donc invariante par l'action de $\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$; elle induit par passage au quotient une application holomorphe

$$J\colon\ \mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})\backslash\mathscr{H} \longrightarrow \mathbf{C}.$$

Théorème 4.3. — *L'application J est bijective.*

Indications de démonstration. — Celle-ci est basée sur une identité analogue à (4), démontrée par exemple dans [**R**, prop. (3.7), p. 40] ou [**S**, th. 3, p. 139], qui entraîne que J ayant un pôle simple « à l'infini », a un unique zéro dans un domaine fondamental pour l'action de $\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$. On applique cette remarque à $J - \lambda$, pour tout complexe λ, ce qui montre que J est bijective. □

En particulier, pour que des courbes elliptiques soient isomorphes, il faut et il suffit qu'elles aient le même invariant modulaire. Par ailleurs, si l'on munit $\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})\backslash\mathscr{H}$ de la structure de variété complexe de 4.2, l'application J et son inverse sont holomorphes : J est un isomorphisme de variétés complexes. Nous reviendrons sur toutes ces propriétés dans un cadre plus général dans le chapitre VII.

3. Il y a en fait une autre condition technique ; *cf.* [**S**, p. 132].

5. Organisation du livre

Notre objet est de généraliser nos résultats sur les courbes elliptiques en dimension quelconque.

Plongement des tores complexes dans un espace projectif et fonctions thêta (§ 1 et § 2). Contrairement à ce qui se passe en dimension 1, la plupart des tores complexes n'admettent pas de plongement holomorphe dans un espace projectif. Ceux qui ont cette propriété sont appelés *variétés abéliennes*. Les fonctions qui nous permettront de construire ces plongements seront encore des *fonctions thêta*.

Diviseurs et théorème de Riemann–Roch (§ 3). On définira la notion de diviseur sur une variété complexe X. Toute fonction méromorphe sur X a un diviseur, qui est dit principal ; on note encore $\mathrm{Pic}(X)$ le groupe des diviseurs modulo le sous-groupe des diviseurs principaux. Lorsque X est une variété abélienne, nous construirons un sous-groupe $\mathrm{Pic}^0(X)$ de $\mathrm{Pic}(X)$, qui est encore une *variété abélienne isogène à* X (*cf.* I.2.4). Nous calculerons aussi la dimension des espaces vectoriels $L(D)$ à l'aide des fonctions thêta ; ils s'interprètent comme des espaces de sections de fibrés en droites, et sont étroitement liés aux plongements des variétés abéliennes dans des espaces projectifs.

Espaces de modules (§ 4). Il y a deux parties que nous généraliserons : d'une part trouver un espace qui paramètre les classes d'isomorphisme de variétés abéliennes polarisées (l'analogue de $\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})\backslash\mathscr{H}$), d'autre part réaliser cet espace comme variété algébrique (ce que l'on a fait pour les courbes elliptiques au moyen de la fonction J). Ce sont encore les fonctions thêta qui nous permettront de traiter ce dernier point.

Exercices

II.1. — a) Montrer la formule d'addition

$$\wp(z_1+z_2)+\wp(z_1)+\wp(z_2)=\frac{1}{4}\left(\frac{\wp'(z_1)-\wp'(z_2)}{\wp(z_1)-\wp(z_2)}\right)^2,$$

valable pour $z_1 \neq \pm z_2$.

b) Montrer que cette formule a l'interprétation géométrique suivante : soient p_1, p_2 et p_3 des points sur la cubique C du théorème 1.6 ; pour que $p_1+p_2+p_3=0$ dans E, il faut et il suffit que p_1, p_2 et p_3 soient alignés.

II.2. — Soit D un diviseur de degré d sur une courbe elliptique. Le théorème de Riemann–Roch (théorème 3.3) calcule la dimension de l'espace vectoriel $L(D)$ lorsque $d \geq 1$. Calculer cette dimension dans les autres cas ($d \leq 0$).

II.3. — Montrer que toute fonction thêta qui ne s'annule en aucun point est une fonction thêta triviale au sens de l'exemple 2.2.1) (*Indication :* montrer $\log\vartheta(z)=O(1+|z|^2)$).

II.4. — Montrer qu'il existe des constantes a et c telles que l'on ait, pour tout z,

$$\sigma(z)=e^{az^2+c}\,\vartheta\begin{bmatrix}1/2\\1/2\end{bmatrix}(z).$$

II.5. — Intégrales elliptiques. Soient δ_1 et δ_2 des réels strictement positifs ; notons Γ le réseau $\delta_1\mathbf{Z}\oplus i\delta_2\mathbf{Z}$ dans $\mathbf{C}$. On pose comme d'habitude $\gamma_1=\delta_1$, $\gamma_2=i\delta_2$ et $\gamma_3=\delta_1+i\delta_2$.

a) Montrer que g_2 et g_3, ainsi que les $e_j=\wp(\gamma_j/2)$ pour $j=1,2,3$, sont réels. De plus, on a $e_1>e_3>e_2$. Montrer que Δ est strictement positif.

b) Étudier les variations de la fonction réelle de variable réelle $t \mapsto \wp(t)$.

c) Montrer l'égalité

$$\int_{e_1}^{+\infty} \frac{dt}{2\sqrt{(t-e_1)(t-e_2)(t-e_3)}} = \gamma_1.$$

d) On adopte les notations de 2.7, p. 17, et de la proposition 2.8. Montrer les égalités

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{\sqrt{1-\alpha^2\sin^2 t}} = \frac{\pi}{2}\vartheta_{00}(0)^2$$

$$\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-\beta^2t^2)}} = \frac{\pi}{2}\frac{\delta_2}{\delta_1}\vartheta_{00}(0)^2.$$

II.6. — On adopte les notations de 2.7, p. 17, et de la proposition 2.8.

a) Pour tout j et tout k dans $\{0,1\}$, montrer l'égalité

$$\vartheta_{jk}(z) = e^{2i\pi j(\frac{\tau}{8}+\frac{z}{2}+\frac{k}{4})}\vartheta_{00}(z+\frac{1}{2}(k+\tau j)).$$

b) Montrer la relation

$$\vartheta_{01}^2 = \beta\vartheta_{00}^2 + \alpha\vartheta_{11}^2$$

(*Indication :* les deux membres sont des fonctions thêta paires de même type, nulles en 0 et prenant la même valeur en $\frac{1}{2}(1+\tau)$).

c) Montrer les relations

$$\vartheta_{10}^2 = \alpha\vartheta_{00}^2 - \beta\vartheta_{11}^2 \qquad \text{et} \qquad \vartheta_{00}^2 = \beta\vartheta_{01}^2 + \alpha\vartheta_{10}^2$$

(*Indication :* appliquer la relation de b) en $z + \frac{1}{2}(1+\tau)$, puis en $z+\frac{1}{2}$, et utiliser a)).

d) En déduire la relation de Jacobi

$$\vartheta_{00}(0)^4 = \vartheta_{01}(0)^4 + \vartheta_{10}(0)^4.$$

II.7. — On adopte les notations de 2.7, p. 17, et de la proposition 2.8. On pose $q = e^{2i\pi\tau}$, de sorte que

$$\vartheta_{00}(z) = \sum_{m\in\mathbf{Z}} q^{\frac{1}{2}m^2}e^{2i\pi mz}.$$

a) Montrer qu'il existe un nombre complexe c tel que l'on ait pour tout z

$$\vartheta_{00}(z) = c\prod_{m=1}^{\infty}(1+q^{m-\frac{1}{2}}e^{2i\pi z})(1+q^{m-\frac{1}{2}}e^{-2i\pi z})$$

(*Indication :* les deux membres ont les mêmes périodes et les mêmes zéros).

b) Montrer l'égalité

$$c = \prod_{m=1}^{\infty}(1-q^m).$$

c) En déduire la relation

$$\vartheta_{11}'(0) = \pi\vartheta_{00}(0)\vartheta_{01}(0)\vartheta_{10}(0).$$

II.8. — a) Montrer que toute fonction elliptique paire est une fraction rationnelle en $\wp$. En déduire que le corps des fonctions d'une courbe elliptique est isomorphe à

$$\mathbf{C}(\wp,\wp') \simeq \mathbf{C}(X)[Y]/(Y^2-4X^3+g_2X+g_3).$$

b) Montrer que toute fonction elliptique est quotient de deux fonctions thêta.

II.9. — Montrer que l'invariant modulaire de la cubique plane d'équation $Y^2Z = X(X-Z)(X-\lambda Z)$ est

$$j = 2^8\,\frac{(\lambda^2-\lambda+1)^3}{\lambda^2(\lambda-1)^2}.$$

En déduire une expression de j en fonction de $\vartheta_{10}(0)$ et $\vartheta_{01}(0)$ (notations de 2.7, p. 17).

II.10. — Calculer directement $j(e^{2i\pi/3})$ et $j(i)$.

II.11. — On rappelle que pour tout τ dans $\mathscr{H}$, on a

$$\pi \operatorname{cotg} \pi\tau = \frac{1}{\tau} + \sum_{n\in\mathbf{Z},\, n\neq 0} \Big(\frac{1}{\tau+n} - \frac{1}{n}\Big).$$

a) Donner le développement en série entière en $q = e^{2i\pi\tau}$ des fonctions

$$\sum_{n\in\mathbf{Z}} \frac{1}{(\tau m+n)^4} \qquad \text{et} \qquad \sum_{n\in\mathbf{Z}} \frac{1}{(\tau m+n)^6}.$$

b) En déduire le développement en série entière en q des fonctions $g_2(\tau)$ et $g_3(\tau)$ (on pourra utiliser les fonctions $\sigma_r(k) = \sum_{d|k} d^r$).

c) En déduire

$$\Delta(\tau) = (2\pi)^{12} \sum_{n=1}^{\infty} \tau(n) q^n,$$

où les $\tau(n)$ sont des entiers vérifiant $\tau(1) = 1$ et $\tau(2) = -24$, et

$$j(\tau) = \frac{1}{q} + 744 + \sum_{n=1}^{\infty} c(n) q^n,$$

où les $c(n)$ sont des entiers.

II.12. — Soient τ un élément de $\mathscr{H}$ et E_τ la courbe elliptique associée.

a) Montrer que l'anneau $\operatorname{End} E_\tau$ des endomorphismes de E est une extension entière de $\mathbf{Z}$ et que

– soit $\operatorname{End} E_\tau$ est isomorphe à $\mathbf{Z}$;

– soit $\mathbf{Q}(\tau)$ est une extension quadratique imaginaire de $\mathbf{Q}$.

(*Indication :* $\operatorname{End} E_\tau$ est isomorphe au sous-anneau $\{\alpha \in \mathbf{C} \mid \alpha\Gamma_\tau \subset \Gamma_\tau\}$ de $\mathbf{C}$).

b) Soit m un entier strictement positif sans facteur carré. Montrer que l'anneau $\operatorname{End} E_{\sqrt{-m}}$ est isomorphe à $\mathbf{Z}[\sqrt{-m}]$.

c) Montrer que le groupe $\operatorname{Aut} E_\tau$ des automorphismes de E_τ est un groupe cyclique à 2, 4 ou 6 éléments (*Indication :* si α est inversible dans $\operatorname{End} E$ et différent de ± 1, montrer que α est de module 1 et de partie réelle demi-entière).

d) Si le groupe $\operatorname{Aut} E_\tau$ a 4 éléments, montrer que E_τ est isomorphe à E_i (*Indication :* choisir τ avec $|\operatorname{Re}\tau| \leq 1/2$ et $|\tau| \geq 1$).

e) Si le groupe $\operatorname{Aut} E_\tau$ a 6 éléments, montrer que E_τ est isomorphe à E_ω, avec $\omega = e^{2i\pi/3}$.

CHAPITRE III

FORMES DIFFÉRENTIELLES ET COHOMOLOGIE DE DE RHAM

Soit X une variété compacte complexe ; on s'intéresse aux conditions sous lesquelles il existe un « plongement » de X dans un espace projectif, c'est-à-dire une application holomorphe $X \to \mathbf{P}^n$ injective, et dont l'application tangente est injective en tout point (*cf.* exerc. I.4, p. 9). Nous dégageons dans ce chapitre une condition nécessaire : l'existence d'un tel plongement entraîne celle sur X d'une forme différentielle fermée de type $(1,1)$, définie positive et entière (dite « forme de Kähler entière »). Nous admettrons l'existence de la théorie de l'homologie singulière pour montrer que la forme de Fubini-Study sur l'espace projectif est d'intégrale entière sur toute sous-variété fermée.

1. Formes alternées

Soient V un espace vectoriel réel de dimension n et r un entier naturel. On note $\bigwedge^r V^*$ l'espace vectoriel des r-formes multilinéaires alternées sur V. Si $\ell_1, \dots, \ell_r$ sont des formes linéaires sur V, la r-forme multilinéaire

$$(x_1, \dots, x_r) \longmapsto \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_r} \varepsilon(\sigma)\, \ell_1(x_{\sigma(1)}) \cdots \ell_r(x_{\sigma(r)})$$

est alternée ; on la note $\ell_1 \wedge \cdots \wedge \ell_r$. On a par exemple

$$(\ell_1 \wedge \ell_2)(x, y) = \ell_1(x)\ell_2(y) - \ell_1(y)\ell_2(x).$$

Si $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de V et $(e_1^*, \dots, e_n^*)$ la base duale de V^*, les $(e_{j_1}^* \wedge \cdots \wedge e_{j_r}^*)$, pour $1 \leq j_1 < \cdots < j_r \leq n$, forment une base de $\bigwedge^r V^*$, qui est donc de dimension $\binom{n}{r}$. Tout élément ω de $\bigwedge^r V$ s'écrit

$$\omega = \sum_{1 \leq j_1 < \cdots < j_r \leq n} \omega(e_{j_1}, \dots, e_{j_r})\, e_{j_1}^* \wedge \cdots \wedge e_{j_r}^*.$$

L'espace vectoriel réel des r-formes $\mathbf{R}$-multilinéaires alternées sur V à valeurs dans $\mathbf{C}$ est muni d'une structure de $\mathbf{C}$-espace vectoriel de dimension $\binom{n}{r}$; on le note $\bigwedge^r V_{\mathbf{C}}^*$.

Soit V un espace vectoriel complexe de dimension g. L'espace vectoriel réel $V_{\mathbf{C}}^*$ des formes $\mathbf{R}$-linéaires de V dans $\mathbf{C}$ est muni d'une structure d'espace vectoriel complexe de dimension $2g$; les formes $\mathbf{C}$-antilinéaires sur V forment un sous-espace vectoriel complexe de dimension g noté $\overline{V}^*$. On a $V_{\mathbf{C}}^* \simeq V^* \oplus \overline{V}^*$. Si $(e_1^*, \dots, e_g^*)$ est une base de V^*, la famille $(\overline{e}_1^*, \dots, \overline{e}_g^*)$ est une base de $\overline{V}^*$.

Pour tous entiers positifs p et q de somme r, on note $\bigwedge^{p,q} V^*$ le sous-espace vectoriel complexe de $\bigwedge^r V_{\mathbf{C}}^*$ engendré par les $\ell_1 \wedge \cdots \wedge \ell_p \wedge \ell_1' \wedge \cdots \wedge \ell_q'$, pour $\ell_1, \dots, \ell_p$ dans V^* et $\ell_1', \dots, \ell_q'$ dans $\overline{V}^*$. Les formes dans $\bigwedge^{p,q} V^*$ sont dites de type (p,q). Les formes de type $(r,0)$ sont les r-formes alternées $\mathbf{C}$-multilinéaires. On a une décomposition

$$\bigwedge^r V_{\mathbf{C}}^* = \bigoplus_{p+q=r} \bigwedge^{p,q} V^* \tag{6}$$

en somme directe de sous-espaces vectoriels complexes. Les formes

$$e_{j_1}^* \wedge \cdots \wedge e_{j_p}^* \wedge \overline{e}_{k_1}^* \wedge \cdots \wedge \overline{e}_{k_q}^*,$$

pour $1 \leq j_1 < \cdots < j_p \leq g$ et $1 \leq k_1 < \cdots < k_q \leq g$, forment une base de l'espace vectoriel complexe $\bigwedge^{p,q} V^*$.

1.1. — Regardons de plus près ce qui ce passe pour $r = 2$. On peut caractériser les formes de type $(1,1)$ par la propriété

$$\omega(ix, iy) = \omega(x, y)$$

pour tout x et tout y dans V (les formes ω de type $(2,0)$ ou $(0,2)$ satisfont à $\omega(ix, iy) = -\omega(x,y)$). Pour qu'une forme ω de type $(1,1)$, qui s'écrit en coordonnées

$$\omega = i \sum_{j,k} \omega_{jk}\, e_j^* \wedge \overline{e}_k^*,$$

soit *réelle*, c'est-à-dire qu'elle soit à valeurs dans $\mathbf{R}$, il faut et il suffit que $\omega = \overline{\omega}$, c'est-à-dire que la matrice (ω_{jk}) soit hermitienne. De façon plus intrinsèque, on peut associer à toute forme ω réelle de type $(1,1)$ une forme hermitienne H sur V par la formule

$$H(x,y) = \omega(x, iy) + i\omega(x,y)$$

($\mathbf{C}$-linéaire à droite et $\mathbf{C}$-antilinéaire à gauche). Inversement, à toute forme hermitienne H sur V, on associe la forme alternée $\operatorname{Im} H$, réelle de type $(1,1)$.

1.2. — On dit que ω est *définie positive* si H l'est, c'est-à-dire si $\omega(x, ix) > 0$ pour tout x non nul ; on dit que ω est *positive* si $\omega(x, ix) \geq 0$ pour tout x.

2. Formes différentielles et cohomologie de de Rham

Soit V un espace vectoriel réel de dimension n. On appelle *r-forme différentielle* réelle (resp. complexe) sur un ouvert U de V une fonction ω de classe $\mathscr{C}^\infty$ de U à valeurs dans $\bigwedge^r V^*$ (resp. dans $\bigwedge^r V_{\mathbf{C}}^*$). Si on choisit des coordonnées $x_1, \dots, x_n$ sur V (c'est-à-dire en fait une base de V^*), on notera $dx_1, \dots, dx_n$ leurs différentielles, considérées comme des éléments de V^* (ce sont à strictement parler des fonctions constantes de V dans V^*). Toute r-forme différentielle réelle (resp. complexe) s'écrit alors

$$\omega(x) = \sum_{1 \leq j_1 < \cdots < j_r \leq n} \omega_{j_1 \cdots j_r}(x)\, dx_{j_1} \wedge \cdots \wedge dx_{j_r},$$

où les $\omega_{j_1 \cdots j_r}$ sont des fonctions de U dans $\mathbf{R}$ (resp. dans $\mathbf{C}$) de classe $\mathscr{C}^\infty$.

Soit U un ouvert de V, soit U' un ouvert d'un espace vectoriel réel V' de dimension n' et soit $F : U \to U'$ une application de classe $\mathscr{C}^\infty$. Pour toute forme différentielle ω sur U', on définit la forme différentielle $F^*\omega$ sur U par [1]

$$F^*\omega(x)(v_1, \ldots, v_r) = \omega(F(x))(T_xF(v_1), \ldots, T_xF(v_r)).$$

En coordonnées, si $F = (f_1, \ldots, f_{n'})$ et $\omega = \sum \omega_{j_1 \cdots j_r}\, dx'_{j_1} \wedge \cdots \wedge dx'_{j_r}$, on a

$$F^*\omega = \sum (\omega_{j_1 \cdots j_r} \circ F)\, df_{j_1} \wedge \cdots \wedge df_{j_r}.$$

Soit $f : U \to \mathbf{C}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$; sa différentielle en un point de U est une application $\mathbf{R}$-linéaire de V dans $\mathbf{C}$. C'est la 1-forme différentielle complexe df donnée dans un système de coordonnées par

$$df(x) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}(x)\, dx_j.$$

Plus généralement, la différentielle d'une r-forme $\omega = \sum \omega_{j_1 \cdots j_r}\, dx_{j_1} \wedge \cdots \wedge dx_{j_r}$ est par définition la $(r+1)$-forme

$$d\omega = \sum d\omega_{j_1 \cdots j_r} \wedge dx_{j_1} \wedge \cdots \wedge dx_{j_r}.$$

On vérifie que cette définition est indépendante du choix des coordonnées ([**BT**, p. 20]). Dans le cas d'une 1-forme $\omega = \sum_{j=1}^{n} \omega_j dx_j$, cela donne

$$d\omega = \sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial \omega_j}{\partial x_k}\, dx_k \wedge dx_j = \sum_{1 \leq j < k \leq n} \Big(\frac{\partial \omega_k}{\partial x_j} - \frac{\partial \omega_j}{\partial x_k} \Big)\, dx_j \wedge dx_k.$$

On dit qu'une forme différentielle ω est *fermée* si $d\omega = 0$; elle est *exacte* s'il existe une forme η telle que $\omega = d\eta$. On vérifie que $d^2 = 0$, c'est-à-dire que toute forme différentielle exacte est fermée.

***Lemme de Poincaré 2.1.* —** *Toute forme différentielle fermée sur un ouvert étoilé de $\mathbf{R}^n$ est exacte* [2].

1. On rappelle qu'on a noté $T_xF : V \to V'$ l'application tangente (c'est-à-dire la différentielle) de l'application F en un point x de U.

2. On trouvera une autre démonstration de ce théorème par récurrence sur n dans [**BT**, cor. 4.1.1] lorsque l'ouvert étoilé est $\mathbf{R}^n$ tout entier.

Démonstration. — Faisons-le d'abord pour une 1-forme $\omega = \sum_{j=1}^{n} \omega_j dx_j$ fermée définie sur un ouvert étoilé contenant l'origine. On a $\dfrac{\partial \omega_j}{\partial x_k} = \dfrac{\partial \omega_k}{\partial x_j}$ pour tout j et tout k. Posons

$$f(x) = \int_0^1 \omega(tx)(x)\, dt = \int_0^1 \sum_{j=1}^{n} \omega_j(tx) x_j \, dt$$

(c'est l'intégrale de ω sur le segment joignant l'origine à x ; *cf.* ex. 3.1). On a

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x_k}(x) &= \int_0^1 \Big(\omega_k(tx) + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \omega_j}{\partial x_k}(tx) t x_j\Big) dt\\ &= \int_0^1 \Big(\omega_k(tx) + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \omega_k}{\partial x_j}(tx) t x_j\Big) dt = \big[t\omega_k(tx)\big]_0^1 = \omega_k(x),\end{aligned}$$

ce qui démontre le lemme pour les 1-formes. Dans le cas général, si ω est une r-forme, on pose

$$\eta(x)(x_1, \dots, x_{r-1}) = \int_0^1 t^{r-1} \omega(tx)(x, x_1, \dots, x_{r-1}) dt.$$

On vérifie que $\omega = d\eta$ si ω est fermée (*cf.* [**C1**, pp. 43–45], où l'auteur fait le commentaire révélateur suivant : ≪ la démonstration peut être laissée de côté par un lecteur qui a peur des calculs ≫). □

Il y a des ouverts de $\mathbf{R}^n$ sur lesquels la conclusion du lemme n'est plus vraie. Par exemple, la forme différentielle $\dfrac{x dy - y dx}{x^2 + y^2}$ est fermée sur $\mathbf{R}^2 \smallsetminus \{0\}$, mais n'est pas exacte.

2.2. — On peut définir la notion de forme différentielle sur une variété différentiable M. On procède de la façon suivante : M est recouverte par des cartes $\varphi_j : U_j \to M$; on se donne la restriction de la forme à chaque ouvert de carte, c'est-à-dire une r-forme ω_j sur l'ouvert U_j, avec la condition de compatibilité $(\varphi_k^{-1}\varphi_j)^*(\omega_k) = \omega_j$.

Définition 2.3. — Soit M une variété différentiable ; on appelle r-ième groupe de cohomologie de de Rham de M l'espace vectoriel complexe

$$H^r_{\mathrm{DR}}(M) = \{r\text{-formes différentielles complexes fermées sur } M\}/\{r\text{-formes exactes}\}.$$

Le lemme de Poincaré dit que les groupes de cohomologie de de Rham d'un ouvert étoilé de $\mathbf{R}^n$ sont tous nuls. En revanche, $H^1_{\mathrm{DR}}(\mathbf{R}^2 \smallsetminus \{0\})$ n'est pas nul (il est de dimension 1 ; *cf.* ex. 3.3.1)).

Si $F : M \to M'$ est une application de classe $\mathscr{C}^\infty$ entre variétés différentiables, on a $F^*(d\omega) = d(F^*\omega)$ ([**BT**, prop. 2.1, p. 19]), de sorte que F induit des applications $\mathbf{C}$-linéaires

$$F^* \colon H^r_{\mathrm{DR}}(M') \longrightarrow H^r_{\mathrm{DR}}(M).$$

2.4. — Supposons maintenant que V soit un espace vectoriel *complexe* de dimension g. On appelle r-forme différentielle *de type* (p, q) sur un ouvert U de V une fonction ω de classe $\mathscr{C}^\infty$ de U à valeurs dans $\bigwedge^{p,q} V^*$. Si on choisit des coordonnées $z_1, \ldots, z_g$ sur V, on notera $dz_1, \ldots, dz_g$ leurs différentielles, considérées comme des formes constantes de type $(1, 0)$. On notera aussi dx_j et dy_j (ou parfois aussi dx_{g+j}) les 1-formes réelles définies par $dz_j = dx_j + i dy_j$.

2.5. — Une fonction $f : U \to \mathbf{C}$ de classe $\mathscr{C}^\infty$ est holomorphe si et seulement si sa différentielle est $\mathbf{C}$-linéaire, c'est-à-dire si $\dfrac{\partial f}{\partial y_j} = i \dfrac{\partial f}{\partial x_j}$ pour tout j (conditions de Cauchy-Riemann), puisque ces conditions sont satisfaites par les formes linéaires dz_j. Cela équivaut à dire que la 1-forme df est de type $(1, 0)$.

2.6. — Si F est une application holomorphe entre ouverts d'espaces vectoriels complexes, le fait que dF soit $\mathbf{C}$-linéaire entraîne que F^* conserve le type des formes. On peut donc, en suivant la procédure ci-dessus, définir les formes de type (p, q) sur une variété complexe, puisque les changements de cartes sont holomorphes. On vérifie que si ω est une forme de type (p, q) sur une variété complexe, $d\omega$ se décompose en $\partial\omega + \overline{\partial}\omega$, où $\partial\omega$ est de type $(p+1, q)$ et $\overline{\partial}\omega$ de type $(p, q+1)$. Par exemple, si $\omega = \sum_{k=1}^g \omega_k dz_k$ est de type $(1, 0)$, on a

$$\partial\omega = \sum_{j,k=1}^{g} \frac{\partial \omega_k}{\partial z_j}\, dz_j \wedge dz_k$$

et

$$\overline{\partial}\omega = \sum_{j,k=1}^{g} \frac{\partial \omega_k}{\partial \overline{z}_j}\, d\overline{z}_j \wedge dz_k.$$

2.7. — Enfin, on dira qu'une forme différentielle réelle de type $(1, 1)$ sur une variété complexe est (définie) positive si elle satisfait en tout point à la propriété de 1.2 ; sa restriction à une sous-variété est encore (définie) positive.

3. Intégration des formes différentielles, formes entières

Soient V un espace vectoriel réel orienté de dimension n et ω une n-forme différentielle à support compact dans V. Dans un système direct de coordonnées, ω s'écrit

$$\omega(x) = f(x)\, dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n.$$

On pose

$$\int_V \omega = \int_V f(x)\, dx_1 \cdots dx_n.$$

Cette expression est invariante par difféomorphisme direct (utiliser le théorème de changement de variable dans les intégrales ; *cf.* [**BT**, I, § 3]).

Soient M une variété orientée de dimension n et ω une n-forme différentielle définie sur M, à support compact. On cherche à définir l'intégrale de ω sur M. En utilisant une partition de l'unité ([**BT**, pp. 21–22]), on se ramène au cas où le support de ω est compact, contenu dans l'image ouverte d'une carte orientée $F\colon U \to M$. On pose alors

$$\int_M \omega = \int_U F^*\omega;$$

de nouveau, c'est indépendant du choix de la carte orientée.

Si Z est une sous-variété orientée de M de dimension r et ω une r-forme différentielle à support compact définie sur un ouvert de M contenant Z, on pose

$$\int_Z \omega = \int_Z \iota^*\omega,$$

où ι est l'injection de Z dans M.

***Exemple 3.1.* —** Soit $\omega = \sum \omega_j dx_j$ une 1-forme sur V. Pour tout x dans V, l'intégrale de ω sur le segment (ouvert) joignant 0 à x est

$$\int_0^1 \sum \omega_j(tx)x_j dt.$$

***Théorème 3.2* (Formule de Stokes). —** *Soient M une variété orientée de dimension n et ω une $(n-1)$-forme sur M à support compact. On a*

$$\int_M d\omega = 0.$$

Démonstration. — Grâce à la linéarité de l'intégrale et à l'existence de partitions de l'unité, il suffit de traiter le cas $M = \mathbf{R}^n$ et $\omega = f\, dx_2 \wedge \cdots \wedge dx_n$, avec f fonction $\mathscr{C}^\infty$ à support compact. On a alors $d\omega = \partial f/\partial x_1\, dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$ et, par le théorème de Fubini,

$$\int_{\mathbf{R}^n} d\omega = \int \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, \ldots, x_n)\, dx_1 \right) dx_2 \cdots dx_n$$

qui est nul puisque

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, \ldots, x_n)\, dx_1 = \lim_{x_1 \to +\infty} f(x_1, \ldots, x_n) - \lim_{x_1 \to -\infty} f(x_1, \ldots, x_n)$$

et que f est à support compact. □

Soient M une variété orientée et Z une sous-variété compacte orientée de dimension r. Si ω est une r-forme exacte, la formule de Stokes entraîne $\int_Z \omega = 0$. Cela permet de définir une forme linéaire

$$\eta_Z\colon [\omega] \longmapsto \int_Z \omega$$

sur $H^r_{\mathrm{DR}}(M)$.

***Exemples 3.3.* —** 1) L'application $\eta_{S^1}\colon [\omega] \mapsto \int_{S^1} \omega$ induit un isomorphisme de l'espace vectoriel $H^1_{\mathrm{DR}}(\mathbf{R}^2 \smallsetminus \{(0,0)\})$ sur $\mathbf{C}$. En effet, si $\int_{S^1} \omega = 0$, on peut définir une fonction $f\colon \mathbf{C}^* \to \mathbf{C}$ en prenant pour $f(re^{i\theta})$ l'intégrale de ω sur un arc de cercle joignant 1 à $e^{i\theta}$

(elle ne dépend pas du choix de cet arc), puis sur le segment joignant $e^{i\theta}$ à $re^{i\theta}$. On vérifie comme dans la démonstration du lemme 2.1 que $df = \omega$.

2) On montre que $H^r_{\mathrm{DR}}(\mathbf{P}^n)$ est de dimension 1 si r est pair, positif et inférieur à $2n$; nul sinon [(3)].

3.4. — Nous aurons par la suite besoin de la notion de forme différentielle *entière* sur une variété compacte. Nous n'avons malheureusement pas les outils techniques nécessaires pour donner une définition correcte. Nous nous contenterons donc provisoirement de la règle suivante : *soit M un espace projectif ou un tore complexe ; on dira qu'une r-forme différentielle ω sur M est* entière *si, pour toute sous-variété fermée orientée Z de M de dimension r, l'intégrale $\int_Z \omega$ est entière* [(4)]. Si X est un tore complexe qui est une sous-variété d'un espace projectif $\mathbf{P}^n$, la restriction à X d'une classe entière sur $\mathbf{P}^n$ est une classe entière sur X.

Cette condition ne dépend que de la classe de ω dans $H_{\mathrm{DR}}(M)$; on parlera donc de classe de cohomologie de de Rham *entière*. Elle est bien sûr impossible à vérifier telle quelle dans la pratique. Nous admettrons provisoirement le critère suivant, et renvoyons à la note 8, p. 59, pour une justification.

Critère 3.5. — *Pour qu'une 2-forme sur $\mathbf{P}^n$ soit entière, il faut et il suffit que son intégrale sur une droite projective soit entière.*

Nous conclurons cette section en remarquant que l'espace vectoriel réel sous-jacent à un espace vectoriel complexe a une orientation canonique pour laquelle, si $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base complexe quelconque, la base réelle $(e_1, ie_1, \ldots, e_n, ie_n)$ est directe. En particulier, toute variété complexe est canoniquement orientée.

4. Formes différentielles sur les tores complexes

Soient $X = V/\Gamma$ un tore complexe de dimension g et $\pi \colon V \to X$ la surjection canonique. Pour tout élément γ de Γ, la composée de π avec la translation $\tau_\gamma \colon x \mapsto x - \gamma$ est égale à π. Si ω est une forme différentielle sur X, l'image inverse $\pi^*\omega$ doit donc être une forme différentielle sur V invariante par tous les τ_γ^* ; inversement, on vérifie qu'une forme de ce type ≪ provient ≫ de X : soit Ω un ouvert Γ-petit (au sens de I.2.1, p. 6), de sorte que $\pi|_\Omega$ est une carte de X ; si on pose $\omega_\Omega = \omega|_\Omega$, les conditions de compatibilité de 2.2 sont vérifiées puisque

3. On trouvera une démonstration dans [**BT**, pp. 172–173] : on utilise le fait que la cohomologie de de Rham est la cohomologie du faisceau constant $\underline{\mathbf{C}}$ (*cf.* (14, p. 59)), puis la fibration localement triviale $\mathbf{C}^{n+1} \smallsetminus \{0\} \to \mathbf{P}^n$ de fibre $\mathbf{C}^*$, qui permet de calculer $H(\mathbf{P}^n, \underline{\mathbf{C}})$ par une suite spectrale.

4. La ≪ bonne ≫ définition (*cf.* déf. V.5.5, p. 59) est la suivante : on dit qu'une r-forme ω sur une variété compacte orientée M est *entière* si son intégrale sur tout r-cycle (au sens de la théorie de l'homologie singulière) de M est entière. Dans le cas où le groupe d'homologie $H_r(M, \mathbf{Z})$ est engendré par des classes de sous-variétés compactes, cette définition coïncide avec la nôtre ; c'est le cas si M est un tore complexe ou un espace projectif, mais pas en général (c'est ce genre de pathologie qui a donné naissance à la théorie du cobordisme de Thom). Nous reviendrons sur ce point dans la note 8, p. 59.

les changements de cartes sont des translations. En d'autres termes, les formes différentielles sur X sont les formes différentielles sur V invariantes par Γ, c'est-à-dire les

$$\omega = \sum_{1\le j_1<\cdots<j_r\le 2g} \omega_{j_1\cdots j_r}\, dx_{j_1}\wedge\cdots\wedge dx_{j_r},$$

où les fonctions $\omega_{j_1\cdots j_r}$ sont Γ-périodiques. Cela inclut en particulier les formes *constantes*, c'est-à-dire celles pour lesquelles les $\omega_{j_1\cdots j_r}$ sont des fonctions constantes. Les formes constantes sont par ailleurs fermées.

Lemme 4.1.* — *Soient ω une forme différentielle fermée sur un tore complexe X et τ une translation de X. La forme $\tau^*\omega - \omega$ est exacte.

Démonstration. — Ecrivons $X = V/\Gamma$ et $\tau(x) = x + a$ sur V ; posons, pour tous $x, x_1, \dots, x_r$ dans V,

$$\eta_a(x)(x_1,\dots,x_{r-1}) = \int_0^1 \omega(x+ta)(a, x_1,\dots,x_{r-1})\, dt,$$

où on voit ω comme une forme différentielle Γ-périodique sur V. La $(r-1)$-forme η_a sur V est bien Γ-périodique. Vérifions que $d\eta_a(x) = \omega(x+a) - \omega(x)$; nous nous limiterons [(5)] au cas $r = 1$. Écrivons $\omega = \sum_j \omega_j\, dx_j$ avec $\dfrac{\partial\omega_j}{\partial x_k} = \dfrac{\partial\omega_k}{\partial x_j}$ puisque ω est fermée. La fonction η_a s'écrit

$$\eta_a(x) = \int_0^1 \sum_j \omega_j(x+ta) a_j\, dt,$$

---

5. Pour le lecteur friand de formules, la démonstration dans le cas général procède ainsi : avec les notations de [**C1**], on a

$$\begin{aligned} d\eta_a(x)(x_1,\dots,x_r) &= \sum_{j=1}^r (-1)^{j-1}(\eta_a'(x)\cdot x_j)(x_1,\dots,\hat{x}_j,\dots,x_r)\\ &= \sum_{j=1}^r (-1)^{j-1}\int_0^1 (\omega'(x+ta)\cdot x_j)(a, x_1,\dots,\hat{x}_j,\dots,x_r)\, dt. \end{aligned}$$

Or ω est fermée, de sorte que

$$\begin{aligned} 0 &= d\omega(x+ta)(a, x_1,\dots,x_r)\\ &= (\omega'(x+ta)\cdot a)(x_1,\dots,x_r) - \sum_{j=1}^r (-1)^{j-1}(\omega'(x+ta)\cdot x_j)(a, x_1,\dots,\hat{x}_j,\dots,x_r); \end{aligned}$$

d'où l'on déduit

$$\begin{aligned} d\eta_a(x)(x_1,\dots,x_r) &= \int_0^1 (\omega'(x+ta)\cdot a)(x_1,\dots,x_r)\, dt\\ &= \Big[\omega(x+ta)(x_1,\dots,x_r)\Big]_{t=0}^{t=1} = \omega(x+a) - \omega(x). \end{aligned}$$

de sorte que

$$\frac{\partial \eta_a}{\partial x_k}(x) = \int_0^1 \sum_j \frac{\partial \omega_j(x+ta)}{\partial x_k}\, a_j\, dt = \int_0^1 \sum_j \frac{\partial \omega_k(x+ta)}{\partial x_j}\, a_j\, dt$$
$$= \Big[\omega_k(x+ta)\Big]_{t=0}^{t=1} = \omega_k(x+a) - \omega_k(x)$$

et $d\eta_a(x) = \sum_k \dfrac{\partial \eta_a}{\partial x_k}(x)\, dx_k = \omega(x+a) - \omega(x)$. □

Soit Π un pavé de V de côtés une $\mathbf{Z}$-base de Γ ; pour toute fonction $g\colon V \to \mathbf{C}$, on définit sa moyennée $\widetilde{g}\colon V \to \mathbf{C}$ par

$$\widetilde{g}(z) = \frac{\int_\Pi g(z+y)\, dy}{\int_\Pi dy}.$$

Si g est Γ-périodique, $\widetilde{g}$ est constante. Si $\omega = \sum \omega_{j_1\cdots j_r}\, dx_{j_1} \wedge \cdots \wedge dx_{j_r}$ est une forme différentielle fermée sur X, le lemme entraîne que la moyennée

$$\widetilde{\omega} = \sum \widetilde{\omega}_{j_1\cdots j_r}\, dx_{j_1} \wedge \cdots \wedge dx_{j_r}$$

est une forme constante sur X cohomologue à ω, puisque

$$\begin{aligned}\widetilde{\omega}(z) - \omega(z) &= \frac{\int_\Pi (\tau_{-y}^* \omega(z) - \omega(z))\, dy}{\int_\Pi dy} \\ &= \frac{\int_\Pi (d\eta_y)(z)\, dy}{\int_\Pi dy} \\ &= \frac{d\Big(\int_\Pi \eta_y(z)\, dy\Big)}{\int_\Pi dy}.\end{aligned}$$

4.2. — On a donc montré que toute forme différentielle fermée sur un tore complexe est cohomologue à une forme constante (voir aussi l'exercice III.1 pour une autre démonstration). On remarquera que toute forme réelle fermée de type $(1,1)$ définie positive est cohomologue à une forme réelle de type $(1,1)$ définie positive constante (donc fermée).

Proposition 4.3. — *Soit $X = V/\Gamma$ un tore complexe. L'application $\bigwedge^r V_{\mathbf{C}}^* \to H^r_{\mathrm{DR}}(X)$ construite ci-dessus est bijective.*

Démonstration. — On vient de voir que cette application est surjective. Fixons une base $(e_1, \dots, e_{2g})$ de Γ. L'intégrale d'une forme constante $\sum \omega_{j_1\cdots j_r}\, dx_{j_1} \wedge \cdots \wedge dx_{j_r}$ sur l'image (lisse compacte sans bord) dans X du pavé de côtés $e_{j_1}, \dots, e_{j_r}$ vaut $\omega_{j_1\cdots j_r}$, donc une telle forme n'est exacte que si elle est nulle. □

4.4. — La démonstration de la proposition montre aussi qu'une r-forme constante entière (au sens de 3.4) prend des valeurs entières sur les r-uplets d'éléments de Γ [(6)].

6. La réciproque est vraie : la variété X est difféomorphe à $\mathbf{R}^{2g}/\mathbf{Z}^{2g}$, donc à $(\mathbf{R}/\mathbf{Z})^{2g}$; la formule de Künneth ([**BT**, prop. 9.12]) entraîne que le groupe d'homologie $H_r(X, \mathbf{Z})$ est libre de rang $\binom{2g}{r}$, engendré par

5. Formes différentielles sur les espaces projectifs, formes de Kähler

Une forme différentielle ω sur l'espace projectif $\mathbf{P}^n$ se remonte en une forme différentielle sur $\mathbf{C}^{n+1} \setminus \{0\}$ invariante par l'action de $\mathbf{C}^*$. Si

$$\omega = \sum \omega_{j_1 \cdots j_p k_1 \cdots k_q}\, dz_{j_1} \wedge \cdots \wedge dz_{j_p} \wedge d\overline{z}_{k_1} \wedge \cdots \wedge d\overline{z}_{k_q}$$

est une forme différentielle de type (p, q), cela signifie

$$\omega_{j_1 \cdots j_p k_1 \cdots k_q}(tz) = \frac{1}{t^p \overline{t}^q}\, \omega_{j_1 \cdots j_p k_1 \cdots k_q}(z)$$

pour tout complexe t non nul [7].

Exemple 5.1. — La forme différentielle

$$\frac{i}{2\pi}\, \frac{\|z\|^2 \Big(\sum_{j=0}^n dz_j \wedge d\overline{z}_j\Big) - \Big(\sum_{j=0}^n \overline{z}_j dz_j\Big) \wedge \Big(\sum_{k=0}^n z_k d\overline{z}_k\Big)}{\|z\|^4},$$

où $\|z\| = \sqrt{\sum_{j=0}^n z_j \overline{z}_j}$, définit par l'exercice III.2 une 2-forme différentielle ω_{FS} réelle de type $(1, 1)$ sur $\mathbf{P}^n$, dite forme de Fubini-Study. On vérifie au prix d'un petit calcul qu'elle est fermée et invariante par l'action du groupe unitaire $U(n+1)$ (ce petit calcul se simplifie grandement si l'on remarque que $\omega_{FS}(z) = \frac{i}{2\pi} \partial\overline{\partial} \log \|z\|^2$; *cf.* 2.6).

La forme ω_{FS} est *définie positive*. Vue son invariance sous $U(n+1)$, il suffit de le vérifier en un point ; comme

$$\omega_{FS}(1, 0, \ldots, 0) = \frac{i}{2\pi} \sum_{j=0}^n dz_j \wedge d\overline{z}_j,$$

la propriété est évidente.

La forme de Fubini-Study est aussi entière. Il suffit par le critère 3.5 de vérifier que

$$I = \int_{\mathbf{P}^1} \omega_{FS}$$

est entier. On choisit la droite projective paramétrée par $F\colon z \mapsto (1, z, 0, \ldots, 0)$; on a

$$F^*\omega_{FS}(z) = \frac{i}{2\pi} \Big(\frac{dz \wedge d\overline{z}}{(1 + |z|^2)^2} \Big),$$

d'où

$$\begin{aligned} I &= \frac{i}{2\pi} \int_{\mathbf{C}} \frac{dz \wedge d\overline{z}}{(1 + |z|^2)^2} = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbf{R}^2} \frac{dxdy}{(1 + x^2 + y^2)^2} \\ &= \frac{1}{\pi} \iint \frac{r dr d\theta}{(1 + r^2)^2} = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1 + t)^2} = 1. \end{aligned}$$

---

les classes des sous-variétés de X considérées dans la démonstration de la proposition. De façon plus intrinsèque, on a $H_r(V/\Gamma, \mathbf{Z}) \simeq \bigwedge^r \Gamma$.

7. Une forme différentielle sur $\mathbf{C}^{n+1} \setminus \{0\}$ invariante par l'action de $\mathbf{C}^*$ ne provient pas nécessairement d'une forme différentielle sur $\mathbf{P}^n$; il y a une condition supplémentaire (*cf.* exerc. III.2).

Cela nous permet d'énoncer une condition nécessaire pour qu'une variété complexe se plonge dans un espace projectif $\mathbf{P}^n$.

***Théorème 5.2.* —** *Si X est une variété complexe compacte qui est une sous-variété d'un espace projectif, il existe sur X une forme différentielle fermée de type $(1,1)$, définie positive et entière.*

Démonstration. — La forme de Fubini-Study sur $\mathbf{P}^n$ est fermée de type $(1,1)$, définie positive et entière. Elle se restreint sur X en une forme qui a les mêmes propriétés. □

5.3. — Une forme différentielle fermée, de type $(1,1)$ et définie positive s'appelle une *forme de Kähler*. Par 4.2, une forme de Kähler entière sur un tore complexe V/Γ est cohomologue à une forme de Kähler entière constante qui correspond, par 4.4, à une *forme* $\mathbf{R}$*-bilinéaire alternée ω sur V, entière sur Γ, vérifiant $\omega(ix,iy)=\omega(x,y)$ et $\omega(x,ix)>0$* pour tout x non nul et tout y dans V.

***Exemple 5.4.* —** Soit τ un nombre complexe de partie imaginaire strictement positive. La forme $\mathbf{R}$-bilinéaire alternée

$$\omega(\tau m+n,\tau m'+n')=m'n-mn'$$

sur $\mathbf{R}^2$ est entière sur le réseau Γ_τ. Si $\tau=a+ib$, on a

$$i(\tau m+n)=-bm+i(am+n)=\tau\frac{am+n}{b}-bm-\frac{a(am+n)}{b},$$

de sorte que

$$\omega(\tau m+n,i\tau m+in)=\frac{(am+n)^2+b^2m^2}{b}>0\,,$$

puisque $b>0$. On vérifie de même que $\omega(i(\tau m+n),i(\tau m'+n'))=\omega(\tau m+n,\tau m'+n')$, ce qui prouve que ω est une forme de Kähler entière. La forme hermitienne sur $\mathbf{C}$ associée comme en 1.1 est

$$H(z_1,z_2)=\frac{\overline{z}_1z_2}{\operatorname{Im}\tau}$$

(il suffit de vérifier que $\operatorname{Im}H$ et ω coïncident sur $(1,\tau)$).

Exercices

III.1. — Soit ω une 2-forme fermée sur un tore complexe $X=V/\Gamma$. Nous voulons donner une autre démonstration du fait que ω est cohomologue à une forme constante (*cf.* 4.2). On choisit une base de Γ ; dans les coordonnées correspondantes, on a

$$\omega(x)=\sum_{j<k}\omega_{jk}(x)dx_j\wedge dx_k,$$

où les ω_{jk} sont des fonctions $\mathbf{Z}^{2g}$-périodiques.

a) Montrer que chaque ω_{jk} a un développement en série de Fourier

$$\omega_{jk}(x)=\sum_{m\in\mathbf{Z}^g}\omega_{jk}^{(m)}e^{2i\pi\,{}^tmx}.$$

On pose, pour tout $m \in \mathbf{Z}^g$,
$$\omega^{(m)}(x) = \sum_{j<k} \omega_{jk}^{(m)} dx_j \wedge dx_k.$$
Montrer que $\omega^{(m)}$ est une 2-forme fermée sur X.

b) Montrer que $\omega^{(m)}$ est une 2-forme exacte sur X pour tout $m \neq 0$. Conclure.

c) On suppose que ω n'a pas de terme de type $(0,2)$. Montrer qu'il existe une 1-forme η sur X de type $(1,0)$ telle que $\omega = \omega^{(0)} + d\eta$.

III.2. — Soit $p\colon \mathbf{C}^{n+1} \smallsetminus \{0\} \to \mathbf{P}^n$ la surjection canonique.

a) Soit ω une r-forme différentielle complexe sur $\mathbf{P}^n$. Montrer que $p^*\omega(z)(v_1, \dots, v_r)$ est nul dès que v_1 est colinéaire à z ou à $\overline{z}$.

b) Inversement, supposons donnée une r-forme différentielle complexe $\widetilde{\omega}$ sur $\mathbf{C}^{n+1} \smallsetminus \{0\}$ invariante par l'action de $\mathbf{C}^*$ et possédant en plus la propriété du a). Soient $\varphi_j : \mathbf{C}^n \xrightarrow{\iota_j} \widetilde{U}_j \to U_j$ les cartes standard du § I.3, p. 8. Montrer que les formes différentielles $\iota_j^*\widetilde{\omega}$ vérifient les conditions de recollement de *loc.cit.*, donc définissent une forme différentielle ω sur $\mathbf{P}^n$ qui vérifie $p^*\omega = \widetilde{\omega}$.

III.3. — Identifions $\mathbf{C}^g$ à $\mathbf{R}^{2g}$. À toute matrice réelle M inversible d'ordre $2g$, on associe le réseau Γ_M de $\mathbf{C}^g$ engendré par les colonnes de M. On paramètre ainsi l'ensemble des réseaux dans $\mathbf{C}^g$ par l'ouvert (pour la topologie de Zariski réelle) dense $U = \mathrm{GL}_g(\mathbf{R})$ de $\mathbf{R}^{4g^2}$.

a) Montrer qu'il existe une famille dénombrable $(Z_n)_{n\in\mathbf{N}}$ d'hypersurfaces algébriques réelles de $\mathbf{R}^{4g^2}$ telle que, pour toute matrice M dans $U \smallsetminus \bigcup_{n\in\mathbf{N}} Z_n$, les mineurs 2×2 de M^{-1} soient linéairement indépendants sur $\mathbf{Z}$.

b) Pour $g \geq 2$, en déduire que pour toute matrice M dans $U \smallsetminus \bigcup_{n\in\mathbf{N}} Z_n$, toute forme $\mathbf{R}$-bilinéaire alternée entière sur Γ_M de type $(1,1)$ est nulle.

c) Conclure qu'un tore complexe « très général » (en un sens que l'on précisera) de dimension ≥ 2 ne se plonge pas dans un espace projectif de façon holomorphe (*Indication :* on rappelle qu'une intersection dénombrable d'ouverts denses de $\mathbf{R}^N$ est dense).

CHAPITRE IV

FONCTIONS THÊTA ET DIVISEURS

Nous voulons retrouver de façon différente, plus ≪ terre-à-terre ≫, le résultat principal du chapitre précédent, à savoir l'existence d'une forme de Kähler entière sur une sous-variété complexe d'un espace projectif (th. III.5.2, p. 35), dans le cas particulier des tores complexes ; on notera qu'une telle forme est dans ce cas un objet très simple, à savoir une forme $\mathbf{R}$-bilinéaire sur le revêtement universel, entière sur le réseau, qui possède en plus certaines propriétés vis-à-vis de la structure complexe (prop. 1.3 et 1.6). Nous obtenons d'ailleurs dans ce cas un résultat plus précis (cor. 3.5) et déterminons la structure du corps des fonctions méromorphes d'un tore complexe (cor. 3.3). Notre approche s'appuie sur la notion de diviseur sur une variété complexe (qui généralise la définition de II.2.3, p. 16) et sur l'étude des fonctions thêta sur un tore complexe, notion qui généralise celle du § II.2, p. 15 ; elle est calquée sur l'approche de [**SD**], qui elle-même suit les travaux de Poincaré et Weil.

1. Fonctions thêta

Par analogie avec le cas de la dimension 1, nous poserons la définition suivante.

Définition 1.1. — Soient V un espace vectoriel et Γ un réseau dans V. On appelle *fonction thêta* associée à Γ toute fonction entière ϑ sur V non identiquement nulle telle qu'il existe, pour chaque élément γ de Γ, une forme linéaire a_γ et une constante b_γ satisfaisant à

$$\vartheta(z+\gamma) = e^{2i\pi(a_\gamma(z)+b_\gamma)}\vartheta(z)$$

pour tout z dans V. La famille $(a_\gamma, b_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ est appelée le *type* de ϑ.

Une fonction thêta est donc par définition non nulle. Cependant, on s'autorisera à parler de l'espace vectoriel des fonctions thêta d'un type donné, étant entendu que l'on a alors rajouté la fonction nulle.

Exemples 1.2. — 1) Toute fonction du type $z \mapsto e^{Q(z)}$, où Q est un polynôme de degré au plus 2, est une fonction thêta, dite *triviale ;* ce sont exactement les fonctions thêta qui ne s'annulent pas (*cf.* exerc. IV.1).

2) Si ϑ_1 et ϑ_2 sont des fonctions thêta *de même type* associées à Γ, le quotient ϑ_1/ϑ_2 est Γ-périodique, donc définit une fonction méromorphe sur le tore complexe V/Γ.

Dans la définition, les formes linéaires a_γ sont bien déterminées, tandis que les constantes b_γ ne sont déterminées qu'à addition d'un entier près. Ces données sont de plus soumises à des contraintes ; on a

$$\begin{aligned}\vartheta(z+\gamma_1+\gamma_2) &= e^{2i\pi(a_{\gamma_2}(z+\gamma_1)+b_{\gamma_2})}\vartheta(z+\gamma_1)\\ &= e^{2i\pi(a_{\gamma_2}(z)+a_{\gamma_2}(\gamma_1)+b_{\gamma_2})}e^{2i\pi(a_{\gamma_1}(z)+b_{\gamma_1})}\vartheta(z),\end{aligned}$$

de sorte que

$$\begin{cases} a_{\gamma_1+\gamma_2} = a_{\gamma_1} + a_{\gamma_2} \\ b_{\gamma_1+\gamma_2} = a_{\gamma_2}(\gamma_1) + b_{\gamma_1} + b_{\gamma_2} \qquad (\mathrm{mod}\ \mathbf{Z}). \end{cases} \tag{7}$$

On peut en particulier étendre l'application

$$\begin{array}{ccc} \Gamma \times V & \longrightarrow & \mathbf{C} \\ (\gamma, z) & \longmapsto & a_\gamma(z) \end{array}$$

de façon unique en une application $a\colon V \times V \to \mathbf{C}$ qui est $\mathbf{R}$-linéaire en la première variable et $\mathbf{C}$-linéaire en la seconde.

***Proposition 1.3.* —** *La forme $\mathbf{R}$-bilinéaire alternée ω sur V définie par*

$$\omega(x,y) = a(x,y) - a(y,x)$$

est réelle, entière sur Γ, et satisfait à $\omega(ix,iy) = \omega(x,y)$ pour tout x et tout y dans V.

Démonstration. — Soient γ_1 et γ_2 des éléments de Γ. On a

$$\omega(\gamma_1,\gamma_2) = a_{\gamma_1}(\gamma_2) - a_{\gamma_2}(\gamma_1),$$

qui est entier par (7). La forme ω est entière sur Γ, donc réelle. Comme a est $\mathbf{C}$-linéaire en la seconde variable, on a

$$\begin{aligned}\omega(ix,iy) - \omega(x,y) &= a(ix,iy) - a(iy,ix) - a(x,y) + a(y,x)\\ &= ia(ix,y) - ia(iy,x) + ia(x,iy) - ia(y,ix)\\ &= i\big(\omega(ix,y) + \omega(x,iy)\big).\end{aligned}$$

Or le premier membre est réel, tandis que le second est imaginaire pur ; ils sont donc nuls, ce qui prouve la proposition. $\square$

En dimension 1, la proposition II.2.5, p. 16, donne une interprétation de l'entier $|\omega(\gamma_1,\gamma_2)|$ comme le nombre de zéros de ϑ dans le parallélogramme de côtés γ_1 et γ_2.

Exemple 1.4. — Soit τ une matrice complexe carrée d'ordre g, symétrique, dont la partie imaginaire est définie positive, et soient a et b des matrices colonnes réelles à g lignes. La **fonction thêta de Riemann** $\vartheta\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}(\cdot,\tau)$ est définie par

$$z \mapsto \vartheta\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}(z,\tau) = \sum_{m\in\mathbf{Z}^g} \exp i\pi\big[{}^t(m+a)\tau(m+a) + 2\,{}^t(m+a)(z+b)\big].$$

On note souvent ϑ au lieu de $\vartheta\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$. Pour toutes matrices colonnes entières p et q à g lignes, on a

$$\vartheta\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}(z+\tau p+q) = e^{2i\pi((-\frac{1}{2}{}^tp\tau p - {}^tpz) + {}^taq - {}^tpb)}\vartheta\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}(z),$$

de sorte que $\vartheta\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ est une fonction thêta pour le réseau $\Gamma_\tau = \tau\mathbf{Z}^g \oplus \mathbf{Z}^g$, pour laquelle $a_{\tau p+q}(z) = -{}^tpz$. On a donc, pour tout $x, y, x', y' \in \mathbf{R}^g$,

$$\omega(\tau x+y, \tau x'+y') = -{}^tx(\tau x'+y') + {}^tx'(\tau x+y) = -{}^txy' + {}^tx'y,$$

puisque τ est symétrique. Si on écrit $iy = \tau x_1 + y_1$, on a $y = \operatorname{Im}\tau x_1$, de sorte que

$$H(y,y) = \omega(y,iy) = {}^tx_1y = {}^ty(\operatorname{Im}\tau)^{-1}y$$

Par bilinéarité, on en déduit, pour tout $z_1, z_2 \in \mathbf{C}^g$,

$$H(z_1,z_2) = {}^t\overline{z}_1(\operatorname{Im}\tau)^{-1}z_2$$

(comparer avec l'exemple III.5.4, p. 35). La forme ω est donc définie positive. On notera que cette fonction thêta n'est pas normalisée au sens qui suit (*cf.* remarque VI.2.3).

1.5. — La forme ω s'appelle la *forme de Riemann* de la fonction ϑ. Elle est nulle pour une fonction thêta triviale ; deux fonctions thêta équivalentes (c'est-à-dire dont le quotient est une fonction thêta triviale) ont donc même forme de Riemann. Un petit calcul facile (*cf.* exerc. IV.3) montre que toute fonction thêta est équivalente à une fonction thêta *normalisée*, c'est-à-dire satisfaisant à

$$a = \frac{1}{2i}H \quad \text{et} \quad \operatorname{Im} b_\gamma = -\frac{1}{4}H(\gamma,\gamma) \quad \text{pour tout } \gamma \text{ dans } \Gamma,$$

où H est la forme hermitienne associée comme en III.1.1, p. 26, à ω. Une telle fonction thêta vérifie

$$\vartheta(z+\gamma) = e^{2i\pi(\frac{1}{2i}H(\gamma,z)+\operatorname{Re} b_\gamma - \frac{i}{4}H(\gamma,\gamma))}\vartheta(z) = \alpha(\gamma)e^{\pi H(\gamma,z)+\frac{\pi}{2}H(\gamma,\gamma)}\vartheta(z),$$

où $\alpha\colon \Gamma \to U(1)$ est l'application $\gamma \mapsto e^{2i\pi \operatorname{Re} b_\gamma}$. Comme

$$\operatorname{Re} b_{\gamma_1+\gamma_2} - \operatorname{Re} b_{\gamma_1} - \operatorname{Re} b_{\gamma_2} = \operatorname{Re} a_{\gamma_2}(\gamma_1) = \operatorname{Re}\frac{1}{2i}H(\gamma_2,\gamma_1) = \frac{1}{2}\omega(\gamma_2,\gamma_1),$$

elle satisfait à

$$\alpha(\gamma_1+\gamma_2) = \alpha(\gamma_1)\alpha(\gamma_2)(-1)^{\omega(\gamma_1,\gamma_2)} \tag{8}$$

pour tout γ_1 et tout γ_2 dans Γ. On dira encore que le couple (H, α) est le *type* de la fonction thêta normalisée ϑ.

Proposition 1.6.* — *Pour toute fonction thêta, la forme de Riemann ω est positive (au sens de III.1.2).

Démonstration. — On peut supposer la fonction thêta normalisée. Posons

$$\varphi(z) = e^{-\frac{\pi}{2}H(z,z)}\vartheta(z).$$

On a, pour tout γ dans Γ,

$$\begin{aligned}\varphi(z+\gamma) &= e^{-\frac{\pi}{2}(H(z,z)+H(z,\gamma)+H(\gamma,z)+H(\gamma,\gamma))}e^{2i\pi(\frac{1}{2i}H(\gamma,z)+b_\gamma)}\vartheta(z)\\ &= e^{i\pi(\omega(\gamma,z)+2\operatorname{Re} b_\gamma)}\varphi(z),\end{aligned}$$

de sorte que la fonction $|\varphi|$ est Γ-périodique, donc bornée : il existe une constante K telle que

$$|\vartheta(z)| \leq Ke^{\frac{\pi}{2}H(z,z)} \tag{9}$$

pour tout z. Si $H(z_0, z_0) < 0$, la fonction holomorphe $t \mapsto \vartheta(tz_0)$ tend vers 0 lorsque $|t|$ tend vers l'infini, donc est identiquement nulle par le théorème de Liouville. Comme $H(z, z) < 0$ dans un voisinage de z_0, la fonction ϑ est identiquement nulle, ce qui contredit la définition 1.1. □

1.7. — Soit N le noyau de H (que l'on appellera aussi le noyau de ω) ; pour tout z_0 dans V et tout z dans N, on a, toujours si ϑ est normalisée,

$$|\vartheta(z_0 + z)| \leq Ke^{\frac{\pi}{2}H(z_0,z_0)},$$

de sorte que la fonction holomorphe $z \mapsto \vartheta(z_0 + z)$ est constante sur N. En particulier, une fonction thêta dont la forme de Riemann est nulle est triviale. On dira qu'une fonction thêta est *non dégénérée* si sa forme de Riemann ω est non dégénérée. Cela revient à dire que H est définie positive, ou que ω est une forme de Kähler (entière).

Proposition 1.8.* — *Soit ϑ une fonction thêta sur un espace vectoriel complexe V, associée à un réseau Γ. Notons ω sa forme de Riemann et N son noyau. L'image de Γ dans l'espace vectoriel $V_N = V/N$ est un réseau Γ_N, et ϑ provient d'une fonction thêta non dégénérée sur l'espace vectoriel V_N, associée au réseau Γ_N.

Démonstration. — Fixons une base $(\gamma_1, \ldots, \gamma_{2g})$ de Γ. Il existe un voisinage U de l'origine dans V_N tel que $|H(z, \gamma_j)| < 1$ pour tout j et tout z dans V dont l'image dans V_N est dans U. Si l'image de z est dans $\Gamma_N \cap U$, alors $\omega(z, \gamma_j)$ est entier et de valeur absolue strictement inférieure à 1, donc nul. On en déduit $z \in N$, de sorte que $\Gamma_N \cap U = \{0\}$ dans V_N. Cela montre que Γ_N est discret dans V_N. L'espace vectoriel qu'il engendre est l'image dans V_N de l'espace vectoriel engendré par Γ, c'est donc V_N, et Γ_N est un réseau. Le reste est facile. □

2. Diviseurs sur les variétés complexes

Notre but est de montrer que comme en dimension 1, toute fonction méromorphe sur un tore complexe est quotient de deux fonctions thêta (*cf.* exerc. II.8, p. 22). Nous aurons pour cela besoin de généraliser la notion de diviseur introduite en II.2.3, p. 16, pour les courbes elliptiques. Sur une courbe elliptique, une fonction méromorphe a des zéros et des pôles ; c'est ainsi que l'on peut lui attacher un diviseur. En dimension quelconque, une fonction méromorphe s'annule sur des sous-ensembles qui sont ≪ de codimension 1 ≫ (une notion qu'il faudrait définir, et ce n'est pas si simple !). L'idée naturelle serait donc de définir un diviseur comme une combinaison linéaire formelle à coefficients entiers de tels sous-ensembles. Cette approche est hélas beaucoup plus compliquée qu'en dimension 1 et de nombreuses difficultés techniques surgissent que l'on contourne de la façon suivante : on oublie le lieu des zéros ou des pôles pour ne retenir que la fonction. Cela donne la définition désagréable suivante : un diviseur est un objet qui est défini localement par une fonction méromorphe, avec des conditions de recollement adéquates et modulo une relation d'équivalence.

***Définition 2.1.* —** Soit X une variété complexe connexe.

a) On dit qu'une famille (U_α, h_α), où (U_α) est un recouvrement ouvert de X, et h_α une fonction méromorphe dans U_α non identiquement nulle dans aucune composante connexe de U_α, est *admissible* si h_α/h_β est une fonction holomorphe qui ne s'annule pas dans $U_\alpha \cap U_\beta$, pour tout α et tout β. De telles familles (U_α, h_α) et (U'_β, h'_β) sont équivalentes si leur réunion est encore admissible. Un *diviseur* sur X est une classe d'équivalence de familles admissibles.

b) Si un diviseur D sur X est décrit par la famille admissible (U_α, h_α), alors la famille $(U_\alpha, 1/h_\alpha)$ est admissible et définit un diviseur qui ne dépend que de D ; on le note $-D$. Si un diviseur D' sur X est décrit par la famille admissible (U'_β, h'_β), alors la famille $(U_\alpha \cap U'_\beta, h_\alpha h'_\beta)$ est admissible et définit un diviseur qui ne dépend que de D et de D' ; on le note $D + D'$.

c) Un diviseur est *effectif* s'il a une représentation (U_α, h_α) où les fonctions h_α sont holomorphes (toutes ses représentations ont alors cette propriété).

d) Si h est une fonction méromorphe globale non nulle sur X, la paire (X, h) est un diviseur appelé diviseur de h et noté $\operatorname{div}(h)$. Les diviseurs de ce type sont dits *principaux*. Deux diviseurs sont *linéairement équivalents* si leur différence est principale.

Notons qu'une fonction méromorphe (non nulle) est holomorphe si et seulement si son diviseur est effectif.

Le lecteur vérifiera que l'on retrouve bien en dimension 1 la définition de II.2.3, p. 16. Les diviseurs sur une variété complexe connexe X forment un groupe abélien que l'on note $\operatorname{Div}(X)$.

***Exemples 2.2.* —** 1) Soit ℓ une forme linéaire non nulle sur $\mathbf{C}^{n+1}$. Elle définit un diviseur effectif sur $\mathbf{P}^n$, associé à la famille admissible $(U_j, \ell(x)/x_j)$, où $U_0, \ldots, U_n$ sont les ouverts standards de $\mathbf{P}^n$. Plus généralement, si P est un polynôme homogène non nul de degré d en $n+1$ variables, la famille $(U_j, P(x)/x_j^d)_{0\leq j\leq n}$ est admissible et définit un diviseur effectif sur $\mathbf{P}^n$ (appelé diviseur de P).

2) Soit ϑ une fonction thêta relative à un réseau Γ dans un espace vectoriel V. On peut lui associer un diviseur effectif sur le tore complexe V/Γ : si les Ω sont des ouverts Γ-petits (au sens de I.2.1) qui recouvrent V, le diviseur est défini par la famille des $(\pi(\Omega), \vartheta\circ(\pi|_\Omega)^{-1})$.

Il est clair qu'il est bien plus difficile de travailler avec les diviseurs ainsi définis qu'avec la définition concrète de *loc.cit.*. Par exemple, le résultat suivant, évident en dimension 1, ne l'est plus du tout en général.

Proposition 2.3. — *Tout diviseur sur une variété complexe connexe est différence de deux diviseurs effectifs.*

Indications de démonstration. — L'ingrédient essentiel est le fait (dont la démonstration est basée sur le théorème de préparation de Weierstrass) que l'anneau local $\mathscr{O}_{X,x}$ des germes de fonctions holomorphes en un point x d'une variété complexe X est factoriel ([**GR**, th. 7, p. 72]). Ceci étant admis, on se donne une famille admissible (U_α, h_α) représentant un diviseur D sur X ; pour chaque point x de U_α, on écrit $h_\alpha = f_{\alpha,x}/g_{\alpha,x}$, où $f_{\alpha,x}$ et $g_{\alpha,x}$ sont des fonctions holomorphes dans un voisinage $U_{\alpha,x}$ de x, premières entre elles dans $\mathscr{O}_{X,x}$. On démontre que ces fonctions restent premières entre elles dans un voisinage de x ; cela entraîne que les familles $(U_{\alpha,x}, f_{\alpha,x})$ et $(U_{\alpha,x}, g_{\alpha,x})$ sont admissibles (*cf.* [**SD**, th. 13, p. 27] et [**I**, p. 106]), donc représentent des diviseurs effectifs D_1 et D_2. Il est clair que $D = D_1 - D_2$. $\square$

Bien que cette proposition soit en fait suffisante pour la suite de ce chapitre, il est utile de poursuivre un peu plus avant la description des diviseurs sur une variété complexe, ne serait-ce que pour en avoir une idée un peu plus claire.

Soit D un diviseur *effectif* sur une variété complexe connexe X, correspondant à une famille admissible (U_α, h_α), où h_α est une fonction holomorphe dans l'ouvert U_α de X. Si F_α désigne le fermé de U_α où h_α s'annule, il est clair que $F_\alpha \cap U_\beta = F_\beta \cap U_\alpha$. La réunion de tous les F_α est donc un fermé de X qui est indépendant de la représentation de D et que l'on appelle le *support* de D. On le note $\mathrm{Supp}(D)$.

2.4. — On dit qu'un diviseur effectif D est *réduit* si, pour tout diviseur D' dont le support contient celui de D, le diviseur $D' - D$ est effectif (en dimension 1, les diviseurs réduits sont les sommes de points deux à deux distincts).

Proposition 2.5. — *Soit D un diviseur effectif sur une variété complexe connexe. Il existe un unique diviseur effectif réduit de même support que D ; on le note D_{red}.*

Indications de démonstration. — L'unicité est claire. Pour montrer l'existence, il faut encore invoquer la factorialité des anneaux locaux $\mathscr{O}_{X,x}$. Soient (U_α, h_α) une représentation admissible de D et x un point de U_α ; on décompose h_α en produit

$$h_\alpha = f_{\alpha,x,1}^{n_1} \cdots f_{\alpha,x,r}^{n_r},$$

où les $f_{\alpha,x,j}$ sont des fonctions holomorphes dans un voisinage $U_{\alpha,x}$ de x, irréductibles non associées deux à deux dans $\mathscr{O}_{X,x}$, et où les n_j sont des entiers strictement positifs. On vérifie que la famille $(U_{\alpha,x}, f_{\alpha,x,1} \cdots f_{\alpha,x,r})$ est admissible, donc représente un diviseur que l'on note D_{red}, et qui a même support que D. Montrons qu'il est réduit. Soit D' un diviseur dont le support contient celui de D_{red} ; toute équation locale de D' s'annule sur le lieu des zéros de $f_{\alpha,x,j}$, donc est divisible par $f_{\alpha,x,j}$ par le Nullstellensatz local pour les idéaux principaux (qui découle facilement du théorème de préparation de Weierstrass ; *cf.* [**GR**, th. 18, p. 90]), donc par leur produit. On en déduit que $D' - D_{\mathrm{red}}$ est effectif. □

Il découle de la démonstration que pour qu'un diviseur effectif D sur une variété complexe connexe soit réduit, il faut et il suffit que, pour toute représentation (U_α, h_α) de D et tout point x de U_α, le germe de h_α en x soit produit d'irréductibles distincts dans $\mathscr{O}_{X,x}$.

2.6. — On dit qu'un diviseur effectif sur une variété complexe connexe X est *irréductible* si on ne peut pas l'écrire comme somme de deux diviseurs effectifs non nuls (en dimension 1, les diviseurs irréductibles correspondent aux points). Si un diviseur D de X s'écrit

$$D = n_1 D_1 + \cdots + n_r D_r,$$

où $D_1, \ldots, D_r$ sont des diviseurs irréductibles deux à deux distincts et où les n_j sont des entiers relatifs, cette décomposition est unique (cela se montre encore en utilisant le théorème de préparation de Weierstrass ; *cf.* [**I**, p. 106)].

On montre qu'une telle décomposition existe toujours sur une variété complexe connexe compacte (1) ; on a alors $D_{\mathrm{red}} = D_1 + \cdots + D_r$, de sorte que D est réduit si et seulement si tous les n_j sont égaux à 1, et le groupe $\mathrm{Div}(X)$ est le groupe abélien libre sur l'ensemble des diviseurs irréductibles de X.

3. Fonctions méromorphes sur les tores complexes

Nous pouvons maintenant montrer notre résultat principal. Rappelons qu'à toute fonction thêta ϑ relative à un réseau Γ dans un espace vectoriel V, on peut associer un diviseur effectif sur le tore complexe V/Γ (exemple 2.2.2)).

Théorème 3.1. — *Tout diviseur effectif sur un tore complexe est le diviseur d'une fonction thêta.*

Démonstration. — Soient D un diviseur effectif sur le tore complexe $X = V/\Gamma$ et (U_α, h_α) une description admissible de D. Soit $\pi : V \to X$ la surjection canonique ; on suppose que chaque composante connexe de $\pi^{-1}(U_\alpha)$ est convexe et ne rencontre aucun de ses translatés

1. Nous montrerons cette propriété de façon élémentaire dans l'exerc. VI.7, p. 85, dans le cas particulier des tores complexes, qui est le seul que nous utiliserons.

par $\Gamma\smallsetminus\{0\}$. Les fonctions h_α sont holomorphes, de sorte que les formes $\omega_{\alpha\beta} = d\log(h_\alpha/h_\beta)$ sont fermées de type $(1,0)$ sur $U_\alpha\cap U_\beta$. Soit (φ_α) une partition de l'unité relative au recouvrement (U_α) de X ; la forme

$$\omega_\alpha = \sum_\gamma \varphi_\gamma\omega_{\alpha\gamma}$$

est de type $(1,0)$ sur U_α et on a $\omega_\alpha - \omega_\beta = \omega_{\alpha\beta}$ sur $U_\alpha\cap U_\beta$. Les formes $d\omega_\alpha$ définissent alors une 2-forme fermée sur X sans terme de type $(0,2)$ qui, par la proposition III.4.3, p. 33, est cohomologue à une forme constante η, sans terme de type $(0,2)$ puisqu'elle est obtenue en moyennant . Il existe donc une 1-forme ω_0 sur X telle que

$$d\omega_\alpha = \eta + d\omega_0$$

sur U_α. Par l'exercice III.1.c), p. 35, on peut supposer que ω_0 est de type $(1,0)$. Écrivons

$$\pi^*\eta = \sum a_{jk}dz_j\wedge dz_k + \sum b_{jk}dz_j\wedge d\overline{z}_k = d\omega_1,$$

avec

$$\omega_1 = -\sum_j\Big(\sum_k a_{jk}z_k + b_{jk}\overline{z}_k\Big)dz_j = \sum_j \ell_j(z)dz_j,$$

forme de type $(1,0)$ sur V, où les ℓ_j sont des formes complexes $\mathbf{R}$-linéaires sur V. La forme $\pi^*(\omega_\alpha-\omega_0)-\omega_1$ est fermée dans $\pi^{-1}(U_\alpha)$, donc exacte par le lemme de Poincaré (lemme III.2.1, p. 27) : il existe une fonction f_α dans $\pi^{-1}(U_\alpha)$ telle que $\pi^*(\omega_\alpha-\omega_0)-\omega_1 = df_\alpha$; comme ω_α,ω_0 et ω_1 sont de type $(1,0)$, la fonction f_α est holomorphe (*cf.* III.2.5, p. 29). On a, dans $\pi^{-1}(U_\alpha)\cap\pi^{-1}(U_\beta)$,

$$df_\alpha - df_\beta = d\log\pi^*(h_\alpha/h_\beta)$$

de sorte que, quitte à multiplier f_α par une constante dans chaque composante connexe de $\pi^{-1}(U_\alpha)$, les fonctions $e^{-f_\alpha}\pi^*h_\alpha$ se recollent en une fonction holomorphe ϑ sur V. Il reste à vérifier que c'est une fonction thêta. Or on a dans $\pi^{-1}(U_\alpha)$ l'égalité

$$\log\frac{\vartheta(z+\gamma)}{\vartheta(z)} = f_\alpha(z) - f_\alpha(z+\gamma),$$

de sorte que, puisque $\pi^*(\omega_\alpha-\omega_0)$ est Γ-périodique,

$$d\log\frac{\vartheta(z+\gamma)}{\vartheta(z)} = \omega_1(z+\gamma)-\omega_1(z) = \sum_j \ell_j(\gamma)dz_j,$$

ce qui montre par intégration que ϑ est une fonction thêta avec $a_\gamma(z) = \dfrac{1}{2i\pi}\sum_j \ell_j(\gamma)z_j$. $\square$

3.2. — En particulier, on peut associer à tout diviseur effectif D sur un tore complexe une unique fonction thêta normalisée ϑ dont il est le diviseur ; on appelle *type* du diviseur D le type (H,α) de ϑ (*cf.* 1.5). La forme H est positive (prop. 1.6) et elle n'est nulle que si D est nul (*cf.* 1.7). La proposition 2.3 nous permet aussi d'associer un type à tout diviseur, mais il n'est pas clair *a priori* qu'il soit bien défini. Nous reviendrons sur ce point en V.5.11, p. 63.

***Corollaire 3.3.* —** *Tout fonction méromorphe non nulle sur un tore complexe est quotient de deux fonctions thêta de même type.*

Démonstration. — Soit f une fonction méromorphe non nulle sur un tore complexe X de revêtement universel $\pi\colon V \to X$. Écrivons son diviseur comme différence de diviseurs effectifs D_1 et D_2 (prop. 2.3). Soit ϑ une fonction thêta de diviseur D_2. La fonction $\vartheta(f \circ \pi)$ est alors holomorphe sur V (car son diviseur, D_1, est effectif) ; c'est une fonction thêta de même type que ϑ. □

***Corollaire 3.4.* —** *Soient X un tore complexe et $u\colon X \to \mathbf{P}^n$ une application holomorphe. Il existe des fonctions $\vartheta_0, \dots, \vartheta_n$, soit nulles, soit thêta normalisées de même type, sans zéro commun, telles que*

$$u(x) = (\vartheta_0(x), \dots, \vartheta_n(x))$$

pour tout x dans X.

Démonstration. — On peut supposer, quitte à supprimer des coordonnées pour se placer dans un espace projectif plus petit, que l'image de u n'est contenue dans aucun des hyperplans $x_j = 0$.

Comme on l'a vu dans l'exemple 2.2.1), pour chaque $j \in \{0, \dots, n\}$, l'équation $x_j = 0$ définit un diviseur effectif sur $\mathbf{P}^n$ et, de la même façon, l'équation $x_j \circ u = 0$ définit un diviseur effectif D_j sur X. Soit ϑ_0 une fonction thêta normalisée de diviseur D_0 (th. 3.1). Pour chaque j, la fonction $\vartheta_j = \left(\frac{x_j \circ u}{x_0 \circ u}\right)\vartheta_0$ est de diviseur D_j, qui est effectif. Elle est donc holomorphe. Comme la fonction méromorphe $\frac{x_j \circ u}{x_0 \circ u}$ est Γ-périodique, la fonction holomorphe ϑ_j est une fonction thêta de même type que ϑ_0 (donc en particulier normalisée) et le morphisme u est défini par $(\vartheta_0, \dots, \vartheta_n)$ (avec l'abus de notation de I.3.1, p. 8). □

***Corollaire 3.5.* —** *Soit X un tore complexe. On suppose qu'il existe une application holomorphe $u\colon X \to \mathbf{P}^n$ et un point x de X tel que $u^{-1}(u(x))$ soit fini. Il existe une forme de Kähler entière sur X.*

Démonstration. — Il existe d'après le corollaire précédent des fonctions thêta normalisées $\vartheta_0, \dots, \vartheta_n$ de même type, sans zéro commun, telles que u soit défini par la relation $u(x) = (\vartheta_0(x), \dots, \vartheta_n(x))$. Soient ω la forme de Riemann commune des ϑ_j et N son noyau. Comme une fibre de u est finie, il résulte de 1.7 que N est nul et que ω est une forme de Kähler entière sur X. □

***Corollaire 3.6.* —** *Soit X un tore complexe. Il existe un tore complexe X_{ab} (appelé* abélianisé *de X) et une surjection holomorphe $\rho\colon X \to X_{\mathrm{ab}}$ tels que*

a) il existe sur X_{ab} une forme de Kähler entière ;

b) toute application holomorphe de X dans un espace projectif se factorise à travers ρ ;

c) le morphisme ρ induit un isomorphisme entre les corps de fonctions méromorphes $\mathscr{M}(X_{\mathrm{ab}})$ et $\mathscr{M}(X)$;

d) le morphisme ρ induit [2] *un isomorphisme entre les groupes* $\mathrm{Div}(X_{\mathrm{ab}})$ *et* $\mathrm{Div}(X)$.

Démonstration. — Soit N l'intersection des noyaux des formes de Riemann de toutes les fonctions thêta sur X. Il existe des fonctions thêta $\vartheta_1, \dots, \vartheta_r$ telles que l'intersection des noyaux de leurs formes de Riemann $\omega_1, \dots, \omega_r$ soit N. La forme de Riemann de la fonction thêta $\vartheta_1 \cdots \vartheta_r$ est $\omega_1 + \cdots + \omega_r$ et, comme les formes $\omega_1, \dots, \omega_r$ sont positives, son noyau est N. Par la proposition 1.8, l'image Γ_{ab} de Γ dans $V_{\mathrm{ab}} = V/N$ est un réseau. On pose $X_{\mathrm{ab}} = V_{\mathrm{ab}}/\Gamma_{\mathrm{ab}}$. Il est clair que ω induit une forme de Kähler entière sur X_{ab}, ce qui montre a).

Comme on l'a vu dans le corollaire 3.5, toute application holomorphe $u\colon X \to \mathbf{P}^n$ est donnée par des fonctions thêta normalisées de même type, donc de même forme de Riemann ω. Par construction, le noyau de ω contient N, et u se factorise par le quotient $\rho\colon X \to X_{\mathrm{ab}}$, ce qui montre b).

Par le corollaire 3.3, toute fonction méromorphe f sur X est quotient de deux fonctions thêta de même type, que l'on peut supposer normalisées. Celles-ci proviennent de X_{ab} (prop. 1.8), donc aussi f, ce qui montre c).

Enfin, tout diviseur D de X s'écrit $D_1 - D_2$, avec D_1 et D_2 effectifs (prop. 2.3) ; il existe par le théorème 3.1 des fonctions thêta ϑ_1 et ϑ_2, que l'on peut supposer normalisées, de diviseurs respectifs D_1 et D_2. Comme ci-dessus, celles-ci proviennent de X_{ab}, donc aussi D, ce qui montre d). □

Nous verrons dans le théorème VI.7.2, p. 78, que l'extension $\mathscr{M}(X) = \mathscr{M}(X_{\mathrm{ab}})$ de $\mathbf{C}$ est de type fini et que son degré de transcendance est la dimension de X_{ab} (comparer avec la situation en dimension 1 ; *cf.* exerc. II.8, p. 22).

Les seules fonctions méromorphes sur un tore complexe « très général » de dimension au moins 2 sont les constantes (son abélianisé est nul ; *cf.* exerc. IV.4).

Exercices

IV.1. — Montrer que toute fonction thêta qui ne s'annule en aucun point est une fonction thêta triviale au sens de l'exemple 1.2.1) (*Indication :* montrer que $\log \vartheta(z) = O(1 + \|z\|^2)$).

IV.2. — Soient Γ un réseau dans un espace vectoriel complexe V et H une forme hermitienne sur V dont la partie imaginaire est entière sur Γ. Montrer qu'il existe une application $\alpha\colon \Gamma \to U(1)$ qui vérifie (8).

IV.3. — a) Montrer que toute fonction thêta est équivalente à une fonction thêta telle que $a = \frac{1}{2i} H$ (*cf.* 1.5) (*Indication :* montrer que la forme $Q = a - \frac{1}{2i} H$ est $\mathbf{C}$-bilinéaire symétrique et considérer la fonction $z \mapsto e^{-i\pi Q(z,z)} \vartheta(z)$).

b) Montrer que toute fonction thêta est équivalente à une fonction thêta normalisée (*Indication :* montrer que $\gamma \mapsto \mathrm{Im}\big(b_\gamma - \frac{1}{2} a(\gamma,\gamma)\big)$ s'étend en une forme $\mathbf{R}$-linéaire ℓ de V dans $\mathbf{R}$ et considérer la fonction $z \mapsto e^{-2i\pi(\ell(iz) + i\ell(z))} \vartheta(z)$).

---

2. Une application holomorphe *surjective* $u\colon X \to Y$ entre variétés complexes connexes induit une application $u^*\colon \mathrm{Div}(Y) \to \mathrm{Div}(X)$ de la façon suivante : si (U_α, h_α) est une description d'un diviseur D de Y, on définit l'image inverse $u^* D$ comme le diviseur de X associé à la famille (admissible) $(u^{-1}(U_\alpha), h_\alpha \circ u)$ (on a besoin de la surjectivité de u pour assurer que $h_\alpha \circ u$ n'est identiquement nulle dans aucune composante connexe de $u^{-1}(U_\alpha)$).

IV.4. — Montrer que sur un tore complexe ≪ très général ≫ (au sens de l'exercice III.3, p. 36) de dimension au moins 2, toute fonction thêta est triviale et toute fonction méromorphe est constante.

CHAPITRE V

FIBRÉS EN DROITES, COHOMOLOGIE DES FAISCEAUX ET PREMIÈRE CLASSE DE CHERN

Nous faisons maintenant le lien entre les approches des deux chapitres précédents : soient X un tore complexe et $u\colon X \to \mathbf{P}^n$ un plongement. Nous avons construit une forme de Kähler ω entière sur X de deux façons : au chapitre III, nous avons considéré l'image inverse par u de la forme de Fubini-Study de $\mathbf{P}^n$, tandis qu'au chapitre IV, nous avons montré que u était donné par des fonctions thêta de même type, et nous avons pris pour ω leur forme de Riemann commune. Il s'agit maintenant de relier les deux constructions. Cela se fait en introduisant la notion de fibré en droites : il existe sur $\mathbf{P}^n$ un fibré en droites noté $\mathscr{O}_{\mathbf{P}^n}(1)$. Les fonctions thêta définissant u (approche du chapitre IV) correspondent alors aux sections du fibré en droites $u^*\mathscr{O}_{\mathbf{P}^n}(1)$, tandis que la forme différentielle $u^*\omega_{FS}$ (approche du chapitre III) représente la première classe de Chern de ce fibré.

1. Fibrés en droites

Soit X une variété complexe connexe.

Définition 1.1. — Un fibré en droites sur X consiste en la donnée d'une variété complexe L et d'une application holomorphe $p\colon L \to X$, telles qu'il existe un recouvrement ouvert (U_α) de X et des isomorphismes $\psi_\alpha\colon p^{-1}(U_\alpha) \to U_\alpha \times \mathbf{C}$ tels que, pour tout α et tout β, la composée $\psi_\alpha\psi_\beta^{-1}\colon (U_\alpha \cap U_\beta) \times \mathbf{C} \to (U_\alpha \cap U_\beta) \times \mathbf{C}$ soit donnée par

$$(x,t) \longmapsto (x, g_{\alpha\beta}(x)t),$$

où $g_{\alpha\beta}$ est une fonction holomorphe sur $U_\alpha \cap U_\beta$ qui ne s'annule pas.

Une section (holomorphe) de ce fibré est une application holomorphe $s\colon X \to L$ telle que $p \circ s = \mathrm{Id}_X$.

On dit que L est trivialisé sur le recouvrement (U_α). Des fibrés en droites $p\colon L \to X$ et $p'\colon L' \to X$ sont *isomorphes* s'il existe un isomorphisme $u\colon L \to L'$ tel que $p' \circ u = p$, qui soit *linéaire sur les fibres*. Cela signifie que sur U_α, on a (on suppose que les fibrés sont trivialisés sur le même recouvrement)

$$u\big(\psi_\alpha^{-1}(x,t)\big) = \psi_\alpha^{\prime -1}(x, h_\alpha(x)t),$$

où h_α est une fonction holomorphe sur U_α qui ne s'annule pas. On définit la section nulle s_0 d'un fibré en droites $p\colon L \to X$ en posant $s_0(x) = \psi_\alpha^{-1}(x,0)$ pour tout x dans U_α. Les sections de L forment un espace vectoriel dont l'origine est s_0 ; on le note $\Gamma(X,L)$.

Si $u\colon X \to Y$ est une application holomorphe et $p\colon L \to Y$ un fibré en droites, on définit le fibré u^*L sur X par

$$u^*L = \{(x,l) \in X \times L \mid u(x) = p(l)\}$$

avec la première projection $u^*L \to X$. Il y a une application linéaire $\Gamma(u)\colon \Gamma(Y,L) \to \Gamma(X,u^*L)$ qui, à une section s de L, associe la section $x \mapsto (x, s(u(x)))$ de u^*L.

***Exemples 1.2.* —** 1) La première projection $X \times \mathbf{C} \to X$ est un fibré en droites dont les sections correspondent aux fonctions holomorphes sur X. Un fibré en droites est dit trivial s'il est isomorphe à ce fibré. Pour qu'un fibré en droites soit trivial, il faut et il suffit qu'il admette une section jamais nulle (c'est-à-dire dont l'image ne rencontre pas l'image de la section nulle).

2) Soit W un espace vectoriel complexe ; on peut construire un fibré en droites $L \to \mathbf{P}W$ dont la fibre au-dessus d'un point x de $\mathbf{P}W$ est la droite ℓ_x de W que x représente, en posant

$$L = \{(x,v) \in \mathbf{P}W \times W \mid v \in \ell_x\};$$

au-dessus de l'ouvert standard U_α (défini après choix d'une base de W), l'ensemble L est défini dans $U_\alpha \times W$ par les équations $v_\beta = v_\alpha x_\beta$, pour tout $\beta \neq \alpha$; c'est donc une variété complexe. L'isomorphisme ψ_α de la définition est donné par

$$\psi_\alpha(x,v) = (x, v_\alpha), \qquad \text{avec} \qquad \psi_\beta^{-1}(x,t) = (x, t\tfrac{x}{x_\beta}),$$

de sorte que $g_{\alpha\beta}(x) = x_\alpha / x_\beta$, pour $x \in U_\alpha \cap U_\beta$. Ce fibré est noté $\mathscr{O}_{\mathbf{P}W}(-1)$.

3) Soit X une variété complexe connexe de dimension n ; on peut construire un fibré en droites sur X dont la fibre au-dessus d'un point x de X est l'espace vectoriel des formes de type $(n,0)$ (c'est-à-dire les n-formes $\mathbf{C}$-multilinéaires alternées) sur l'espace tangent à X en x. On note ce fibré en droites ω_X et on l'appelle le *fibré canonique* de X.

1.3. — Étant donné un fibré en droites $p\colon L \to X$, on peut reconstruire la variété L et le morphisme p à partir de la donnée des *fonctions de transition* $g_{\alpha\beta}$: on « recolle » les $U_\alpha \times \mathbf{C}$ en identifiant le point (x,t) de $U_\beta \times \mathbf{C}$ avec le point $(x, g_{\alpha\beta}(x)t)$ de $U_\alpha \times \mathbf{C}$ pour tout x dans $U_\alpha \cap U_\beta$ et tout t dans $\mathbf{C}$. On peut même tout simplement « oublier » L et p et *définir un fibré en droites sur X comme la donnée d'un recouvrement ouvert (U_α) de X et de fonctions* *de transitions $g_{\alpha\beta}$, holomorphes et qui ne s'annulent pas sur $U_\alpha \cap U_\beta$, vérifiant* [1]

$$g_{\alpha\alpha} = g_{\alpha\beta} g_{\beta\gamma} g_{\gamma\alpha} = 1.$$

On définit alors le *dual* d'un fibré en droites $(U_\alpha, g_{\alpha\beta})$ comme le fibré $(U_\alpha, 1/g_{\alpha\beta})$. On définit le *produit tensoriel* de fibrés en droites $(U_\alpha, g_{\alpha\beta})$ et $(U_\alpha, h_{\alpha\beta})$ (on peut toujours prendre les mêmes recouvrements) comme le fibré $(U_\alpha, g_{\alpha\beta} h_{\alpha\beta})$. Ces opérations permettent de munir l'ensemble des fibrés en droites sur X d'une structure de groupe, qui passe au quotient pour munir l'ensemble des classes d'isomorphisme de fibrés en droites sur X d'une structure de groupe. On appelle le groupe ainsi obtenu le *groupe de Picard* de X et on le note [2] $\mathrm{Pic}(X)$.

Exemple 1.4. **—** Soit W un espace vectoriel complexe ; on note $\mathscr{O}_{\mathbf{P}W}(1)$ le dual du fibré en droites $\mathscr{O}_{\mathbf{P}W}(-1)$ défini dans l'exemple 1.2.2). Pour tout entier r positif, on pose

$$\mathscr{O}_{\mathbf{P}W}(r) = \mathscr{O}_{\mathbf{P}W}(1)^{\otimes r} \qquad \text{et} \qquad \mathscr{O}_{\mathbf{P}W}(-r) = \mathscr{O}_{\mathbf{P}W}(-1)^{\otimes r}.$$

On peut montrer que l'on obtient ainsi tous les fibrés en droites sur la variété $\mathbf{P}W$ (ex. 5.7.1)) ; son groupe de Picard est donc isomorphe à **Z**. L'espace vectoriel des sections de $\mathscr{O}_{\mathbf{P}W}(m)$ est nul pour $m < 0$ et isomorphe à l'espace vectoriel des polynômes homogènes de degré m sur W pour $m \geq 0$ (*cf.* exerc. V.1). En particulier, l'espace vectoriel des sections de $\mathscr{O}_{\mathbf{P}W}(1)$ est isomorphe à W^*.

Une section s d'un fibré L donné sous la forme $(U_\alpha, g_{\alpha\beta})$ consiste en la donnée de fonctions holomorphes s_α sur U_α qui vérifient $s_\beta = g_{\alpha\beta} s_\beta$.

À tout diviseur D sur X, on associe un fibré en droites noté $\mathscr{O}_X(D)$: si D est décrit par la famille admissible (U_α, h_α), le fibré $\mathscr{O}_X(D)$ est défini par les fonctions de transition $g_{\alpha\beta} = h_\alpha / h_\beta$. On définit ainsi un morphisme de groupes $\mathrm{Div}(X) \to \mathrm{Pic}(X)$ dont le noyau est exactement le groupe des diviseurs principaux. Le fibré $\mathscr{O}_X(D)$ admet une section méromorphe non identiquement nulle correspondant à la donnée des h_α ; cette section est holomorphe si D est effectif.

Inversement, si L est un fibré en droites sur X avec une section méromorphe s non identiquement nulle, les $g_{\alpha\beta} = s_\alpha / s_\beta$ sont des fonctions méromorphes qui définissent un diviseur noté $D = \mathrm{div}(s)$ tel que $L \simeq \mathscr{O}_X(D)$; il est effectif si s est holomorphe.

1.5. — Ainsi, *l'application $D \mapsto \mathscr{O}_X(D)$ induit un isomorphisme entre le groupe des diviseurs modulo les diviseurs principaux et le groupe des classes d'isomorphisme de fibrés en droites sur X admettant une section méromorphe non nulle.*

---

1. Même si on fixe le recouvrement (U_α), les $g_{\alpha\beta}$ dépendent du choix des trivialisations ψ_α : on peut toujours multiplier leur deuxième composante par une fonction holomorphe g_α qui ne s'annule pas, et $g_{\alpha\beta}$ devient alors $g_{\alpha\beta} \frac{g_\alpha}{g_\beta}$.

2. Lorsque X est une courbe elliptique, ce groupe est bien le même que le groupe défini au § II.3 (utiliser la correspondance 1.5).

Pour tout diviseur D sur X, on a

$$\Gamma(X, \mathscr{O}_X(D)) \simeq \{f \in \mathscr{M}(X) \mid f = 0 \text{ ou } \operatorname{div}(f) + D \geq 0\} \tag{10}$$

(comparer avec (5), p. 18, en dimension 1). En effet, si (U_α, h_α) est une représentation de D, et f une fonction méromorphe sur X telle que $\operatorname{div}(f) + D$ soit effectif, la fonction fh_α est holomorphe sur U_α (déf. 2.1.c), p. 41), et ces fonctions définissent une section de $\mathscr{O}_X(D)$. Inversement, à toute section de $\mathscr{O}_X(D)$ décrite par une famille (s_α) de fonctions holomorphes, on associe la fonction méromorphe f définie par s_α/h_α sur U_α.

Soit L un fibré en droites sur X ; on note $|L|$ l'ensemble des diviseurs (effectifs) des sections holomorphes non nulles de L, c'est-à-dire l'image de l'application $\mathbf{P}\Gamma(X, L) \to \operatorname{Div}(X)$. On l'appelle le *système linéaire* associé à L. Le quotient de deux sections qui ont le même diviseur est une fonction holomorphe qui ne s'annule pas. *Si X est compacte*, l'application $\operatorname{div} \colon \mathbf{P}\Gamma(X, L) \to |L|$ est donc bijective.

Soit D un diviseur sur X. On écrit $|D|$ au lieu de $|\mathscr{O}_X(D)|$; c'est l'ensemble des diviseurs effectifs de X linéairement équivalents à D.

On en vient maintenant à un point extrêmement important : le lien entre morphismes de X vers un espace projectif et fibrés en droites sur X.

Soit $u \colon X \to \mathbf{P}W$ une application holomorphe. On lui associe le fibré en droites $L = u^*\mathscr{O}_{\mathbf{P}W}(1)$ et l'application linéaire

$$\Gamma(u) \colon W^* \simeq \Gamma\big(\mathbf{P}W, \mathscr{O}_{\mathbf{P}W}(1)\big) \longrightarrow \Gamma(X, L)$$

dont on note l'image Γ. Une section de $\mathscr{O}_{\mathbf{P}W}(1)$ s'annule sur un hyperplan ; son image par $\Gamma(u)$ est nulle si et seulement si $u(X)$ est contenu dans cet hyperplan. En particulier, pour que $\Gamma(u)$ soit injective, il faut et il suffit que $u(X)$ ne soit contenu dans aucun hyperplan.

1.6. — Inversement, si on se donne un fibré en droites $L \to X$ et un espace vectoriel Λ de dimension finie de sections de L, on définit une application méromorphe $\psi_\Lambda \colon X \dashrightarrow \mathbf{P}\Lambda^*$ (notée aussi ψ_L lorsque $\Lambda = \Gamma(X, L)$) en associant à un point x de X l'hyperplan des sections dans Λ nulles en x. Cette application n'est pas définie en les points en lesquels toutes les sections dans Λ s'annulent (on les appelle les *points bases* de Λ). Si l'on choisit une base $(s_0, \dots, s_r)$ de Λ, on a aussi

$$u(x) = \big(s_0(x), \dots, s_r(x)\big),$$

étant entendu que les $s_j(x)$ sont calculés via une trivialisation de L ; le point de $\mathbf{P}^r$ obtenu est indépendant du choix de cette trivialisation.

Ces deux constructions sont inverses l'une de l'autre. En particulier, les applications holomorphes de X vers un espace projectif dont l'image n'est contenue dans aucun hyperplan correspondent aux systèmes linéaires de dimension finie sans point base sur X.

2. Construction de fibrés en droites sur les tores complexes

Nous allons maintenant construire des fibrés en droites sur un tore complexe $X = V/\Gamma$; nous montrerons plus loin (th. 5.10) que cette construction les donne en fait *tous*.

Une façon naturelle de construire un fibré en droites $L \to X$ est de partir de la projection $V \times \mathbf{C} \to V$ (c'est-à-dire du fibré trivial sur V) et de quotienter par une action de Γ. Il faut que Γ agisse de la façon habituelle (par translation) sur V et linéairement sur $\mathbf{C}$; en d'autres termes, qu'il agisse par

$$(z,t)\cdot\gamma = (z+\gamma, e_\gamma(z)t), \tag{11}$$

où $e_\gamma : V \to \mathbf{C}^*$ est une fonction holomorphe. La condition pour que l'on ait bien une action est que les fonctions e_γ (appelées *multiplicateurs*) vérifient les relations

$$e_{\gamma_1+\gamma_2}(z) = e_{\gamma_1}(z+\gamma_2)e_{\gamma_2}(z)$$

pour tous γ_1 et γ_2 dans Γ et tout z dans V.

Étant donnée une fonction thêta quelconque ϑ, on remarque que les quantiés $e_\gamma(z) = \vartheta(z+\gamma)/\vartheta(z)$ satisfont cette condition. En particulier, pour tout type (H,α) de fonction thêta normalisée (*cf.* IV.1.5, p. 39), on a des multiplicateurs

$$e_\gamma(z) = \frac{\vartheta(z+\gamma)}{\vartheta(z)} = \alpha(\gamma)e^{\pi H(\gamma,z)+\frac{\pi}{2}H(\gamma,\gamma)},$$

donc un fibré en droites [3] $(V\times\mathbf{C})/\Gamma \to V/\Gamma$ sur X, que l'on notera $L(H,\alpha)$. On vérifie que l'on a des isomorphismes

$$L(H_1,\alpha_1)\otimes L(H_2,\alpha_2) \simeq L(H_1+H_2,\alpha_1\alpha_2). \tag{12}$$

2.1. — Soit $\Pi : V\times\mathbf{C} \to L(H,\alpha)$ la surjection canonique. À toute section s de $L(H,\alpha)$ on associe une fonction holomorphe $\vartheta_s : V \to \mathbf{C}$ en définissant $\vartheta_s(z)$ comme l'unique complexe tel que $\Pi(z,\vartheta_s(z)) = s(\pi(z))$. Comme $\Pi(z+\gamma,\vartheta_s(z+\gamma)) = \Pi(z,\vartheta_s(z))$, on a

$$\vartheta_s(z+\gamma) = e_\gamma(z)\vartheta_s(z) = \alpha(\gamma)e^{\pi H(\gamma,z)+\frac{\pi}{2}H(\gamma,\gamma)}\vartheta_s(z).$$

On construit ainsi un isomorphisme entre l'espace vectoriel des sections de $L(H,\alpha)$ et l'ensemble des fonctions thêta normalisées de type (H,α).

La proposition IV.1.6, p. 40, entraîne que si $L(H,\alpha)$ a une section holomorphe non nulle, la forme H est positive (on calculera dans le théorème VI.2.2, p. 67, la dimension de l'espace vectoriel $\Gamma(X, L(H,\alpha))$ lorsque H est définie positive).

Si $L(H,\alpha)$ a une section *méromorphe* non nulle, son diviseur « provient » de l'abélianisé X_{ab} de X (cor. IV.3.6.d), p. 45), donc aussi $L(H,\alpha)$.

3. On munit le quotient $(V\times\mathbf{C})/\Gamma$ d'une structure de variété complexe en procédant comme en I.2.1, p. 6.

3. Faisceaux

La théorie des faisceaux permet de formaliser de façon maniable plusieurs des notions définies dans les numéros précédents, en particulier celle de fonction méromorphe, celle de diviseur (déf. IV.2.1, p. 41) ainsi que la définition de 1.3 des fibrés en droites par des fonctions de transition. Elle nous permettra aussi de définir la notion importante de première classe de Chern d'un fibré en droites. Nous ne donnons qu'un bref aperçu de la théorie, renvoyant le lecteur avide de détails à des ouvrages plus complets sur le sujet.

Définition 3.1. — Soit X un espace topologique. On appelle *faisceau* $\mathscr{F}$ sur X la donnée

— pour chaque ouvert U de X, d'un ensemble $\mathscr{F}(U)$;

— pour chaque inclusion d'ouverts $V \subset U$, d'une restriction $r_{VU} : \mathscr{F}(U) \to \mathscr{F}(V)$;

satisfaisant les conditions suivantes :

a) (restriction) pour toutes inclusions $W \subset V \subset U$, on a $r_{WU} = r_{WV} \circ r_{VU}$;

b) (recollement) si (U_α) est une famille d'ouverts d'union U, et si l'on se donne pour chaque α un élément f_α de $\mathscr{F}(U_\alpha)$ vérifiant $f_\alpha|_{U_\alpha \cap U_\beta} = f_\beta|_{U_\alpha \cap U_\beta}$, il existe un unique élément f de $\mathscr{F}(U)$ vérifiant $f|_{U_\alpha} = f_\alpha$ pour chaque α.

Pour chaque ouvert U, on note aussi $\Gamma(U, \mathscr{F})$ l'ensemble $\mathscr{F}(U)$; ses éléments sont appelés les *sections* de $\mathscr{F}$ sur U. On rencontre fréquemment des faisceaux de fonctions, pour lesquels $\mathscr{F}(U)$ est un sous-ensemble de l'ensemble des fonctions de U dans un ensemble fixé K. La propriété de restriction est alors automatique, et l'unicité dans le recollement aussi : la fonction f existe toujours comme fonction de U dans K, il s'agit de vérifier qu'elle est dans $\mathscr{F}(U)$.

Exemples 3.2. — 1) Si K est un ensemble, on peut prendre pour $\mathscr{F}(U)$ l'ensemble des fonctions localement constantes de U dans K ; on note le faisceau correspondant $\underline{K}$. Si K est un espace topologique, on peut aussi prendre pour $\mathscr{F}(U)$ l'ensemble des fonctions *continues* de U dans K.

2) Soient x un point de X et K un ensemble ; le *faisceau gratte-ciel* K_x est défini en prenant pour $K_x(U)$ l'ensemble des fonctions de U dans K nulles hors de x.

3) Les fonctions holomorphes sur une variété complexe X forment un faisceau noté $\mathscr{O}_X$. On note $\mathscr{O}_X^*$ le sous-faisceau des fonctions qui ne s'annulent pas. On définit le faisceau $\mathscr{M}_X$ des fonctions méromorphes sur X en définissant $\mathscr{M}_X(U)$ comme le corps des quotients de l'anneau intègre $\mathscr{O}_X(U)$, pour tout ouvert connexe U de X.

4) Soit L un fibré en droites sur une variété complexe. On définit un faisceau en associant à tout ouvert U de X l'espace vectoriel $\Gamma(U, L)$ des sections de L sur U. On l'appelle *faisceau des sections* de L, et on le note encore L (c'est incorrect, mais c'est l'usage et ça ne pose en fait pas trop de problèmes en pratique). Si D est un diviseur sur X, le faisceau des sections de $\mathscr{O}_X(D)$ est le sous-faisceau de $\mathscr{M}_X$ tel que $\mathscr{O}_X(D)(U)$ soit l'ensemble des fonctions f méromorphes sur U telles que le diviseur $\operatorname{div}(f) + D$ soit effectif sur U. Lorsque D est effectif, $\mathscr{O}_X(-D)$ est le sous-faisceau de $\mathscr{O}_X$ des fonctions holomorphes « nulles sur D ».

5) Soit X une variété différentiable ; en associant à tout ouvert U de X l'espace vectoriel des r-formes différentielles sur U, on définit un faisceau $\mathscr{A}_X^r$ sur X. On note simplement $\mathscr{A}_X$ au lieu de $\mathscr{A}_X^0$ pour le faisceau des fonctions de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur X. De la même façon, si X est une variété complexe de dimension n, on définit le faisceau $\mathscr{A}_X^{p,q}$ des formes différentielles sur X de type (p,q). Le faisceau $\mathscr{A}_X^{n,0}$ est le faisceau des sections du fibré en droites canonique ω_X défini dans l'exemple 1.2.3).

***Définition 3.3.* —** Soient X un espace topologique et $\mathscr{F}$ et $\mathscr{G}$ des faisceaux sur X. On appelle *morphisme* f de $\mathscr{F}$ dans $\mathscr{G}$ la donnée, pour chaque ouvert U de X, d'une application $f(U)\colon \mathscr{F}(U) \to \mathscr{G}(U)$. Ces applications doivent avoir des propriétés de compatibilité évidentes vis-à-vis des restrictions.

On notera aussi $\Gamma(f)$ l'application $f(X)\colon \Gamma(X,\mathscr{F}) \to \Gamma(X,\mathscr{G})$ entre sections globales.

On définit de façon évidente les faisceaux de groupes abéliens (on demande que chaque $\mathscr{F}(U)$ soit un groupe abélien et que les restrictions soient des morphismes de groupes) et les morphismes entre tels faisceaux. On peut définir le noyau d'un tel morphisme $f\colon \mathscr{F} \to \mathscr{G}$ en posant

$$\mathrm{Ker}(f)(U) = \mathrm{Ker}(f(U)).$$

Pour l'image, c'est plus difficile, car la définition naïve ne donne pas un faisceau : la propriété de recollement n'est en général pas satisfaite (*cf.* l'exemple suivant). Si $f\colon \mathscr{F} \to \mathscr{G}$ est un morphisme de faisceaux, il faut au contraire définir le faisceau $\mathrm{Im}\, f$ comme suit [(4)] : un élément t de $\mathscr{G}(U)$ est dans $(\mathrm{Im}\, f)(U)$ s'il existe un recouvrement ouvert (U_α) de U et des éléments s_α de $\mathscr{F}(U_\alpha)$ tels que $f(s_\alpha) = t|_{U_\alpha}$ pour tout α.

***Exemples 3.4.* —** 1) Soit X une variété complexe. Le noyau du morphisme $\mathbf{e}\colon \mathscr{O}_X \to \mathscr{O}_X^*$ défini par $\mathbf{e}(f) = e^{2i\pi f}$ est le faisceau $\underline{\mathbf{Z}}$. Pour tout ouvert U simplement connexe de X, le morphisme $\mathbf{e}(U)$ est surjectif (puisque l'on peut définir un logarithme sur U) ; le morphisme $\mathbf{e}$ est donc surjectif (puisque tout ouvert est réunion d'ouverts simplement connexes). On remarquera que les $\mathrm{Im}(\mathbf{e}(U))$ ne forment en général pas un faisceau : si U_1 et U_2 sont des ouverts simplement connexes de $\mathbf{C}$ dont la réunion est $\mathbf{C} \smallsetminus \{0\}$, la fonction z est dans $\mathrm{Im}(\mathbf{e}(U_1))$ et dans $\mathrm{Im}(\mathbf{e}(U_2))$, mais pas dans $\mathrm{Im}(\mathbf{e}(\mathbf{C} \smallsetminus \{0\}))$.

2) Si X est une variété complexe et x et y des points distincts de X, l'évaluation $(e_x, e_y)\colon \mathscr{O}_X \to \mathbf{C}_x \oplus \mathbf{C}_y$ est surjective. La flèche $(e_x, e_y)\colon \Gamma(X, \mathscr{O}_X) \to \mathbf{C} \oplus \mathbf{C}$ sur les

---

4. Pour les mêmes raisons, la définition du faisceau quotient $\mathscr{F}/\mathscr{F}'$ d'un faisceau $\mathscr{F}$ de groupes abéliens par un faisceau $\mathscr{F}'$ de sous-groupes est un peu alambiquée (heureusement, nous nous n'en servirons que dans une occasion, dans la proposition 5.1). Soit U un ouvert de X ; on peut définir une section de $\mathscr{F}/\mathscr{F}'$ sur U avec le vocabulaire de la définition IV.2.1, p. 41 : on dit qu'une famille (U_α, s_α), où (U_α) est un recouvrement ouvert de U et $s_\alpha \in \Gamma(U_\alpha, \mathscr{F})$, est admissible si

$$s_\alpha|_{U_\alpha \cap U_\beta} - s_\beta|_{U_\alpha \cap U_\beta} \in \mathscr{F}'(U_\alpha \cap U_\beta)$$

pour tout α et tout β dans I. De telles familles sont équivalentes si leur réunion est encore admissible. Un élément de $(\mathscr{F}/\mathscr{F}')(U)$ est une classe d'équivalence de familles admissibles. Par exemple, le groupe des diviseurs de X n'est autre que le groupe des sections du faisceau quotient $\mathscr{M}_X^*/\mathscr{O}_X^*$ (*cf.* ex. 3.2.3)).

sections globales n'est pas surjective si X est compacte connexe puisque $\Gamma(X, \mathscr{O}_X)$ consiste alors en les constantes.

4. Cohomologie

Soit X un espace topologique. Pour toute suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathscr{F}' \xrightarrow{f} \mathscr{F} \xrightarrow{g} \mathscr{F}''$$

de faisceaux de groupes abéliens sur X, la suite

$$0 \longrightarrow \Gamma(X, \mathscr{F}') \xrightarrow{\Gamma(f)} \Gamma(X, \mathscr{F}) \xrightarrow{\Gamma(g)} \Gamma(X, \mathscr{F}'')$$

est encore exacte, mais $\Gamma(g)$ n'est en général pas surjective, même si g l'est, comme on l'a vu dans les exemples 3.4.

On va définir, pour tout morphisme $f\colon \mathscr{F} \to \mathscr{G}$ de faisceaux de groupes abéliens sur X et tout entier $q \geq 0$, des groupes $H^q(X, \mathscr{F})$ et $H^q(X, \mathscr{G})$ et des morphismes de groupes $H^q(f)\colon H^q(X, \mathscr{F}) \to H^q(X, \mathscr{G})$, avec $H^0(X, \mathscr{F}) = \Gamma(X, \mathscr{F})$ et $H^0(f) = \Gamma(f)$, de façon que pour toute suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathscr{F}' \xrightarrow{f} \mathscr{F} \xrightarrow{g} \mathscr{F}'' \longrightarrow 0$$

on ait une suite exacte longue

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow H^0(X, \mathscr{F}') \xrightarrow{H^0(f)} H^0(X, \mathscr{F}) \xrightarrow{H^0(g)} H^0(X, \mathscr{F}'') \longrightarrow \\ H^1(X, \mathscr{F}') \xrightarrow{H^1(f)} H^1(X, \mathscr{F}) \xrightarrow{H^1(g)} H^1(X, \mathscr{F}'') \longrightarrow \cdots \end{aligned}$$

avec des propriétés fonctorielles évidentes.

La construction est assez technique. On se donne tout d'abord un recouvrement $\mathscr{U}$ de X par des ouverts $(U_\alpha)_{\alpha \in I}$, où l'ensemble I est bien ordonné. On définit l'ensemble $C^q(\mathscr{U}, \mathscr{F})$ des q-cochaînes associé comme

$$C^q(\mathscr{U}, \mathscr{F}) = \prod_{\alpha_0 < \cdots < \alpha_q} \mathscr{F}(U_{\alpha_0} \cap \cdots \cap U_{\alpha_q}),$$

de sorte que

$$\begin{aligned} C^0(\mathscr{U}, \mathscr{F}) &= \prod_{\alpha} \mathscr{F}(U_\alpha), \\ C^1(\mathscr{U}, \mathscr{F}) &= \prod_{\alpha < \beta} \mathscr{F}(U_\alpha \cap U_\beta). \end{aligned}$$

On définit aussi des opérateurs

$$C^0(\mathscr{U}, \mathscr{F}) \xrightarrow{\delta^0} C^1(\mathscr{U}, \mathscr{F}) \xrightarrow{\delta^1} C^2(\mathscr{U}, \mathscr{F}) \xrightarrow{\delta^2} \cdots$$

par les formules

$$\begin{aligned}
\delta^0(s)_{\alpha_0\alpha_1} &= s_{\alpha_1}|_{U_{\alpha_0}\cap U_{\alpha_1}} - s_{\alpha_0}|_{U_{\alpha_0}\cap U_{\alpha_1}}\\
\delta^1(s)_{\alpha_0\alpha_1\alpha_2} &= s_{\alpha_1\alpha_2}|_{U_{\alpha_0}\cap U_{\alpha_1}\cap U_{\alpha_2}} - s_{\alpha_0\alpha_2}|_{U_{\alpha_0}\cap U_{\alpha_1}\cap U_{\alpha_2}} + s_{\alpha_0\alpha_1}|_{U_{\alpha_0}\cap U_{\alpha_1}\cap U_{\alpha_2}}\\
&\cdots\\
\delta^q(s)_{\alpha_0\cdots\alpha_{q+1}} &= \sum_{j=0}^{q+1}(-1)^j s_{\alpha_0\cdots\widehat{\alpha_j}\cdots\alpha_{q+1}}|_{U_{\alpha_0}\cap\cdots\cap U_{\alpha_{q+1}}}.
\end{aligned}$$

4.1. — On vérifie que l'on obtient bien un complexe (c'est-à-dire que $\delta^q\circ\delta^{q-1}=0$), dont on note $H^q(\mathscr{U},\mathscr{F})$ le groupe de cohomologie $\operatorname{Ker}\delta^q/\operatorname{Im}\delta^{q-1}$. Les groupes obtenus dépendent hélas du recouvrement $\mathscr{U}$ choisi. En prenant la limite inductive sur tous les recouvrements (*cf.* [**BT**, p. 112]), on définit des groupes $H^q(X,\mathscr{F})$ qui ont les propriétés voulues, en tout cas sur des espaces raisonnables (par exemple paracompacts séparés) (5).

5. Première classe de Chern

Nous allons appliquer les constructions précédentes dans quelques cas simples.

Le groupe des diviseurs d'une variété complexe et son groupe de Picard s'interprètent naturellement dans le langage de la cohomologie des faisceaux (c'est même notre principale motivation pour l'introduction de cette théorie au premier abord assez rébarbative).

Proposition 5.1. — *Soit X une variété complexe connexe ; on a*

$$\operatorname{Div}(X)\simeq H^0(X,\mathscr{M}_X^*/\mathscr{O}_X^*)\qquad \textit{et}\qquad \operatorname{Pic}(X)\simeq H^1(X,\mathscr{O}_X^*).$$

Démonstration. — Le premier isomorphisme a été vu dans la note 4, p. 55 : il résulte de la définition même du faisceau quotient $\mathscr{M}_X^*/\mathscr{O}_X^*$. Passons au second isomorphisme. Un fibré en droites L sur X correspond par 1.3 à la donnée d'un recouvrement ouvert $\mathscr{U}=(U_\alpha)$ de X

5. Pour pouvoir effectivement calculer ces groupes, il est utile de savoir pour quels recouvrements $H^\bullet(\mathscr{U},\mathscr{F})$ est isomorphe à $H^\bullet(X,\mathscr{F})$. Le théorème de Leray ([**GH**, p. 40]) nous dit qu'il suffit pour cela que les groupes de cohomologie $H^p(U_{\alpha_1}\cap\cdots\cap U_{\alpha_n},\mathscr{F})$ soient nuls pour tous $\alpha_1,\dots,\alpha_n$ dans I et tout $p>0$. C'est le cas dans les situations suivantes :

— X est une variété complexe, le faisceau $\mathscr{F}$ est *cohérent* (c'est-à-dire localement isomorphe au conoyau d'un morphisme $\mathscr{O}_U^r\to\mathscr{O}_U^s$; *cf.* [**GR**, p. 128]. C'est le cas si $\mathscr{F}$ est le faisceau des sections holomorphes d'un fibré en droites, mais pas si $\mathscr{F}=\mathscr{O}_X^*$!), et les éléments de $\mathscr{U}$ sont biholomorphiquement équivalents à des sous-ensembles bornés de $\mathbf{C}^n$ définis par des conditions du type $|f_j(x)|<1$, où $f_1,\dots,f_m$ sont holomorphes. Ces recouvrements sont cofinaux dans l'ensemble des recouvrements ouverts de X, c'est-à-dire que pour tout recouvrement ouvert de X, il en existe un plus fin de ce type. Cela permet de calculer la limite inductive qui définit $H^\bullet(X,\mathscr{F})$ en n'utilisant que ce type de recouvrement.

— X est un espace topologique, le faisceau $\mathscr{F}$ est localement constant (*cf.* ex. 3.2.1)), et les intersections finies d'éléments de $\mathscr{U}$ sont contractiles (de nouveau, ces ≪ bons recouvrements ≫ sont cofinaux dans l'ensemble des recouvrements ouverts de X ; *cf.* [**BT**, cor. 5.2, p. 43]).

et de fonctions $g_{\alpha\beta}$ holomorphes dans $U_\alpha \cap U_\beta$ qui ne s'annulent pas. En d'autres termes, $g_{\alpha\beta}$ est dans $\Gamma(U_{\alpha\beta}, \mathscr{O}_X^*)$ et les $(g_{\alpha\beta})_{\alpha<\beta}$ définissent un élément g de $C^1(\mathscr{U}, \mathscr{O}_X^*)$. La condition

$$g_{\alpha\beta}g_{\beta\gamma}g_{\gamma\alpha} = 1$$

montre que g est dans le noyau de δ^1 donc définit un élément de $H^1(\mathscr{U}, \mathscr{O}_X^*)$ (qui par la note 1, p. 51, ne dépend pas des trivialisations de L choisies), donc un élément $\varphi(L)$ de $H^1(X, \mathscr{O}_X^*)$. Cet élément ne dépend pas non plus du recouvrement $\mathscr{U}$: si $\mathscr{U}'$ est un recouvrement plus fin que $\mathscr{U}$, l'élément g' de $H^1(\mathscr{U}', \mathscr{O}_X^*)$ que l'on construit est la restriction de g. On obtient donc un morphisme de groupes $\varphi\colon\ \mathrm{Pic}(X) \to H^1(X, \mathscr{O}_X^*)$. C'est un bon exercice de montrer que c'est un isomorphisme [(6)]. □

Une partie de la suite exacte longue de cohomologie associée à la suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathscr{O}_X^* \longrightarrow \mathscr{M}_X^* \longrightarrow \mathscr{M}_X^*/\mathscr{O}_X^* \longrightarrow 0$$

s'interprète alors de la façon suivante :

$$\begin{array}{ccccccc} H^0(X, \mathscr{O}_X^*) & \longrightarrow & H^0(X, \mathscr{M}_X^*) & \longrightarrow & H^0(X, \mathscr{M}_X^*/\mathscr{O}_X^*) & \longrightarrow & H^1(X, \mathscr{O}_X^*) \\ & & f & \longmapsto & \mathrm{div}(f);\quad D & \longmapsto & [\mathscr{O}_X(D)] \end{array}$$

On a aussi la suite exacte suivante, dite exponentielle,

$$0 \longrightarrow \underline{\mathbf{Z}} \xrightarrow{\ \iota\ } \mathscr{O}_X \xrightarrow{\ \mathbf{e}\ } \mathscr{O}_X^* \longrightarrow 0,$$

où $\mathbf{e}(z) = e^{2i\pi z}$. On obtient

$$\begin{aligned} (13)\quad 0 \longrightarrow H^0(X, \underline{\mathbf{Z}}) \longrightarrow H^0(X, \mathscr{O}_X) \xrightarrow{H^0(\mathbf{e})} H^0(X, \mathscr{O}_X^*) \longrightarrow H^1(X, \underline{\mathbf{Z}}) \longrightarrow \\ \longrightarrow H^1(X, \mathscr{O}_X) \longrightarrow H^1(X, \mathscr{O}_X^*) \xrightarrow{c_1} H^2(X, \underline{\mathbf{Z}}) \longrightarrow H^2(X, \mathscr{O}_X). \end{aligned}$$

Exemple 5.2. — On obtient par exemple le fait que si $H^1(X, \underline{\mathbf{Z}})$ est nul, toute fonction holomorphe qui ne s'annule pas admet un logarithme global sur X. C'est le cas en particulier si $X = \mathbf{C}^n$; on a de plus $H^1(\mathbf{C}^n, \mathscr{O}_{\mathbf{C}^n}) = H^2(\mathbf{C}^n, \underline{\mathbf{Z}}) = 0$ ([**GR**, th. 3, p. 185]), de sorte que $\mathrm{Pic}(\mathbf{C}^n)$ est trivial.

Définition 5.3. — Soient X une variété complexe et L un fibré en droites sur X. L'image de la classe de L dans $\mathrm{Pic}(X)$ par le morphisme de groupes

$$c_1\colon\ \mathrm{Pic}(X) \longrightarrow H^2(X, \underline{\mathbf{Z}})$$

s'appelle la première classe de Chern de L ; elle est notée $c_1(L)$. On note $\mathrm{Pic}^0(X)$ le noyau de c_1.

6. Si $\varphi(L)$ est nul, il existe un recouvrement ouvert $\mathscr{U}'$ de X plus fin que $\mathscr{U}$ tel que la restriction de g à $\mathscr{U}'$ soit dans l'image de δ^0. Cela entraîne (*cf.* note 1, p. 51) que L est trivial ; ainsi φ est injective. À tout élément g de $H^1(X, \mathscr{O}_X^*)$ correspond un recouvrement ouvert $\mathscr{U}$ et un élément de $H^1(\mathscr{U}, \mathscr{O}_X^*)$ qui définissent un fibré en droites L sur X vérifiant $\varphi(L) = g$; ainsi φ est surjective.

Remarque 5.4. — Supposons L défini par des fonctions de transition $g_{\alpha\beta}$ sur un « bon » recouvrement $\mathscr{U}$ de X (c'est-à-dire tel que les intersections finies d'ouverts de $\mathscr{U}$ soient contractiles; *cf.* note 5, p. 57); la classe $c_1(L)$ se calcule de la façon suivante. Soit $h_{\alpha\beta}$ une détermination de $\frac{1}{2i\pi}\log g_{\alpha\beta}$ dans l'ouvert simplement connexe $U_\alpha \cap U_\beta$. Considérons le 2-cocyle c défini par

$$c_{\alpha\beta\gamma} = h_{\alpha\beta} + h_{\beta\gamma} + h_{\gamma\alpha}.$$

On a $e^{2i\pi c_{\alpha\beta\gamma}} = g_{\alpha\beta}g_{\beta\gamma}g_{\gamma\alpha} = 1$, de sorte que $c_{\alpha\beta\gamma}$ est entier. Dans l'ouvert $U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma \cap U_\delta$, on a

$$\begin{aligned} c_{\beta\gamma\delta} - c_{\alpha\gamma\delta} + c_{\alpha\beta\delta} - c_{\alpha\beta\gamma} &= (h_{\beta\gamma} + h_{\gamma\delta} + h_{\delta\beta}) - (h_{\alpha\gamma} + h_{\gamma\delta} + h_{\delta\alpha}) \\ &\quad + (h_{\alpha\beta} + h_{\beta\delta} + h_{\delta\alpha}) - (h_{\alpha\beta} + h_{\beta\gamma} + h_{\gamma\alpha}) \\ &= 0, \end{aligned}$$

de sorte que $\delta^2(c) = 0$: le cocyle c définit un élément de $H^2(\mathscr{U}, \underline{\mathbf{Z}})$ donc, par 4.1, de $H^2(X, \underline{\mathbf{Z}})$; c'est $c_1(L)$.

On a, pour toute variété différentiable X, un isomorphisme (7)

$$H^\bullet(X, \underline{\mathbf{C}}) \simeq H^\bullet_{\mathrm{DR}}(X). \tag{14}$$

Définition 5.5. — Soit M une variété différentiable compacte. Notons ι l'inclusion de faisceaux $\underline{\mathbf{Z}} \to \underline{\mathbf{C}}$. Les classes dans l'image de la composée

$$\varphi_q \colon H^q(M, \underline{\mathbf{Z}}) \xrightarrow{H^q(\iota)} H^q(M, \underline{\mathbf{C}}) \simeq H^q_{\mathrm{DR}}(M)$$

sont dites *entières* (8).

---

7. On trouvera une démonstration de ce résultat fondamental dans [**BT**, prop. 10.6, p. 112]. L'idée est de considérer le complexe de faisceaux

$$0 \longrightarrow \underline{\mathbf{C}} \longrightarrow \mathscr{A}^0_X \xrightarrow{d} \mathscr{A}^1_X \xrightarrow{d} \mathscr{A}^2_X \xrightarrow{d} \cdots \xrightarrow{d} \mathscr{A}^n_X \longrightarrow 0$$

qui est exact par le lemme de Poincaré (*cf.* ex. 3.2.5) pour la définition des $\mathscr{A}^r_X$). On montre par ailleurs que $H^q(X, \mathscr{A}^r_X)$ est nul pour tout r et tout $q > 0$, et on en déduit par un argument d'algèbre homologique que $H^q(X, \underline{\mathbf{C}})$ est isomorphe pour tout q au q-ième groupe de cohomologie du complexe $(H^0(X, \mathscr{A}^\bullet_X), d)$, qui n'est autre que $H^q_{\mathrm{DR}}(X)$.

8. Le lien avec III.3.4, p. 31, est le suivant. Tout d'abord (voir par exemple [**BT**, pp. 182 et suivantes]), on associe à chaque sous-variété compacte Z de M une classe $[Z]$ dans un groupe abélien de type fini $H_\bullet(M, \mathbf{Z})$ (l'*homologie singulière* de M), et l'intégrale d'une forme *fermée* sur Z ne dépend que de la classe $[Z]$. Ensuite, par [**BT**, th. 15.8, p. 191], les groupes de cohomologie du faisceau $\underline{\mathbf{Z}}$ sur M sont les mêmes que les groupes de cohomologie singulière $H^\bullet(M, \mathbf{Z})$, définis dans [**BT**, p. 189] par exemple. Enfin, il existe une application bilinéaire non dégénérée $\langle\,,\,\rangle \colon H^q(M, \mathbf{Z}) \times H_q(M, \mathbf{Z}) \to \mathbf{Z}$ qui est telle que pour toute sous-variété compacte Z de dimension q de M et toute q-forme fermée *entière* ω sur M, on ait

$$\int_Z \omega = \langle \alpha, [Z] \rangle,$$

où $[\omega] = \varphi_q(\alpha)$. En particulier, cette intégrale est un entier : l'intégrale d'une forme différentielle entière fermée sur toute sous-variété compacte est entière. Dans le cas $M = \mathbf{P}^n$, on peut comme dans la note 3, p. 31, utiliser la fibration $\mathbf{C}^{n+1} \smallsetminus \{0\} \to \mathbf{P}^n$ et la suite exacte associée en homologie singulière (*cf.* [**BT**, p. 197]) pour démontrer

En particulier, via la composée

$$c_1^{\mathbf{R}}\colon \operatorname{Pic}(X) \xrightarrow{c_1} H^2(X, \underline{\mathbf{Z}}) \xrightarrow{\varphi_2} H^2_{\mathrm{DR}}(X),$$

on associe à tout fibré en droites L sur une variété complexe X une classe entière de 2-formes. Il existe un moyen simple de calculer un représentant de cette classe à l'aide d'une métrique hermitienne sur L, c'est-à-dire d'une application $\| \ \|\colon L \to [0, +\infty[$ qui vérifie, dans toute trivialisation $\psi_\alpha\colon p^{-1}(U_\alpha) \to U_\alpha \times \mathbf{C}$ de L, l'égalité $\|\psi_\alpha^{-1}(x,t)\| = h_\alpha(x)|t|$, où $h_\alpha\colon U_\alpha \to]0, +\infty[$ est une fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$.

***Proposition 5.6.* —** *Soit s une section locale* holomorphe *de L qui ne s'annule pas. L'expression*

$$\frac{1}{2i\pi}\partial\overline{\partial}\log\|s\|^2$$

ne dépend pas du choix de s ; elle définit une forme différentielle réelle sur X de type $(1,1)$ *qui représente $c_1^{\mathbf{R}}(L)$.*

Indications de démonstration. — Toute autre section locale holomorphe s' de L qui ne s'annule pas peut écrire $s' = fs$, où f est holomorphe et ne s'annule pas. On a alors

$$\partial\overline{\partial}\log\|s'\|^2 = \partial\overline{\partial}\log\|s\|^2 + \partial\overline{\partial}\log f + \partial\overline{\partial}\log\overline{f}.$$

Comme $\log f$ est holomorphe, on a $\overline{\partial}\log f = \partial\log\overline{f} = 0$, de sorte que l'expression de la proposition ne dépend pas du choix de s. En particulier, comme il existe toujours localement des sections holomorphes qui ne s'annulent pas, ces expressions définissent une $(1,1)$-forme réelle globale sur X. Pour montrer qu'elle représente effectivement $c_1^{\mathbf{R}}(L)$, je renvoie le lecteur à [**GH**, p. 141]. □

***Exemples 5.7.* —** 1) La fibre du fibré $\mathscr{O}_{\mathbf{P}^n}(-1)$ en un point x s'identifie à la droite ℓ_x de $\mathbf{C}^{n+1}$ que x représente (ex. 1.2.2)). On met sur ℓ_x la métrique $\|z\| = \sqrt{\sum_{j=0}^n z_j\overline{z}_j}$. Sur U_α, on prend comme section $s_\alpha(z) = z/z_\alpha$; la forme

$$\frac{1}{2i\pi}\partial\overline{\partial}\log\|z/z_\alpha\|^2 = \frac{1}{2i\pi}\partial\overline{\partial}\log\|z\|^2 - \frac{1}{2i\pi}\partial\overline{\partial}\log(z_\alpha\overline{z}_\alpha) = \frac{1}{2i\pi}\partial\overline{\partial}\log\|z\|^2$$

(cette expression est homogène de degré 0 en z) représente alors la classe $c_1^{\mathbf{R}}(\mathscr{O}_{\mathbf{P}^n}(-1))$. C'est l'opposé de la forme ω_{FS} définie dans l'exemple III.5.1, p. 34, de sorte que

$$c_1^{\mathbf{R}}(\mathscr{O}_{\mathbf{P}^n}(1)) = -c_1^{\mathbf{R}}(\mathscr{O}_{\mathbf{P}^n}(-1)) = [\omega_{FS}].$$

On a d'autre part $H^1(\mathbf{P}^n, \mathscr{O}_{\mathbf{P}^n}) = 0$ (*cf.* exerc. V.4), d'où, par la suite exacte (13), une inclusion de $\operatorname{Pic}(\mathbf{P}^n)$ dans $H^2(\mathbf{P}^n, \underline{\mathbf{Z}})$. Comme ce dernier groupe est isomorphe [9] à $\mathbf{Z}$

---

que $H_2(\mathbf{P}^n, \mathbf{Z})$ est isomorphe à $\mathbf{Z}$, engendré par la classe de n'importe quelle droite. Le critère III.3.5, p. 31, en résulte.

9. Le calcul de $H^2(\mathbf{P}^n, \underline{\mathbf{Z}})$ (qui par la note 8, p. 59, est la même chose que $H^2(\mathbf{P}^n, \mathbf{Z})$) résulte, comme dans la note 3, p. 31, de la suite spectrale associée en cohomologie singulière ([**BT**, th. 15.11, p. 192]) à la fibration $\mathbf{C}^{n+1} \smallsetminus \{0\} \to \mathbf{P}^n$ (de façon générale, l'homologie et la cohomologie singulières sont reliées par la formule dite des coefficients universels ([**BT**, th. 15.14, p. 194]) qui permet de calculer l'une à partir de l'autre ; on peut donc aussi utiliser le calcul de la note 3, p. 31).

et que la classe de $\mathscr{O}_{\mathbf{P}^n}(1)$ n'est pas divisible dans $\mathrm{Pic}(\mathbf{P}^n)$, puisque l'on a montré dans l'exemple III.5.1, p. 34, l'égalité $\int_{\mathbf{P}^1} c_1^{\mathbf{R}}(\mathscr{O}_{\mathbf{P}^n}(1)) = 1$, on en déduit $\mathrm{Pic}(\mathbf{P}^n) \simeq \mathbf{Z}[\mathscr{O}_{\mathbf{P}^n}(1)]$.

2) Soient X un tore complexe et $\pi\colon V \to X$ son revêtement universel. On choisit un type (H,α) de fonction thêta normalisée et on considère le fibré en droites $L(H,\alpha)$ sur X construit dans le § 2. L'expression $\|(z,t)\| = e^{-\frac{\pi}{2}H(z,z)}|t|$ est invariante par l'action (11) de Γ sur $V \times \mathbf{C}$, donc permet de définir une métrique sur $L(H,\alpha)$. Ainsi, la forme différentielle

$$\frac{1}{2i\pi}\partial\overline{\partial}\log e^{-\pi H(z,z)} = \frac{i}{2}\partial\overline{\partial}H(z,z) = \operatorname{Im} H$$

est constante et représente $c_1^{\mathbf{R}}(L(H,\alpha))$; on la notera encore (abusivement) $c_1(L(H,\alpha))$.

Corollaire 5.8. — *Soient $u\colon X \to Y$ une application holomorphe entre variétés complexes et L un fibré en droites sur Y. On a $c_1^{\mathbf{R}}(u^*L) = u^*c_1^{\mathbf{R}}(L)$.*

Démonstration. — Soit s une section locale holomorphe de L qui ne s'annule pas. Il lui correspond la section $\Gamma(u)(s)\colon x \mapsto (x, s(u(x)))$ de u^*L (*cf.* § 1, p. 49). On a

$$\partial\overline{\partial}\log\|\Gamma(u)(s)\|^2 = u^*\left(\partial\overline{\partial}\log\|s\|^2\right),$$

d'où le corollaire. □

Soit toujours $X = V/\Gamma$ un tore complexe. On démontre que pour tout entier $r \geq 0$, on a [10]

$$H^r(X,\underline{\mathbf{Z}}) \simeq \bigwedge^r \Gamma^* \qquad \text{et} \qquad H^r(X,\mathscr{O}_X) \simeq \bigwedge^r \overline{V}^* \simeq \bigwedge^{0,r} V^*.$$

De plus, moyennant ces identifications, si ι désigne l'inclusion de faisceaux $\underline{\mathbf{Z}} \to \underline{\mathbf{C}}$ et ι' l'inclusion $\underline{\mathbf{C}} \to \mathscr{O}_X$, l'application $H^r(\iota)\colon H^r(X,\underline{\mathbf{Z}}) \to H^r(X,\underline{\mathbf{C}})$ associe à une forme alternée ω sur Γ son extension $\mathbf{R}$-linéaire $\omega_{\mathbf{R}}$ à V, tandis que l'application $H^r(\iota')\colon H^r(X,\underline{\mathbf{C}}) \to H^r(X,\mathscr{O}_X)$ associe à une forme ω sa partie $\omega^{0,r}$ de type $(0,r)$ (*cf.* la décomposition (6)).

La suite exacte (13) se lit alors

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 \longrightarrow H^1(X,\underline{\mathbf{Z}}) & \longrightarrow & H^1(X,\mathscr{O}_X) & \longrightarrow & H^1(X,\mathscr{O}_X^*) & \xrightarrow{c_1} & H^2(X,\underline{\mathbf{Z}}) & \longrightarrow & H^2(X,\mathscr{O}_X) \\
\wr\| & & \wr\| & & \wr\| & & \wr\| & & \wr\| \\
0 \longrightarrow \quad \Gamma^* & \xrightarrow{H^1(\iota)} & \overline{V}^* & \xrightarrow{H^1(\mathbf{e})} & \mathrm{Pic}(X) & \xrightarrow{c_1} & \bigwedge^2 \Gamma^* & \xrightarrow{H^2(\iota)} & \bigwedge^{0,2} V^*,
\end{array}$$

10. Le calcul de $H^r(X,\underline{\mathbf{Z}})$ se fait à l'aide de la formule de Künneth comme dans la note 6, p. 33. Pour celui de $H^r(X,\mathscr{O}_X)$, on peut utiliser le complexe de Dolbeault

$$0 \longrightarrow \mathscr{O}_X \longrightarrow \mathscr{A}_X^0 \xrightarrow{\overline{\partial}} \mathscr{A}_X^{0,1} \xrightarrow{\overline{\partial}} \mathscr{A}_X^{0,2} \xrightarrow{\overline{\partial}} \cdots \xrightarrow{\overline{\partial}} \mathscr{A}_X^{0,n}$$

comme dans la note 7, p. 59, pour montrer l'isomorphisme

$$H^r(X,\mathscr{O}_X) \simeq \{\text{formes de type } (0,r)\ \overline{\partial}\text{-fermées sur } X\}/\{\text{formes de type } (0,r)\ \overline{\partial}\text{-exactes}\}.$$

On montre ensuite comme dans le § III.4, p. 31, que toute forme $\overline{\partial}$-fermée est $\overline{\partial}$-cohomologue à une forme constante, d'où l'on déduit $H^r(X,\mathscr{O}_X) \simeq \{\text{formes de type } (0,r) \text{ sur } V\}$. L'identification de $H^r(\iota)$ et de $H^r(\iota')$ résulte de fonctorialités diverses. Les lecteurs qui ne seraient pas convaincus par ces arguments peuvent consulter [**M1**, pp. 4–13] ou [**LB**, pp. 15–27].

où les applications de la suite exacte du bas sont définies par

$$\begin{array}{rcccl} H^1(\iota) & : & \omega & \longmapsto & \omega_{\mathbf{R}}^{0,1} \colon \big(z \mapsto -\omega_{\mathbf{R}}(iz) + i\omega_{\mathbf{R}}(z)\big) \\ H^1(\mathbf{e}) & : & \ell & \longmapsto & [L(0, e^{2i\pi \operatorname{Im} \ell(\cdot)})] \\ H^2(\iota) & : & \omega & \longmapsto & \omega_{\mathbf{R}}^{0,2}, \end{array}$$

tandis que $c_1(L(H,\alpha)) = \operatorname{Im} H$.

Proposition 5.9. — *Soit $X = V/\Gamma$ un tore complexe. On a une suite exacte de groupes abéliens*

$$0 \longrightarrow \operatorname{Pic}^0(X) \longrightarrow \operatorname{Pic}(X) \xrightarrow{c_1} \bigwedge^2 \Gamma^* \cap \bigwedge^{1,1} V^* \longrightarrow 0. \tag{15}$$

Le groupe $\operatorname{Pic}^0(X)$ est isomorphe au au tore complexe $\overline{V}^*/\hat{\Gamma}$, où

$$\hat{\Gamma} = \{\ell \in \overline{V}^* \mid \operatorname{Im} \ell(\Gamma) \subset \mathbf{Z}\},$$

c'est-à-dire au groupe des caractères unitaires $\alpha \colon \Gamma \to U(1)$ de Γ. On l'appelle le tore dual *de X.*

Démonstration. — La suite exacte résulte de ce qui précéde, en définissant $\operatorname{Pic}^0(X)$ comme le quotient de $\overline{V}^*$ par l'image de $H^1(\iota)$. Cette dernière est bien contenue dans $\hat{\Gamma}$ et inversement, tout élément ℓ de $\hat{\Gamma}$ est l'image par $H^1(\iota)$ de l'élément $\gamma \mapsto \operatorname{Im} \ell(\Gamma)$ de Γ^*.

Vérifions la dernière assertion. Un caractère unitaire α de Γ est uniquement déterminé par ses valeurs sur une base de Γ, qui s'écrivent $e^{2i\pi a_1}, \dots, e^{2i\pi a_{2g}}$. On lui associe la forme $\mathbf{R}$-linéaire $\ell_{\mathbf{R}} \colon V \to \mathbf{R}$ qui prend la valeur a_j sur chaque vecteur de base, puis une forme $\mathbf{C}$-antilinéaire ℓ sur V par la formule $\ell(z) = -\ell_{\mathbf{R}}(iz) + i\ell_{\mathbf{R}}(z)$. On obtient ainsi une surjection $\overline{V}^* \to \operatorname{Hom}(\Gamma, U(1))$ dont le noyau est $\hat{\Gamma}$; comme $\operatorname{Hom}(\Gamma, U(1))$ est compact (il est homéomorphe à $U(1)^{2g}$), $\hat{\Gamma}$ est un réseau (*cf.* I.1.4, p. 6). □

Cette proposition va nous permettre de montrer que la construction du § 2 fournit *tous* les fibrés en droites sur un tore complexe.

***Théorème 5.10* (Appell-Humbert).** — *Tout fibré en droites sur un tore complexe est isomorphe à un fibré $L(H,\alpha)$, et le couple (H,α) est uniquement déterminé. On l'appellera le* type *du fibré en droites.*

Démonstration. — Soit X un tore complexe. Le groupe $\operatorname{Pic}^0(X)$ est isomorphe au sous-groupe de $\operatorname{Pic}(X)$ formé des fibrés $L(0,\alpha)$. Dans la suite exacte (15), l'image du morphisme c_1 s'identifie à l'ensemble des formes hermitiennes sur V dont la partie imaginaire est entière sur Γ et $c_1(L(H,\alpha)) = H$. Il suffit donc de montrer que pour toute telle forme H, il existe un caractère unitaire $\alpha \colon \Gamma \to U(1)$ qui vérifie (8). Ce résultat facile a été proposé en exercice (exerc. IV.2, p. 46). □

5.11. — On a défini en IV.3.2, p. 44, le type d'un diviseur effectif sur un tore complexe. Ce n'est autre que le type du fibré en droites associé $\mathscr{O}_X(D)$. On peut ainsi étendre cette définition à tous les diviseurs.

***Remarques 5.12.* —** 1) L'énoncé de la proposition se généralise à toutes les variétés complexes compactes *kählériennes* (c'est-à-dire les variétés sur lesquelles existe une forme de Kähler) : on a toujours une suite exacte

$$0 \longrightarrow \operatorname{Pic}^0(X) \longrightarrow \operatorname{Pic}(X) \xrightarrow{c_1} \operatorname{NS}(X) \longrightarrow 0,$$

qui provient de (13). Le groupe $\operatorname{NS}(X)$ (dit de Néron-Severi) est le sous-groupe $\operatorname{Im}(c_1)$ de $H^2(X, \mathbf{Z})$; il est abélien de type fini. Le groupe $\operatorname{Pic}^0(X) = H^1(X, \mathscr{O}_X)/H^1(X, \mathbf{Z})$ est un tore complexe ([**GH**, p. 331]).

2) Soit X un tore complexe. Tout diviseur de X provient de son abélianisé X_{ab} (cor. IV.3.6, p. 45) ; l'image de l'application $\operatorname{Div}(X) \to \operatorname{Pic}(X)$ est donc contenue dans $\rho^* \operatorname{Pic}(X_{\mathrm{ab}})$ (nous montrerons dans la proposition VI.7.1, p. 78, qu'elle lui est égale) et il peut donc arriver que certains des fibrés $L(H, \alpha)$ n'aient pas de section méromorphe.

Terminons en faisant le lien entre les approches des chapitre III et IV, comme promis dans l'introduction. Soient X un tore complexe et $u\colon X \to \mathbf{P}^n$ une application holomorphe. Par l'exemple 5.7.1) et le corollaire 5.8, la forme de Kähler entière $u^*\omega_{FS}$ sur X construite au chapitre III représente la première classe de Chern du fibré en droites $u^*\mathscr{O}_{\mathbf{P}^n}(1)$. Ce fibré est du type $L(H, \alpha)$ par le théorème d'Appell-Humbert, et sa première classe de Chern est représentée par $\operatorname{Im} H$ (exemple 5.7.2)) qui est donc le représentant constant de la classe de cohomologie $[u^*\omega_{FS}]$. Enfin, par 1.6, le morphisme u est donné par des sections de $L(H, \alpha)$, c'est-à-dire par des fonctions thêta normalisées de même type, sans zéro commun (on retrouve le résultat du corollaire IV.3.4, p. 45), de forme de Riemann $\operatorname{Im} H$. C'est la forme de Kähler entière sur X construite dans le corollaire IV.3.5, p. 45. Les deux constructions donnent donc la même classe de Kähler entière sur X.

Exercices

V.1. — Soient W un espace vectoriel complexe et m un entier ; montrer que l'espace vectoriel des sections de $\mathscr{O}_{\mathbf{P}W}(m)$ est nul pour $m < 0$ et isomorphe à l'espace vectoriel des polynômes homogènes de degré m sur W pour $m \geq 0$.

V.2. — Soit W un espace vectoriel complexe de dimension n. Pour tout entier naturel $d \leq \dim W$, on note $G(d, W)$ l'ensemble des sous-espaces vectoriels de W de dimension d.

a) Montrer que le groupe linéaire $\mathrm{GL}(W)$ agit transitivement sur $G(d, W)$. On munit $G(d, W)$ de la topologie quotient et on l'appelle une variété *grassmannienne*.

b) Munir $G(d, W)$ d'une structure de variété complexe de dimension $d(n-d)$ (*Indication :* chaque sous-espace vectoriel U de W de codimension d définit un ouvert $\{\Pi \in G(d, W) \mid \Pi \cap U = \{0\}\}$ de $G(d, W)$ homéomorphe à $\operatorname{Hom}(W/U, U)$ que l'on peut prendre pour carte). On remarque que $G(1, W)$ n'est autre que l'espace projectif $\mathbf{P}W$.

c) Construire un fibré en droites $L \to G(d, W)$ dont la fibre au-dessus d'un point Π de $G(d, W)$ est la droite $\bigwedge^d \Pi$. Par analogie avec le cas $d = 1$ (*cf.* ex. 1.2.2)), ce fibré est noté $\mathscr{O}_{G(d,W)}(-1)$.

d) Montrer que l'application $u\colon G(d,W) \to \mathbf{P}\bigwedge^d W$ qui envoie Π sur $\bigwedge^d \Pi$ est holomorphe injective et que $u^*\mathscr{O}_{\mathbf{P}\bigwedge^d W}(1) = \mathscr{O}_{G(d,W)}(1)$.

V.3. — Soit X une variété complexe compacte. On note comme dans l'exemple 3.2.5) $\mathscr{A}_X$ le faisceau des fonctions de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur X et $\mathscr{A}_X^*$ le sous-faisceau des fonctions qui ne s'annulent pas. On définit un fibré en droites différentiable sur X de la même façon que dans la définition 1.1 en remplaçant le mot ≪ holomorphe ≫ par le mot ≪ différentiable ≫.

a) Montrer que les classes d'isomorphisme de fibrés en droites différentiables sur X forment un groupe isomorphe à $H^1(X, \mathscr{A}_X^*)$.

b) Montrer que ce groupe est isomorphe à $H^2(X, \mathbf{Z})$ (*Indication :* cet isomorphisme est donné par la classe de Chern ; on rappelle (*cf.* note 7, p. 59) que $H^r(X, \mathscr{A}_X)$ est nul pour tout $r > 0$).

V.4. — a) Utiliser le recouvrement de $\mathbf{P}^n$ par les ouverts standard pour calculer les groupes de cohomologie $H^q(\mathbf{P}^n, \mathscr{O}_{\mathbf{P}^n})$.

b) Utiliser un recouvrement de $X = \mathbf{C}^2 \smallsetminus \{(0,0)\}$ par deux ouverts pour calculer les groupes de cohomologie $H^q(X, \mathscr{O}_X)$.

V.5. — Soit X une variété complexe compacte. Montrer à l'aide de la suite exponentielle que $H^1(X, \mathbf{Z})$ est un groupe abélien sans torsion (cela découle aussi du théorème des coefficients universels qui donne $H^1(X, \mathbf{Z}) \simeq H_1(X, \mathbf{Z})/\text{tors}$; *cf.* [**BT**, cor. 15.14.1, p. 194]).

CHAPITRE VI

VARIÉTÉS ABÉLIENNES

Nous avons vu dans les deux chapitres précédents qu'une condition nécessaire pour qu'un tore complexe X se plonge dans un espace projectif est qu'il existe sur X une forme de Kähler entière. Si X est le quotient d'un espace vectoriel complexe V par un réseau Γ, cela signifie qu'il existe sur V une forme hermitienne définie positive dont la partie imaginaire est une forme bilinéaire alternée entière sur Γ. Nous allons maintenant voir que cette condition est suffisante (théorème de Lefschetz 3.5). Nous discutons aussi diverses propriétés fines des fibrés en droites sur les tores complexes.

1. Conditions de Riemann

Nous commençons par dégager des conditions (dites de Riemann) sur un réseau dans un espace vectoriel complexe pour qu'il existe sur le tore associé une forme de Kähler entière.

Soient Γ un réseau et ω une forme bilinéaire alternée entière sur Γ. Les matrices de ω dans différentes bases de Γ ont même déterminant (les matrices de changement de base sont de déterminant ± 1) ; on l'appelle le déterminant de ω. Il est positif (comme le montre la proposition suivante), et on appelle *pfaffien* de ω, noté $\mathrm{pf}(\omega)$, sa racine carrée positive.

***Proposition 1.1.* —** *Soit ω une forme bilinéaire alternée non dégénérée entière sur un réseau Γ. Il existe des entiers strictement positifs $d_1, \dots, d_g$ vérifiant $d_1 \mid \cdots \mid d_g$ et une base $(\gamma_1, \dots, \gamma_{2g})$ de Γ dans laquelle la matrice de ω est*

$$\begin{pmatrix} 0 & \Delta \\ -\Delta & 0 \end{pmatrix},$$

où Δ est la matrice diagonale de coefficients diagonaux $d_1, \dots, d_g$. Ces entiers ne dépendent que de ω, dont le pfaffien est $d_1 \cdots d_g$.

Démonstration. — Soit d_Γ la plus petite valeur strictement positive de ω et soient γ_1 et γ_{g+1} des éléments de Γ tels que $\omega(\gamma_1, \gamma_{g+1}) = d_\Gamma$. Pour tout γ dans Γ, l'entier d_Γ divise $\omega(\gamma_1, \gamma)$

et $\omega(\gamma, \gamma_{g+1})$. Il s'ensuit que
$$\gamma - \frac{\omega(\gamma_1, \gamma)}{d_\Gamma}\, \gamma_{g+1} - \frac{\omega(\gamma, \gamma_{g+1})}{d_\Gamma}\, \gamma_1$$
est dans Γ. Comme il est orthogonal à $\mathbf{Z}\gamma_1 \oplus \mathbf{Z}\gamma_{g+1}$ pour ω, on a
$$\Gamma = \big(\mathbf{Z}\gamma_1 \oplus \mathbf{Z}\gamma_{g+1}\big) \oplus \big(\mathbf{Z}\gamma_1 \oplus \mathbf{Z}\gamma_{g+1}\big)^{\perp}.$$
Soient Γ' le réseau $\big(\mathbf{Z}\gamma_1 \oplus \mathbf{Z}\gamma_{g+1}\big)^{\perp}$ et x et y des éléments de Γ' tels que $\omega(x, y) = d_{\Gamma'}$. Écrivons la division euclidienne $d_{\Gamma'} = qd_\Gamma + r$, avec $0 \le r < d_\Gamma$. On a
$$\omega(x - q\gamma_1, y + \gamma_{g+1}) = r,$$
ce qui, par définition de d_Γ, entraîne que r est nul, donc que d_Γ divise $d_{\Gamma'}$. On conclut par récurrence sur le rang de Γ.

Pour montrer que les entiers $d_1, \ldots, d_g$ ne dépendent que de ω, il suffit de remarquer que le p.g.c.d. des $2r$-mineurs de la matrice de ω dans une base de Γ ne dépend pas du choix de la base et qu'il vaut $(d_1 \cdots d_r)^2$. □

1.2. — Soit ω une forme de Kähler entière sur un tore complexe $X = V/\Gamma$ et soit $(\gamma_1, \ldots, \gamma_{2g})$ la base de Γ fournie par la proposition 1.1. Soit W l'espace vectoriel réel engendré par $\gamma_1, \ldots, \gamma_g$. Si x est un élément non nul de W, on a $\omega(x, ix) > 0$, ce qui entraîne que ix n'est pas dans W puisque la restriction de ω à W est nulle. On a donc $W \cap iW = \{0\}$, d'où $V = W \oplus iW$, de sorte que $(\gamma_1, \ldots, \gamma_g)$ est une base de l'espace vectoriel complexe V.

***Théorème 1.3* (Conditions de Riemann). —** *Pour qu'il existe une forme de Kähler entière sur un tore complexe $X = V/\Gamma$, il faut et il suffit qu'il existe une base $\mathscr{B}$ de l'espace vectoriel complexe V, des entiers strictement positifs $d_1, \ldots, d_g$ vérifiant $d_1 \mid \cdots \mid d_g$ et une matrice complexe τ carrée d'ordre g symétrique de partie imaginaire définie positive tels que, dans la base $\mathscr{B}$, on ait*

$$\Gamma = \tau\mathbf{Z}^g \oplus \Delta\mathbf{Z}^g, \tag{16}$$

où Δ est la matrice diagonale de coefficients diagonaux $d_1, \ldots, d_g$.

Démonstration. — On garde les notations précédentes. On vient de voir que les $e_j = \gamma_j/d_j$, pour $j \in \{1, \ldots, g\}$, forment une base $\mathscr{B}$ de l'espace vectoriel complexe V. Notons $\begin{pmatrix}\Delta & \tau\end{pmatrix}$ la matrice des composantes de $\gamma_1, \ldots, \gamma_{2g}$ dans cette base et posons $R = \operatorname{Re}\tau$ et $S = \operatorname{Im}\tau$. La matrice de ω dans la base réelle $(e_1, \ldots, e_g, ie_1, \ldots, ie_g)$ de V est
$${}^t\!\begin{pmatrix}\Delta & R\\ 0 & S\end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix}0 & \Delta\\ -\Delta & 0\end{pmatrix} \begin{pmatrix}\Delta & R\\ 0 & S\end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix}0 & S^{-1}\\ -{}^tS^{-1} & {}^tS^{-1}(R - {}^tR)S^{-1}\end{pmatrix};$$
pour que ω soit de type $(1,1)$, il faut et il suffit que $\omega(ix, iy) = \omega(x, y)$ pour tout x et tout y, c'est-à-dire
$${}^tS^{-1}(R - {}^tR)S^{-1} = 0 \qquad \text{et} \qquad {}^tS^{-1} = S^{-1},$$

c'est-à-dire que R et S soient symétriques. La matrice dans la base $\mathscr{B}$ de la forme hermitienne associée à ω est alors S^{-1} ; elle est donc définie positive.

Réciproquement, si le réseau Γ a la forme (16) dans une base $\mathscr{B}$ du $\mathbf{C}$-espace vectoriel V, la forme hermitienne H sur V de matrice $(\operatorname{Im}\tau)^{-1}$ dans la base $\mathscr{B}$ est définie positive. La matrice de la forme $\mathbf{R}$-bilinéaire alternée $\omega = \operatorname{Im} H$ (réelle de type $(1,1)$) dans la base réelle $(e_1, \dots, e_g, ie_1, \dots, ie_g)$ de V est $\begin{pmatrix} 0 & S^{-1} \\ -{}^tS^{-1} & 0 \end{pmatrix}$ et, par un calcul inverse de celui effectué ci-dessus, sa matrice dans la base de Γ dont les composantes sont données dans la base $\mathscr{B}$ par les colonnes de la matrice $\begin{pmatrix} \Delta & \tau \end{pmatrix}$ est $\begin{pmatrix} 0 & \Delta \\ -\Delta & 0 \end{pmatrix}$. Elle est donc entière sur Γ.

Ceci conclut la démonstration du théorème. □

2. Théorème de Riemann–Roch

Reportons-nous à la construction de V.1.6, p. 52 : pour espérer obtenir un plongement d'un tore complexe dans un espace projectif, il faut commencer par trouver des fibrés en droites avec beaucoup de sections. Nous commencerons donc par calculer la dimension de l'espace vectoriel des sections d'un fibré en droites dont la première classe de Chern est définie positive, généralisant ainsi en toute dimension le théorème II.3.3, p. 18, relatif aux courbes elliptiques.

On reprend les notations de 1.2 ; on a en particulier $V = W \oplus iW$. La forme hermitienne H associée à ω est réelle sur $W \times W$ (puisque $\omega|_{W\times W} = 0$) et s'étend en une forme $\mathbf{C}$-bilinéaire symétrique B sur $V \times V$.

Lemme 2.1. — *On a*

$$(H-B)(x,y) = \begin{cases} 0 & \textit{si } x \in W, \\ 2i\omega(x,y) & \textit{si } y \in W. \end{cases}$$

Démonstration. — La première assertion résulte du fait que $H - B$ est nulle sur $W \times W$ et $\mathbf{C}$-linéaire en la seconde variable. Si y est dans W, on a

$$(H-B)(x,y) = (\overline{H} - B)(y,x) = (\overline{H} - H)(y,x) = -2i\omega(y,x) = 2i\omega(x,y)$$

(où la première assertion est utilisée dans la deuxième égalité), ce qui prouve la seconde assertion. □

Théorème 2.2 **(Riemann–Roch).** — *Soient X un tore complexe et L un fibré en droites sur X dont la première classe de Chern est définie positive. On a*

$$\dim H^0(X,L) = \operatorname{pf}\bigl(c_1(L)\bigr) > 0.$$

Démonstration. — Il suffit de montrer le théorème lorsque $L = L(H,\alpha)$ (*cf.* th. 5.10, p. 62), c'est-à-dire de calculer la dimension de l'espace vectoriel des fonctions holomorphes ϑ sur

V vérifiant

$$\vartheta(z+\gamma) = \alpha(\gamma) e^{\pi H(\gamma,z)+\frac{\pi}{2}H(\gamma,\gamma)}\vartheta(z) \tag{17}$$

pour tout z dans V et tout γ dans Γ, où H est la forme hermitienne sur V associée à la forme alternée $\omega = c_1(L)$ et où α satisfait à $\alpha(\gamma_1+\gamma_2) = \alpha(\gamma_1)\alpha(\gamma_2)(-1)^{\omega(\gamma_1,\gamma_2)}$. Comme les relations (7) sont réalisées, il suffit de vérifier la relation (17) lorsque γ décrit l'ensemble $\{\gamma_1,\ldots,\gamma_{2g}\}$ des éléments d'une base de Γ. Nous prendrons cette base de façon à ce que $\{\gamma_{g+1},\ldots,\gamma_{2g},\gamma_1,\ldots,\gamma_g\}$ corresponde à la décomposition en somme directe (16).

Commençons par normaliser ϑ différemment. La restriction de l'application $\alpha\colon \Gamma \to U(1)$ au sous-groupe Γ' engendré par $\gamma_1,\ldots,\gamma_g$ est un homomorphisme, de sorte qu'il existe une forme $\mathbf{C}$-linéaire ℓ sur V telle que $\alpha(\gamma) = e^{2i\pi\ell(\gamma)}$ pour tout γ dans Γ'. Posons

$$\widetilde{\vartheta}(z) = e^{-\frac{\pi}{2}B(z,z)-2i\pi\ell(z)}\vartheta(z).$$

La fonction $\widetilde{\vartheta}$ ainsi définie est une fonction thêta de même type que ϑ. Elle vérifie

$$\begin{aligned}\widetilde{\vartheta}(z+\gamma) &= e^{-\pi B(\gamma,z)-\frac{\pi}{2}B(\gamma,\gamma)-2i\pi\ell(\gamma)}\alpha(\gamma)e^{\pi H(\gamma,z)+\frac{\pi}{2}H(\gamma,\gamma)}\widetilde{\vartheta}(z)\\ &= \alpha(\gamma)e^{-2i\pi\ell(\gamma)}e^{\pi(H-B)(\gamma,z)+\frac{\pi}{2}(H-B)(\gamma,\gamma)}\widetilde{\vartheta}(z).\end{aligned} \tag{18}$$

Elle est en particulier Γ'-périodique, donc admet un développement en série de Fourier

$$\widetilde{\vartheta}(z) = \sum_{m\in\mathbf{Z}^g} c(m)e^{2i\pi\sum_k m_k z_k},$$

où $z = \sum_{k=1}^g z_k\gamma_k$, avec $z_1,\ldots,z_g \in \mathbf{C}$. Elle vérifie de plus

$$\widetilde{\vartheta}(z+\gamma_{g+j}) = b_j e^{\pi(H-B)(\gamma_{g+j},z)}\widetilde{\vartheta}(z),$$

où $b_j = \alpha(\gamma_{g+j})e^{-2i\pi\ell(\gamma_{g+j})}e^{\frac{\pi}{2}(H-B)(\gamma_{g+j},\gamma_{g+j})}$ est une constante non nulle. Le lemme 2.1 entraîne

$$(H-B)(\gamma_{g+j},z) = \sum_k z_k(H-B)(\gamma_{g+j},\gamma_k) = -2id_jz_j.$$

On a $\gamma_{g+j} = \sum_{k=1}^g \dfrac{\gamma_k}{d_k}\tau_{kj}$, donc $z+\gamma_{g+j} = \sum_{k=1}^g\bigl(\dfrac{\tau_{kj}}{d_k}+z_k\bigr)\gamma_k$; on en déduit

$$\sum_{m\in\mathbf{Z}^g} c(m)e^{2i\pi\left(\sum_k m_k\left(\frac{\tau_{kj}}{d_k}+z_k\right)\right)} = b_j\sum_{m\in\mathbf{Z}^g}c(m)e^{2i\pi\left(\sum_k m_kz_k-d_jz_j\right)},$$

pour tout $z_1,\ldots,z_g\in\mathbf{C}$, c'est-à-dire, par unicité du développement en série de Fourier,

$$c(m)e^{2i\pi\sum_k\frac{m_k}{d_k}\tau_{kj}} = b_jc(m+d_j\varepsilon_j) \tag{19}$$

pour tout $m\in\mathbf{Z}^g$ et tout $j\in\{1,\ldots,g\}$, où $\varepsilon_j\in\mathbf{Z}^g$ est le vecteur dont toutes les coordonnées sont nulles, sauf la j-ième qui vaut 1. Cela montre tout d'abord que les coefficients $c(m)$ (c'est-à-dire la fonction ϑ), sont déterminés par ceux pour lesquels $0\le m_j<d_j$ pour tout j. En particulier,

$$\dim H^0(X,L) \le d_1\cdots d_g = \mathrm{pf}(\omega).$$

Inversement, étant donnés des nombres complexes quelconques $c(m)$ pour $0 \leq m_j < d_j$ pour tout j, définissons des coefficients $c(m)$ pour tout m par la relation (19). On vérifie par récurrence que

$$|c(m)| \leq \left|e^{2i\pi \sum_{j,k} \frac{m_j}{d_j}\frac{m_k}{d_k}\tau_{jk} + \text{ terme de degré} \leq 1 \text{ en } m}\right|;$$

le série de Fourier correspondante converge, puisque $\operatorname{Im}\tau$ est définie positive (th. 1.3). On obtient bien une fonction thêta, c'est-à-dire une section de L. □

Remarque 2.3. **—** Les fonctions thêta qui satisfont à la relation (18) seront dites fonctions thêta « classiques » associées à $L(H,\alpha)$; il s'agit simplement d'une normalisation différente de celle que nous avons utilisée jusqu'ici, qui se trouve être celle des fonctions thêta de Riemann définies dans l'exemple IV.1.4, p. 39. Toute fonction thêta est équivalente à une unique fonction thêta classique.

3. Plongement dans un espace projectif

3.1. — Soit $X = V/\Gamma$ un tore complexe de dimension g ; on cherche à construire un « plongement holomorphe » u de X dans un espace projectif $\mathbf{P}^n$, c'est-à-dire une application holomorphe qui induit un isomorphisme de variétés complexes de X sur $u(X)$. Rappelons (cor. 3.4, p. 45) que u s'inscrit dans un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\widetilde{u}} & \mathbf{C}^{n+1} \smallsetminus \{0\} \\ \downarrow & & \downarrow p \\ V/\Gamma & \xrightarrow{u} & \mathbf{P}^n, \end{array}$$

où $\widetilde{u}$ est holomorphe et s'écrit $\widetilde{u} = (\vartheta_0, \ldots, \vartheta_n)$. Pour que u soit un plongement, il faut et il suffit, par I.3.2, p. 8, que u soit injectif et que la matrice

$$\begin{pmatrix} \vartheta_0(z) & \dfrac{\partial\vartheta_0}{\partial z_1}(z) & \cdots & \dfrac{\partial\vartheta_0}{\partial z_g}(z) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vartheta_n(z) & \dfrac{\partial\vartheta_n}{\partial z_1}(z) & \cdots & \dfrac{\partial\vartheta_n}{\partial z_g}(z) \end{pmatrix} \tag{20}$$

soit de rang $g+1$ pour tout z dans V.

On rappelle qu'on note, dans tout groupe abélien, τ_a la translation $x \mapsto x - a$.

Lemme 3.2. **—** *Soient X un tore complexe, $L(H,\alpha)$ un fibré en droites sur X, et a un point de X. On a*

$$\tau_a^* L(H,\alpha) \simeq L(H, \alpha e^{2i\pi \operatorname{Im} H(\cdot,a)}).$$

Démonstration. — Rappelons (§ V.2, p. 53) que le fibré en droites $L(H,\alpha)$ est défini comme le quotient de $V \times \mathbf{C}$ par l'action

$$\gamma \cdot (z,t) = (z+\gamma, \alpha(\gamma)e^{\pi H(\gamma,z) + \frac{\pi}{2}H(\gamma,\gamma)}\, t)$$

du groupe Γ. Le fibré en droites $\tau_a^* L(H,\alpha)$ est donc le quotient de $V \times \mathbf{C}$ par l'action

$$\gamma \cdot (z,t) = (z+\gamma, \alpha(\gamma) e^{\pi H(\gamma, z+a) + \frac{\pi}{2} H(\gamma,\gamma)}\, t)$$

de Γ. Soit f une fonction entière sur V qui ne s'annule pas ; si l'on change les multiplicateurs $e_\gamma(z) = \alpha(\gamma) e^{\pi H(\gamma,z+a)+\frac{\pi}{2}H(\gamma,\gamma)}$ qui définissent $\tau_a^* L(H,\alpha)$ en $e_\gamma(z) f(z+\gamma)/f(z)$, on obtient un fibré en droites isomorphe. Prenons $f(z) = e^{-\pi H(a,z)}$; les multiplicateurs deviennent

$$\alpha(\gamma) e^{\pi H(\gamma,z+a) - \pi H(a,\gamma) + \frac{\pi}{2} H(\gamma,\gamma)} = \alpha(\gamma) e^{2i\pi \operatorname{Im} H(\gamma,a)} e^{\pi H(\gamma,z) + \frac{\pi}{2} H(\gamma,\gamma)},$$

d'où le lemme. □

Théorème du carré 3.3. — [1] *Soient X un tore complexe et L un fibré en droites sur X. Pour tous points a et b de X, on a*

$$\tau_{a+b}^* L \otimes L \simeq \tau_a^* L \otimes \tau_b^* L.$$

Démonstration. — Grâce au théorème de Appell-Humbert (th. V.5.10, p. 62), on peut supposer $L = L(H,\alpha)$. Le théorème découle alors du lemme et de (12). □

3.4. — On utilisera souvent le théorème du carré sous la forme suivante : soient ϑ une fonction thêta normalisée associée à un fibré en droites L, et $a_1, \dots, a_r$ des points de V de somme nulle. La fonction thêta

$$z \mapsto \vartheta(z+a_1) \cdots \vartheta(z+a_r)$$

est alors une fonction thêta normalisée associée au fibré en droites $L^{\otimes r}$ (qu'il est d'usage de noter simplement L^r).

***Théorème 3.5* (Lefschetz).** — *Soient X un tore complexe et L un fibré en droites sur X.*

a) Si L a une section non identiquement nulle, l'application ψ_{L^r} (cf. V.1.6, p. 52) définit une application holomorphe de X dans un espace projectif pour tout $r \geq 2$.

b) Si la première classe de Chern de L est définie positive, l'application ψ_{L^r} définit un plongement de X dans un espace projectif pour tout $r \geq 3$.

Démonstration. — L'ingrédient essentiel de la démonstration est le théorème du carré. Soit ϑ une fonction thêta normalisée correspondant à une section non identiquement nulle de L. Si $r \geq 2$, il existe pour tout point z_0 de V un point a dans V tel que

$$\vartheta(z_0 - a)\vartheta(z_0 + (r-1)a)$$

ne soit pas nul. Par 3.4, la fonction

$$z \mapsto \vartheta(z-a)^{r-1}\vartheta(z+(r-1)a)$$

correspond à une section de L^r qui ne s'annule pas en z_0 ; ceci prouve a) (*cf.* V.1.6, p. 52).

1. Si ce résultat trivial mérite ce nom ronflant, c'est qu'il est fondamental (et difficile) dans la théorie *algébrique* des variétés abéliennes (*cf.* par exemple [**M1**, cor. 4, p. 59]).

Supposons $c_1(L)$ définie positive. Le théorème de Riemann–Roch 2.2 entraîne que L a une section non identiquement nulle ; on note encore ϑ la fonction thêta normalisée correspondante. Soit $(\vartheta_0, \ldots, \vartheta_n)$ une base de $H^0(X, L^r)$ et soit z_0 un point de V. Supposons qu'il existe (*cf.* 3.1) des complexes $\lambda_0, \ldots, \lambda_g$ tels que

$$\lambda_0 \vartheta_j(z_0) + \sum_{k=1}^{g} \lambda_k \frac{\partial \vartheta_j}{\partial z_k}(z_0) = 0$$

pour tout $j \in \{0, \ldots, n\}$. Par le théorème du carré, la fonction

$$\vartheta_{ab}(z) = \vartheta(z-a)^{r-2}\vartheta(z-b)\vartheta(z+(r-2)a+b)$$

est une fonction thêta normalisée qui correspond à une section de L^r, pour tout a et tout b dans V. C'est donc une combinaison linéaire de $\vartheta_0, \ldots, \vartheta_n$, de sorte que

$$\lambda_0 \vartheta_{ab}(z_0) + \sum_{k=1}^{g} \lambda_k \frac{\partial \vartheta_{ab}}{\partial z_k}(z_0) = 0$$

pour tout a et tout b dans V. La relation

$$\psi(z) = \sum_{k=1}^{g} \lambda_k \frac{\partial \log \vartheta}{\partial z_k}(z)$$

définit une fonction méromorphe ψ sur V qui vérifie

$$(r-2)\psi(z_0-a) + \psi(z_0-b) + \psi(z_0+(r-2)a+b) = \lambda_0 \tag{21}$$

pour tout a et tout b dans V. Pour tout $a_0 \in V$, il existe b tel que $\vartheta(z_0-b)\vartheta(z_0+(r-2)a_0+b)$ ne soit pas nul, de sorte que les fonctions $a \mapsto \psi(z_0-b)$ et $a \mapsto \psi(z_0+(r-2)a+b)$ sont holomorphes au voisinage de a_0. Si $r \geq 3$, la relation (21) entraîne que ψ est holomorphe au voisinage de $z_0 - a_0$, donc holomorphe sur V, puisque a_0 est arbitraire. Or elle vérifie l'équation fonctionnelle

$$\psi(z+\gamma) = \pi H(\gamma, \lambda) + \psi(z), \tag{22}$$

où H est la forme hermitienne associée à $c_1(L)$ et $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_g) \in V$. En particulier, les dérivées partielles de ψ sont Γ-périodiques, donc constantes, de sorte que ψ est $\mathbf{C}$-affine. La relation (22) entraîne $\psi(\gamma) - \psi(0) = \pi H(\gamma, \lambda)$ pour tout γ dans Γ. Les deux membres de cette égalité étant $\mathbf{R}$-linéaires, on en déduit $\psi(z) - \psi(0) = \pi H(z, \lambda)$ pour tout z dans V. Mais le membre de gauche est $\mathbf{C}$-linéaire en z, tandis que le membre de droite est $\mathbf{C}$-antilinéaire. On en déduit $H(z, \lambda) = 0$ pour tout z dans V. Comme $c_1(L)$, donc H, est supposée non dégénérée, on a $\lambda = 0$, donc $\lambda_j = 0$ pour tout j. La matrice (20) est donc de rang $g+1$ en tout point, ce qui montre b). □

3.6. — Soit L un fibré en droites sur une variété complexe compacte X ; on dit que L est *très ample* si le morphisme ψ_L est un plongement ; L est *ample* s'il existe un entier $r > 0$ tel que L^r soit très ample. Avec cette terminologie, on peut traduire le théorème de Lefschetz en disant qu'un fibré en droites sur un tore complexe dont la première classe de Chern est définie positive, est ample (la réciproque étant vraie par le théorème III.5.2, p. 35, ou le corollaire IV.3.5, p. 45). C'est un cas particulier d'un théorème célèbre de Kodaira, qui dit que cet énoncé reste vrai sur toute variété complexe compacte ([**GH**, p. 181] ou [**GR**, p. 285]).

On dira aussi qu'un fibré en droites L est *positif* si $c_1(L)$ est positive. Le produit tensoriel de deux fibrés en droites positifs est positif ; le produit tensoriel d'un fibré en droites ample et d'un fibré en droites positif est ample.

4. Dualité des tores complexes

Soit X un tore complexe. On a défini (déf. V.5.3, p. 58) le groupe $\mathrm{Pic}^0(X)$ des fibrés en droites sur X de première classe de Chern nulle. C'est un tore complexe (prop. V.5.9, p. 62) de même dimension que X ; on le notera désormais $\hat{X}$.

On dit qu'un fibré en droites L sur un tore complexe est non dégénéré si la forme alternée $c_1(L)$ l'est.

4.1. — On rappelle (*cf.* I.2.4, p. 8) qu'une isogénie est un morphisme surjectif à noyau fini entre tores complexes. Son *degré* est le cardinal de son noyau. La composée de deux isogénies est une isogénie dont le degré est le produit des degrés. On dit que des tores X et Y sont *isogènes* s'il existe une isogénie $u\colon X \to Y$. Le noyau de u est un groupe abélien fini, de sorte qu'il existe un entier $n > 0$ tel que $n(\operatorname{Ker} u)$ soit nul. Le morphisme $\mathbf{n}\colon Y \to Y$ de multiplication par n se factorise alors en $\mathbf{n}\colon Y \xrightarrow{v} X \xrightarrow{u} Y$ et v est une isogénie. La relation « être isogène à » est donc une relation d'équivalence.

Le résultat suivant généralise le théorème II.3.1, p. 17, en toute dimension (le morphisme φ de ce théorème est le morphisme φ_L associé à n'importe quel fibré en droites de degré 1 sur la courbe elliptique).

Théorème 4.2. **—** *Soient X un tore complexe et L un fibré en droites sur X. Le morphisme*

$$\begin{array}{rccc} \varphi_L\colon & X & \longrightarrow & \hat{X} \\ & x & \longmapsto & \tau_x^* L \otimes L^{-1} \end{array}$$

est un morphisme de groupes qui ne dépend que de $c_1(L)$. Son noyau, noté $K(L)$, est une réunion disjointe de sous-tores de X de même dimension que le noyau de $c_1(L)$. Si L est non dégénéré, φ_L est une isogénie de degré $\mathrm{pf}\big(c_1(L)\big)^2$.

Démonstration. — Posons $\omega = c_1(L)$ et notons $\pi\colon V \to X$ le revêtement universel de X. Si x est un point de X, nous noterons pour simplifier $\widetilde{x}$ n'importe quel point de $\pi^{-1}(x)$. Par le lemme 3.2, $\varphi_L(x)$ est la classe du fibré en droites $L(0, e^{2i\pi\omega(\cdot,\widetilde{x})})$. Le morphisme φ_L est donc à valeurs dans $\hat{X}$ et ne dépend que de ω ; c'est un morphisme de groupes par le théorème 3.3. On a de plus

$$K(L) = \{x \in X \mid \omega(\gamma, \widetilde{x}) \in \mathbf{Z} \text{ pour tout } \gamma \in \Gamma\},$$

de sorte que $K(L)$ est réunion finie de translatés de l'image du noyau de ω dans X (*cf.* th. I.2.3, p. 7).

Lorsque ω est non dégénérée, il existe une base de Γ dans laquelle sa matrice est comme dans la proposition 1.1. Le groupe $K(L)$ est alors l'image dans V/Γ du sous-groupe de V engendré par $\gamma_1/d_1, \dots, \gamma_g/d_g, \gamma_{g+1}/d_1, \dots, \gamma_{2g}/d_g$; il est isomorphe à

$$(\mathbf{Z}/d_1\mathbf{Z} \times \cdots \times \mathbf{Z}/d_g\mathbf{Z})^2,$$

donc de cardinal $(d_1 \cdots d_g)^2 = \mathrm{pf}(\omega)^2$. $\square$

4.3. — On a $\varphi_{L\otimes M} = \varphi_L + \varphi_M$. Le morphisme φ_L est nul si et seulement si $[L]$ est dans $\hat{X}$. Lorsque L est non dégénéré, le théorème entraîne que tout fibré en droites de même classe de Chern que L est un translaté de L.

On rappelle (prop. V.5.9, p. 62) que le tore dual de V/Γ s'interprète aussi comme le groupe des caractères unitaires de Γ, ou encore comme $\overline{V}^*/\hat{\Gamma}$, où

$$\hat{\Gamma} = \{\ell \in \overline{V}^* \mid \mathrm{Im}\,\ell(\Gamma) \subset \mathbf{Z}\}.$$

L'application φ_L est induite par l'application $\mathbf{C}$-linéaire $\widetilde{\varphi}_L \colon V \to \overline{V}^*$ définie par $x \mapsto H(\cdot, x)$ (cela découle du fait que le revêtement universel $\overline{V}^* \to \mathrm{Pic}^0(X)$ est défini par $\ell \mapsto [L(0, e^{2i\pi\,\mathrm{Im}\,\ell(\cdot)})]$; *cf.* § V.5, p. 57).

4.4. — Gardons les notations de la démonstration du théorème. En associant à un élément $(\widetilde{x}, \widetilde{y})$ de $V \times V$ le nombre complexe $e^{2i\pi\omega(\widetilde{x},\widetilde{y})}$, on définit une forme bilinéaire alternée (multiplicative)

$$e^L \colon K(L) \times K(L) \longrightarrow \mathbf{C}^*.$$

***Lemme 4.5.* —** *Pour que L soit non dégénéré, il faut et il suffit que e^L le soit.*

Démonstration. — Supposons L non dégénéré ; toujours avec les notations de la démonstration du théorème, notons K_1 le sous-groupe de $K(L)$ engendré par les images de $\gamma_1/d_1, \dots,$ γ_g/d_g, et K_2 le sous-groupe engendré par les images de $\gamma_{g+1}/d_1, \dots, \gamma_{2g}/d_g$. On a $K = K_1 \oplus K_2$, les sous-groupes K_1 et K_2 sont totalement isotropes pour la forme e^L, et celle-ci induit un isomorphisme $K_2 \simeq \widehat{K_1}$. Elle est donc non dégénérée.

Si L est dégénéré, le noyau de $\widetilde{\varphi}_L$ n'est pas réduit à zéro, et son image $K(L)^0$ dans X est contenue dans le noyau de e^L. $\square$

Remarquons que l'application $x \mapsto (\ell \mapsto \overline{\ell(x)})$ permet d'identifier V avec l'antidual de $\overline{V}^*$, donc aussi X avec $\hat{\hat{X}}$, ce que nous ferons toujours par la suite.

Soient X et Y des tores complexes et $u \colon X \to Y$ une application holomorphe qui envoie l'origine sur l'origine. On rappelle (th. I.2.3, p. 7) que u est un morphisme de groupes. On note $\hat{u} \colon \hat{Y} \to \hat{X}$ l'application holomorphe définie par $[L] \mapsto [u^*L]$.

***Proposition 4.6.* —** *Soient X et Y des tores complexes et $u \colon X \to Y$ une application holomorphe vérifiant $u(0) = 0$.*

a) L'application $\hat{u}$ est un morphisme de groupes holomorphe. On a $\hat{\hat{u}} = u$ et

$$\dim(\mathrm{Ker}\,\hat{u})^0 = \mathrm{codim}(\mathrm{Im}\,u) \qquad \dim(\mathrm{Im}\,\hat{u}) = \mathrm{codim}(\mathrm{Ker}\,u)^0.$$

b) Les noyaux de u et $\hat{u}$ ont même nombre de composantes connexes.

c) Pour que u soit une isogénie, il faut et il suffit que $\hat{u}$ en soit une ; u et $\hat{u}$ ont alors même degré.

Démonstration. — Si u est induite par l'application $\mathbf{C}$-linéaire $\widetilde{u}\colon V \to W$, l'application $\hat{u}$ est induite par sa transposée ${}^t\widetilde{u}\colon \overline{W}^* \to \overline{V}^*$, définie par $\ell \mapsto \ell \circ u$. Le point a) en résulte. Supposons que u soit une isogénie et identifions V à W à l'aide de l'isomorphisme $\widetilde{u}$. Si $X = V/\Gamma_X$ et $Y = V/\Gamma_Y$, on a $\Gamma_X \subset \Gamma_Y$, et $\hat{u}$ s'interprète comme la restriction $\mathrm{Hom}(\Gamma_Y, U(1)) \to \mathrm{Hom}(\Gamma_X, U(1))$. On a alors

$$\operatorname{Ker} u \simeq \Gamma_Y/\Gamma_X \qquad \text{et} \qquad \operatorname{Ker} \hat{u} \simeq \mathrm{Hom}(\Gamma_Y/\Gamma_X, U(1)) \simeq \mathrm{Hom}(\operatorname{Ker} u, U(1)),$$

ce qui montre c).

Revenons au cas général et notons $\nu(u)$ le nombre de composantes connexes du noyau de u. Posons $\overline{X} = X/\operatorname{Ker}(u)^0$; si on factorise u en $X \to \overline{X} \xrightarrow{\overline{u}} u(X) \hookrightarrow Y$, où $\overline{u}$ est une isogénie, l'application $\hat{u}$ se factorise en

$$\hat{Y} \twoheadrightarrow \widehat{u(X)} \xrightarrow{\hat{\overline{u}}} \hat{\overline{X}} \longrightarrow \hat{X},$$

ce qui grâce à c) montre $\nu(u) \le \nu(\hat{u})$, donc $\nu(u) = \nu(\hat{u})$ puisque $\hat{\hat{u}} = u$. □

Corollaire 4.7. — *Soient $u\colon X \to Y$ une isogénie entre tores complexes et L un fibré en droites ample sur Y. On a*

$$\dim H^0(X, u^*L) = \deg(u)\ \dim H^0(Y, L).$$

Démonstration. — Les théorèmes 4.2 et 2.2 entraînent que le degré de φ_L est le carré de la dimension de $H^0(Y, L)$. Le fibré u^*L est ample puisque sa première classe de Chern est la même que celle de L (si on identifie les revêtements universels de X et de Y). On en déduit (exerc. VI.3 et prop. 4.6.b))

$$\begin{aligned}\big(\dim H^0(X, u^*L)\big)^2 &= \deg(\varphi_{u^*L}) = \deg(\hat{u} \circ \varphi_L \circ u) = \deg(\hat{u}) \deg(\varphi_L) \deg(u) \\ &= \big(\deg(u)\big)^2 \big(\dim H^0(Y, L)\big)^2,\end{aligned}$$

ce qui prouve le corollaire. □

5. Sections des fibrés en droites

Le théorème de Riemann–Roch nous permet de calculer la dimension de l'espace des sections des fibrés en droites amples (*cf.* 3.6). Nous allons maintenant nous intéresser au cas général ; on rappelle (prop. IV.1.6, p. 40) qu'une condition nécessaire pour qu'un fibré en droites L ait une section non nulle est qu'il soit positif (mais cette condition n'est pas suffisante).

***Théorème 5.1.* —** *Soient X un tore complexe et L un fibré en droites sur X. Notons $\overline{X}_L$ le tore complexe $X/K(L)^0$ (cf. th. 4.2) et p la surjection canonique $X \to \overline{X}_L$. Ou bien $H^0(X, L) = 0$, ou bien il existe un fibré en droites* ample *$\overline{L}$ sur $\overline{X}_L$ tel que p induise des isomorphismes*

$$p^*\overline{L} \simeq L \qquad \textit{et} \qquad H^0(\overline{X}_L, \overline{L}) \simeq H^0(X, L).$$

Démonstration. — Ecrivons $X = V/\Gamma$ et notons N le noyau de $c_1(L)$; on a $K(L)^0 = N/\Gamma \cap N$ (*loc.cit.*). On peut supposer que L a une section non nulle. Il lui correspond (V.2.1, p. 53) une fonction thêta normalisée de forme de Riemann $c_1(L)$, qui par la proposition IV.1.8, p. 40, provient d'une fonction thêta non dégénérée sur $\overline{X}_L$ dont on note $\overline{D}$ le diviseur. Le fibré en droites $\overline{L} = \mathscr{O}_{\overline{X}_L}(\overline{D})$ est ample (il a une section non nulle et sa première classe de Chern est non dégénérée) et vérifie $L = p^*\overline{L}$. Comme l'application $p^* \colon \operatorname{Pic}(\overline{X}_L) \to \operatorname{Pic}(X)$ est injective (utiliser cor. 5.8, p. 61 et prop. 4.6.b)), $\overline{L}$ ne dépend pas du choix de la section de L. L'application injective $H^0(\overline{X}_L, \overline{L}) \to H^0(X, L)$ est donc surjective. □

5.2. — Soient L et M des fibrés en droites sur un tore complexe X de dimension g. L'expression $\operatorname{pf}\bigl(tc_1(L)+c_1(M)\bigr)$ est un polynôme de degré au plus g en t que l'on note $P_{L,M}(t)$.

***Lemme 5.3.* —** *Si L est positif et M ample, le polynôme $P_{L,M}$ est de degré $\dim \overline{X}_L$, à coefficients positifs, à racines réelles strictement négatives et de coefficient directeur plus grand que* $\dim H^0(X, L)$.

Démonstration. — Posons $\omega = c_1(M)$. Comme la forme hermitienne H associée à ω est définie positive, il existe une base complexe $\mathscr{B}$ de V dans laquelle cette matrice est l'identité, tandis que la matrice D de la forme hermitienne (positive) associée à $c_1(L)$ est diagonale, de coefficients diagonaux $a_1, \dots, a_g$ positifs dont exactement $\dim K(L)^0$ sont nuls. Puisque $\omega(x, iy) = \operatorname{Re} H(x, y)$, la matrice de ω dans la base réelle $(\mathscr{B}, i\mathscr{B})$ de V est $\begin{pmatrix} 0 & I_g \\ -I_g & 0 \end{pmatrix}$, tandis que celle de $c_1(L)$ est $\begin{pmatrix} 0 & D \\ -D & 0 \end{pmatrix}$. Si P est la matrice de passage d'une base de Γ à la base $(\mathscr{B}, i\mathscr{B})$, on a

$$P_{L,M}(t) = \operatorname{pf}(tc_1(L) + c_1(M)) = |\operatorname{dét}(P)| \prod_{a_j \neq 0} (ta_j + 1).$$

Il reste à montrer la minoration du coefficient directeur de $P_{L,M}$. On peut bien sûr supposer que L a une section non nulle. Soit n un entier positif ; on a

$$\begin{array}{rcll} P_{L,M}(n) & = & \dim H^0(X, L^{\otimes n} \otimes M) & \text{par le théorème de Riemann–Roch et 3.6} \\ & \geq & \dim H^0(X, L^{\otimes n}) & \text{car } M \text{ a une section non nulle (th. 2.2)} \\ & = & \dim H^0(\overline{X}_L, \overline{L}^{\otimes n}) & \text{par exerc. VI.4.a) et th. 5.1} \\ & = & \mathrm{pf}(nc_1(\overline{L})) & \text{par le théorème de Riemann–Roch} \\ & = & n^{\dim \overline{X}_L} \, \mathrm{pf}(c_1(\overline{L})) & \\ & = & n^{\dim \overline{X}_L} \dim H^0(\overline{X}_L, \overline{L}) & \\ & = & n^{\dim \overline{X}_L} \dim H^0(X, L), & \end{array}$$

ce qui termine la démonstration du lemme. □

Proposition 5.4. — *Soient X un tore complexe et L et M des fibrés en droites positifs tels que $L \otimes M$ soit ample et* $\dim K(L)^0 + \dim K(M)^0 < \dim X$. *On a*

$$\dim H^0(X, L \otimes M) \geq \dim H^0(X, L) + \dim H^0(X, M).$$

Les hypothèses de la proposition sont vérifiées par exemple si L et M sont amples et X *non nul*.

Démonstration. — L'expression $Q(a, b) = \mathrm{pf}\big(ac_1(L) + bc_1(M)\big)$ est un polynôme homogène de degré $g = \dim X$. Le lemme 5.3 montre que pour tout entier b strictement positif,

$$P_{L^b, L \otimes M^b}(a) = Q(ab + 1, b) = b^g Q(a + \tfrac{1}{b}, 1)$$

est un polynôme en a à coefficients positifs ; il en est donc de même de $Q(a, 1)$. Son degré et son coefficient directeur sont les mêmes que ceux de $Q(a + 1, 1) = P_{L, L \otimes M}(a)$, donnés par le lemme. On en déduit

$$Q(a, b) = \lambda a^{g - \dim K(L)^0} b^{\dim K(L)^0} + \cdots + \mu a^{\dim K(M)^0} b^{g - \dim K(M)^0},$$

avec $\lambda \geq \dim H^0(X, L)$. On obtient aussi $\mu \geq \dim H^0(X, M)$ en échangeant les rôles de L et de M. Si $g - \dim K(L)^0 > \dim K(M)^0$, on a $Q(1, 1) \geq \lambda + \mu$, d'où la proposition. □

6. Variétés abéliennes

Définition 6.1. — On appelle *polarisation* sur un tore complexe X une forme de Kähler entière sur X. On appelle *variété abélienne* un tore complexe sur lequel existe une polarisation et *variété abélienne polarisée* un couple (X, ω), où X est une variété abélienne et ω une polarisation sur X.

On peut énoncer les remarques de 3.6 ainsi : *pour qu'un tore complexe soit une variété abélienne, il faut et il suffit qu'il admette un plongement holomorphe dans un espace projectif.*

Un théorème de Chow ([**GH**, p. 167]) dit que toute sous-variété complexe compacte d'un espace projectif est une sous-variété algébrique projective, c'est-à-dire qu'elle est définie par des équations polynomiales (homogènes). Une variété abélienne est donc un *groupe* *algébrique* (le même théorème de Chow entraîne que les opérations de groupe sont des ≪ applications régulières ≫) qui est une variété projective.

Une polarisation ω sur un tore complexe $X = V/\Gamma$ est une forme $\mathbf{R}$-bilinéaire alternée sur V entière sur Γ qui vérifie $\omega(ix, iy) = \omega(x, y)$ et $\omega(x, ix) > 0$ pour tout x non nul et tout y dans V (*cf.* III.5.3, p. 35). On peut aussi la voir comme la première classe de Chern d'un fibré en droites ample L sur X, ou encore, par 4.3, comme la donnée d'un fibré en droites ample sur X défini ≪ à translation près ≫. Le morphisme $\varphi_L \colon X \to \hat{X}$, son noyau $K(L)$ et la forme e^L ne dépendent que de ω (*cf.* 4.3 et 4.4) ; on les notera aussi φ_ω, $K(\omega)$ et e^ω. De la même façon, la racine carrée du degré de φ_L ne dépend que de ω (c'est son pfaffien par th. 4.2) ; on la note $\deg(\omega)$.

Tout multiple entier strictement positif d'une polarisation est encore une polarisation. Sur une variété abélienne ≪ très générale ≫ (au sens de l'exercice VII.1, p. 102), toutes les polarisations sont proportionnelles (*cf.* exerc. VII.1, p. 102, et exerc. VI.15) ; en revanche, il peut parfaitement exister sur une variété abélienne donnée des polarisations non proportionnelles (exerc. VI.11).

Soit X une variété abélienne ; tout tore complexe isogène à X est une variété abélienne. En particulier, le tore dual $\hat{X}$ est une variété abélienne appelée variété abélienne duale de X. Tout sous-tore de X est une variété abélienne (la restriction au sous-tore d'un fibré en droites ample sur X est ample) ; tout tore quotient de X est une variété abélienne (il est isogène à un sous-tore de $\hat{X}$).

Soient (X, ω_X) et (Y, ω_Y) des variétés abéliennes polarisées ; les classes de Kähler entières ω_X et ω_Y permettent de définir une classe de Kähler entière sur $X \times Y$ que l'on note $\omega_X \times \omega_Y$ et que l'on appelle *polarisation produit*. Notons $pr_X \colon X \times Y \to X$ et $pr_Y \colon X \times Y \to Y$ les projections ; si L_X (resp. L_Y) est un fibré en droites *ample* sur X (resp. sur Y) qui représente la polarisation, le fibré en droites $pr_X^* L_X \otimes pr_Y^* L_Y$ (que l'on note parfois $L_X \boxtimes L_Y$) est ample sur $X \times Y$ et représente la polarisation produit.

6.2. — Un cas particulier important de polarisation est celui où la forme ω est unimodulaire sur le réseau Γ (c'est-à-dire que son pfaffien vaut 1) ; on dit que la polarisation est *principale*, et que (X, ω) est une *variété abélienne principalement polarisée*. Le morphisme $\varphi_\omega \colon X \to \hat{X}$ associé est alors un isomorphisme (th. 4.2) ; si L est un fibré en droites de première classe de Chern ω, le théorème de Riemann–Roch entraîne que le système linéaire $|L|$ a un seul élément, que l'on note souvent Θ, et que l'on appelle un ≪ diviseur thêta ≫ . Il n'est défini par la polarisation qu'à translation près (*cf.* 4.3) ; pour que $\Theta_x = \Theta$, il faut et il suffit que x soit nul.

***Proposition 6.3*. —** *Toute variété abélienne est isogène à une variété abélienne principalement polarisée. Plus précisément, pour tout fibré en droites ample L sur une variété abélienne X, il existe une variété abélienne Y, un fibré en droites ample M définissant une polarisation principale sur Y et une isogénie $u \colon X \to Y$ tels que $L \simeq u^* M$.*

Démonstration. — Soient $X = V/\Gamma$ une variété abélienne et ω une polarisation sur X. Prenons une base $(\gamma_1, \ldots, \gamma_{2g})$ de Γ dans laquelle la matrice de ω est comme dans la proposition 1.1. Soit Γ' le réseau de V engendré par $\gamma_1/d_1, \ldots, \gamma_g/d_g, \gamma_{g+1}, \ldots, \gamma_{2g}$. La forme de Kähler ω est entière unimodulaire sur Γ' donc définit une polarisation principale sur le tore $Y = V/\Gamma'$. La surjection canonique $X \to Y$ est une isogénie. Soit L un fibré en droites sur X de première classe de Chern ω ; soit M un fibré en droites sur Y de première classe de Chern ω. Les fibrés en droites L et u^*M ont même classe de Chern ; comme ils sont amples, il existe (*cf.* 4.3) un point x de X tel que $L \simeq \tau_x^*(u^*M)$. Comme $\tau_x^*(u^*M) \simeq u^*(\tau_{u(x)}^*M)$, cela démontre la proposition. □

7. Corps des fonctions d'une variété abélienne

Le théorème de Lefschetz, joint au théorème de Riemann–Roch, va nous permettre de déterminer le degré de transcendance sur $\mathbf{C}$ du corps des fonctions d'une variété abélienne. Commençons tout d'abord par répondre à une question soulevée dans la remarque V.5.12.2), p. 63.

***Proposition 7.1.* —** *Tout fibré en droites sur une variété abélienne a une section méromorphe non nulle.*

Démonstration. — Soient X une variété abélienne et L un fibré en droites sur X. Soit M un fibré en droites *ample* (*cf.* 3.6) sur X ; par le théorème de Riemann–Roch 2.2, il a une section s non nulle. Pour m entier assez grand, la première classe de Chern du fibré $L \otimes M^{\otimes m}$ est définie positive, donc celui-ci a pour la même raison une section t non nulle, et t/s^m est une section méromorphe non nulle de L. □

Passons maintenant aux fonctions méromorphes.

***Théorème 7.2.* —** *Le corps des fonctions d'une variété abélienne de dimension g est une extension de type fini de $\mathbf{C}$ de degré de transcendance g.* [2]

Démonstration. — Soit X une variété abélienne de dimension g. Il existe par le théorème de Lefschetz un fibré en droites ample L sur X qui induit un plongement $\psi_L \colon X \to \mathbf{P}^n$ donné par $\psi_L(x) = (\vartheta_0(x), \ldots, \vartheta_n(x))$. Les fonctions $f_j = \vartheta_j/\vartheta_0$, pour $1 \le j \le n$, sont holomorphes sur un ouvert dense U du revêtement universel V de X sur lequel la matrice jacobienne $\big(\partial f_j/\partial z_k(z)\big)_{1\le j\le n, 1\le k\le g}$ est de rang g. Supposons par exemple que le mineur correspondant aux g premières lignes soit inversible. *Les fonctions méromorphes $f_1, \ldots, f_g$ sont alors algébriquement indépendantes* : en effet, si l'on a une relation polynomiale $P(f_1, \ldots, f_g) = 0$ de degré minimal, on obtient en dérivant par rapport à z_k, pour tout

2. Ce résultat est vrai plus généralement pour toute variété algébrique (lisse ou pas, mais telle quand même que $\mathscr{M}(X)$ soit un corps !) ; c'est même un des moyens de définir la *dimension* d'une telle variété ; *cf.* [**H**, chap. I, § 1, th. 1.8A].

z dans U,

$$\sum_{j=1}^{g} \frac{\partial P}{\partial X_j}(f_1, \ldots, f_g)(z) \frac{\partial f_j}{\partial z_k}(z) = 0,$$

de sorte que $\dfrac{\partial P}{\partial X_j}(f_1, \ldots, f_g)$ est nul sur U, donc sur V, ce qui contredit la minimalité de P.

Soit f_0 une autre fonction méromorphe sur X, dont on écrit le diviseur $D' - D$, avec D et D' effectifs (prop. IV.2.3, p. 42). Posons $a = g!(n+1)$; pour tout entier naturel m, le nombre de monômes $f_0^{m_0} f_1^{m_1} \cdots f_g^{m_g}$, avec $0 \leq m_0 \leq a$ et $0 \leq m_1 + \cdots + m_g \leq m$ est

$$(a+1)\binom{m+g}{g} = (a+1)\frac{m^g}{g!} + O(m^{g-1}),$$

et ces monômes correspondent à des sections (holomorphes) du fibré en droites ample $L^m \otimes \mathscr{O}_X(aD)$ (*cf.* (10), p. 52). Le théorème de Riemann–Roch donne

$$\begin{aligned}\dim H^0(X, L^m \otimes \mathscr{O}_X(aD)) &= \operatorname{pf}\big(c_1(L^m \otimes \mathscr{O}_X(aD))\big)\\ &= \operatorname{pf}\big(mc_1(L) + ac_1(\mathscr{O}_X(D))\big),\end{aligned}$$

qui est un polynôme en m de degré g et de coefficient directeur $\operatorname{pf}\big(c_1(L)\big) = n+1$. Comme $\frac{(a+1)}{g!} > n+1$, il existe une relation de dépendance algébrique entre $f_0, f_1, \ldots, f_g$ dont le degré en f_0 est non nul (puisque $f_1, \ldots, f_g$ sont algébriquement indépendantes) majoré par a. Ceci entraîne [(3)] que l'extension $\mathscr{M}(X)$ de l'extension transcendante pure $\mathbf{C}(f_1, \ldots, f_g)$ de $\mathbf{C}$ est finie de degré au plus a, d'où le théorème. □

Il résulte du théorème et du corollaire IV.3.6, p. 45, que le corps des fonctions d'un tore complexe X est une extension de type fini de $\mathbf{C}$ de degré de transcendance la dimension de son abélianisé ; pour que ce degré soit égal à la dimension de X, il faut et il suffit que X soit une variété abélienne.

8. Théorème de réductibilité de Poincaré

Le résultat suivant est connu sous le nom de « théorème de réductibilité de Poincaré » ; sa conclusion ne subsiste pas pour un tore complexe général (*cf.* exerc. VI.6).

Théorème 8.1. — *Soient X une variété abélienne et Y une sous-variété abélienne de X. Il existe une sous-variété abélienne Z de X tel que $Y \cap Z$ soit fini et $Y + Z = X$. En d'autres termes, l'application somme $Y \times Z \to X$ est une isogénie.*

3. Rappelons comment cela se démontre : posons $K = \mathbf{C}(f_1, \ldots, f_g)$ et choisissons un élément f de $\mathscr{M}(X)$ de degré maximal sur K. Si h est dans $\mathscr{M}(X)$, l'extension $K(f, h)$ de K est finie et séparable puisque l'on est en caractéristique nulle, donc ne contient qu'un nombre fini de sous-corps intermédiaires. Il existe donc des nombres complexes distincts λ (non nul) et λ' tels que $K(f + \lambda h) = K(f + \lambda' h)$. On en déduit que f et h sont dans $K(f + \lambda h)$, d'où $K(f) = K(f + \lambda h)$ puisque f est de degré maximal, puis $h \in K(f)$ et $\mathscr{M}(X) = K(f)$.

Démonstration. — Soient L un fibré en droites ample sur X et $\varphi_L\colon X \to \hat{X}$ l'isogénie associée. Soient $\iota\colon Y \to X$ l'inclusion, $\hat\iota\colon \hat{X} \to \hat{Y}$ son dual, et Z le sous-tore $\bigl(\varphi_L^{-1}(\operatorname{Ker}\hat\iota)\bigr)^0$ de X. La composée $\hat\iota \circ \varphi_L\colon X \to \hat{Y}$ est nulle sur Z ; en revanche, sa restriction à Y est l'application φ_{ι^*L} (exerc. VI.3), qui est une isogénie puisque ι^*L est ample sur Y. On en déduit que $Y \cap Z$ est contenu dans le noyau de φ_{ι^*L}, donc est fini ; l'application somme $Y \times Z \to X$ est alors de noyau fini. C'est une isogénie puisque $\dim Z = \dim(\operatorname{Ker}\hat\iota)^0 = \dim X - \dim Y$ (prop. 4.6.a)). $\square$

8.2. — On dit qu'un tore complexe est *simple* s'il ne contient aucun sous-tore autre que lui-même et $\{0\}$. Un tore « très général » est simple (exerc. I.2, p. 9) ; un tore dont l'anneau des endomorphismes est **Z** est simple. Le théorème de Poincaré entraîne que toute variété abélienne X est isogène à un produit $X_1^{n_1} \times \cdots \times X_r^{n_r}$, où $X_1, \ldots, X_r$ sont des variétés abéliennes simples deux à deux non isogènes. Une telle décomposition n'est bien sûr pas unique. En revanche, les X_j sont uniquement déterminés à isogénie près et les n_j sont uniques.

9. Décomposition d'une variété abélienne polarisée en produit

Certains tores complexes peuvent s'écrire de plusieurs façons différentes comme produits de sous-tores simples [4]. En revanche, si l'on tient compte des polarisations, il y a unicité, comme le montre le corollaire du théorème suivant [5].

***Théorème 9.1.* —** *Soit (X,ω) une variété abélienne polarisée contenant des sous-variétés abéliennes X_1, X_2, Y_1 et Y_2 telles que*

$$(X,\omega) = (X_1, \omega|_{X_1}) \times (X_2, \omega|_{X_2}) = (Y_1, \omega|_{Y_1}) \times (Y_2, \omega|_{Y_2}).$$

Pour $i = 1, 2$, on a alors

$$(X_i, \omega|_{X_i}) \simeq (X_i \cap Y_1, \omega|_{X_i \cap Y_1}) \times (X_i \cap Y_2, \omega|_{X_i \cap Y_2}).$$

Démonstration. — Posons $Z_{ij} = (X_i \cap Y_j)^0$ et notons Z la sous-variété abélienne $Z_{11} \times Z_{12} \times Z_{21} \times Z_{22}$ de X. Soient K le noyau de l'application $\widehat{X} \to \widehat{Z}$ et K_i le noyau de

4. Soit m un entier plus grand que 5 vérifiant $m \equiv 1 \pmod 4$ (de sorte que l'anneau $\mathbf{Z}[\sqrt{-m}]$ n'est pas principal) et soit E la courbe elliptique $E_{\sqrt{-m}}$. L'article de T. Hayashida, M. Nishi : *Existence of curves of genus two on a product of two elliptic curves*, J. Math. Soc. Japan **17** (1965), cor. p. 7, permet de démontrer que la surface abélienne $E \times E$ est isomorphe à un produit $E' \times E''$, où E' et E'' sont des courbes elliptiques qui ne sont pas isomorphes à E.

5. Ce théorème est aussi conséquence d'un résultat de Eichler (*cf. Note zur Theorie der Kristallgitter*, Math. Ann. **125** (1952), 51–55, ou mieux : M. Kneser, *Zur Theorie der Kristallgitter*, Math. Ann. **127** (1954), 105–106) sur l'unicité de la décomposition orthogonale en indécomposables d'un réseau polarisé, c'est-à-dire muni d'une forme quadratique définie positive ; *cf.* le commentaire de J.-P. Serre à l'article *Polarisations sur les variétés abéliennes produits*, C.R.A.S., t. 323, Série I (1996), 631–635.

l'application $\widehat{X}_i \to \widehat{Z}_{i1} \times \widehat{Z}_{i2}$. Par hypothèse, $\varphi_\omega : X_1 \times X_2 \to \widehat{X}_1 \times \widehat{X}_2$ n'est autre que $\varphi_{\omega|X_1} \times \varphi_{\omega|X_2}$, de sorte que $K = K_1 \times K_2$. De plus, si

$$X' = \varphi_\omega^{-1}(K)^0 \qquad \text{et} \qquad X'_i = \varphi_{\omega|X_i}^{-1}(K_i)^0,$$

on a

$$(X', \omega|_{X'}) = (X'_1, \omega|_{X'_1}) \times (X'_2, \omega|_{X'_2}).$$

On montre de façon analogue que l'on a une décomposition

$$(X', \omega|_{X'}) = (Y'_1, \omega|_{Y'_1}) \times (Y'_2, \omega|_{Y'_2}),$$

où Y'_j est une sous-variété abélienne de Y_j telle que $X'_i \cap Y'_j$ soit *fini*. Ceci entraîne en particulier que X'_1, X'_2, Y'_1 et Y'_2 ont même dimension m. Il s'agit de montrer que m est nul, puisque, Z étant de dimension $\dim X - \dim X'$, on aura alors $Z = X$. On a

$$\omega|_{X'_i} = \omega_{i1} + \omega_{i2},$$

où ω_{ij} est l'image inverse de $\omega|_{Y'_j}$ par l'application composée $p_{ij} : X'_i \subset X' = Y'_1 \times Y'_2 \xrightarrow{\mathrm{pr}_j} Y'_j$ (dont le noyau est fini, de sorte que ω_{ij} est une polarisation). *Supposons m non nul ;* on a par la proposition 5.4

$$\deg(\omega|_{X'_i}) \geq \deg(\omega_{i1}) + \deg(\omega_{i2}),$$

de sorte que

$$\begin{aligned} \deg(\omega|_{X'}) &= \deg(\omega|_{X'_1}) \deg(\omega|_{X'_2}) \\ &\geq \big(\deg(\omega_{11}) + \deg(\omega_{12})\big)\big(\deg(\omega_{21}) + \deg(\omega_{22})\big). \end{aligned} \tag{23}$$

Comme ω_{ij} est l'image inverse de $\omega|_{Y'_j}$ par l'isogénie p_{ij}, on a $\deg(\omega|_{Y'_j}) \leq \deg(\omega_{ij})$ pour tous i et j par le corollaire 4.7, de sorte que

$$\deg(\omega|_{X'}) = \deg(\omega|_{Y'_1}) \deg(\omega|_{Y'_2}) \leq \deg(\omega_{11}) \deg(\omega_{22}).$$

Comme les degrés sont tous strictement positifs, cela contredit (23) et termine la démonstration du théorème. □

On dira qu'une variété abélienne polarisée est *indécomposable* si elle n'est pas produit de variétés abéliennes *polarisées* de dimension strictement inférieure. Il existe des variétés abéliennes polarisées indécomposables qui ne sont pas simples.

***Corollaire 9.2.* —** *Soit (X, ω) une variété abélienne polarisée contenant des sous-variétés abéliennes $X_1, \ldots, X_r$ et $Y_1, \ldots, Y_s$ telles que*

$$(X, \omega) = \prod_{i=1}^{r} (X_j, \omega|_{X_j}) = \prod_{j=1}^{s} (Y_j, \omega|_{Y_j}).$$

Si $(X_1, \omega|_{X_1}), \ldots, (X_r, \omega|_{X_r})$ et $(Y_1, \omega|_{Y_1}), \ldots, (Y_s, \omega|_{Y_s})$ sont indécomposables, on a $r = s$ et il existe une permutation σ de $\{1, \ldots, s\}$ telle que $Y_j = X_{\sigma(j)}$ pour tout j.

Le corollaire, s'il entraîne que les facteurs indécomposables d'une variété abélienne polarisée sont bien déterminés, ne dit rien sur la façon de les trouver. Nous allons voir qu'il existe une telle méthode pour les polarisations *principales*. Soient donc X une variété abélienne munie d'une polarisation principale ω, et Θ un diviseur thêta, défini à translation près (*cf.* 6.2). Le corollaire du théorème suivant montre comment trouver les facteurs indécomposables de (X, ω) à partir des composantes irréductibles de Θ (*cf.* IV.2.6, p. 43, ou exerc. VI.7). Les notations sont celles du théorème 5.1.

***Théorème 9.3.* —** *Soient X un tore complexe et L et M des fibrés en droites positifs tels que $L \otimes M$ soit ample. On suppose que M a une section non nulle telle que l'inclusion $H^0(X, L) \to H^0(X, L \otimes M)$ qu'elle induit soit bijective. L'application*

$$(X, [L \otimes M]) \longrightarrow (\overline{X}_L, [\overline{L}]) \times (\overline{X}_M, [\overline{M}])$$

est un isomorphisme de variétés abéliennes polarisées.

Démonstration. — Le noyau $K(L)^0 \cap K(M)^0$ de cette application est contenu dans $K(L \otimes M)$ donc est fini. Comme $\dim H^0(X, L \otimes M) < \dim H^0(X, L) + \dim H^0(X, M)$, la proposition 5.4 donne $\dim \overline{X}_L + \dim \overline{X}_M \leq \dim X$, de sorte que c'est une isogénie. Le corollaire 4.7 entraîne que son degré est

$$\frac{\dim H^0(X, L \otimes M)}{\dim H^0(X, L) \dim H^0(X, M)} \leq 1,$$

ce qui termine la démonstration. □

***Corollaire 9.4.* —** *Soit (X, ω) une variété abélienne principalement polarisée. Tout diviseur thêta est réduit; on note $\Theta_1, \dots, \Theta_r$ ses composantes irréductibles*[6]*, $\overline{X}_j$ la variété abélienne $X/K(\Theta_j)^0$ et $\overline{\Theta}_j$ le diviseur de $\overline{X}_j$ dont l'image inverse sur X est Θ_j (th. 5.1). Ce diviseur définit une polarisation principale indécomposable ω_j sur $\overline{X}_j$ et le morphisme*

$$(X, \omega) \to (\overline{X}_1, \omega_1) \times \cdots \times (\overline{X}_r, \omega_r)$$

est un isomorphisme de variétés abéliennes principalement polarisées.

Démonstration. — Seul le premier point ne résulte pas du théorème, mais du théorème du carré, qui entraîne qu'on a $\dim H^0(X, \mathscr{O}_X(2D)) \geq 2$ pour tout diviseur effectif D de X. □

10. Endomorphismes des variétés abéliennes

Soit $X = V/\Gamma$ un tore complexe de dimension g ; on note $\mathrm{End}(X)$ l'anneau des endomorphismes de X. Par le théorème I.2.3, p. 7, il s'identifie à l'anneau des endomorphismes **C**-linéaires de V qui envoient Γ dans lui-même. C'est un sous-anneau de $\mathrm{End}(\Gamma)$, donc un groupe abélien libre de rang au plus $4g^2$. L'anneau des endomorphismes d'une variété abélienne « très générale » est **Z** (exerc. VII.1, p. 102).

6. Voir exerc. VI.7.b).

La $\mathbf{Q}$-algèbre $\mathrm{End}_{\mathbf{Q}}(X) = \mathrm{End}(X) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q}$ est de dimension finie. Dans cette algèbre, les morphismes de mutiplication par un entier non nul sont inversibles, donc aussi, par 4.1, p. 72, toutes les isogénies.

***Théorème 10.1.* —** *Soit X un tore complexe.*

a) Si X est simple, $\mathrm{End}_{\mathbf{Q}}(X)$ *est un corps gauche.*

b) Si X est une variété abélienne, elle est isogène à un produit $X_1^{n_1} \times \cdots \times X_r^{n_r}$, où $X_1, \ldots, X_r$ sont des variétés abéliennes simples deux à deux non isogènes, et

$$\mathrm{End}_{\mathbf{Q}}(X) \simeq \mathscr{M}_{n_1}(\mathrm{End}_{\mathbf{Q}}(X_1)) \times \cdots \times \mathscr{M}_{n_r}(\mathrm{End}_{\mathbf{Q}}(X_r)).$$

Démonstration. — Tout endomorphisme non nul d'un tore simple est une isogénie, qui est inversible dans $\mathrm{End}_{\mathbf{Q}}(X)$. Cela prouve a). Le point b) résulte du théorème de Poincaré 8.1. □

***Définition 10.2.* —** Soient (X, ω) une variété abélienne polarisée et u un endomorphisme de X. Posons

$$u' = \varphi_\omega^{-1} \hat{u} \varphi_\omega \in \mathrm{End}_{\mathbf{Q}}(X).$$

On a

$$(u')' = u, \quad (u+v)' = u' + v' \quad \text{et} \quad (uv)' = v'u',$$

de sorte que l'on définit ainsi une anti-involution $'$ de la $\mathbf{Q}$-algèbre $\mathrm{End}_{\mathbf{Q}}(X)$, que l'on appelle *involution de Rosati*.

10.3. — Soient u un endomorphisme de la variété abélienne $X = V/\Gamma$ et $u_{\mathbf{R}}$ l'endomorphisme réel de V induit par u ; il vérifie $u_{\mathbf{R}}(\Gamma) \subset \Gamma$. Si u est une isogénie, son degré est le cardinal de son noyau $u_{\mathbf{R}}^{-1}(\Gamma)/\Gamma$, c'est-à-dire $[\Gamma \colon u_{\mathbf{R}}(\Gamma)]$, soit encore le déterminant de $u_{\mathbf{R}}$. Lorsque u n'est pas une isogénie, le déterminant de $u_{\mathbf{R}}$ est nul ; on pose $\deg(u) = 0$. On définit la trace de u comme étant celle de $u_{\mathbf{R}}$, et son polynôme caractéristique P_u comme celui de $u_{\mathbf{R}}$. C'est un polynôme unitaire de degré $2g$ à coefficients entiers, et pour tout entier n, on a par ce qui précède

$$P_u(n) = \deg(\mathbf{n} - u),$$

où $\mathbf{n} \colon X \to X$ est la multiplication par n.

***Théorème 10.4.* —** *Soit (X, ω) une variété abélienne polarisée. L'application*

$$(u, v) \longmapsto \mathrm{Tr}(u'v)$$

est une forme bilinéaire symétrique définie positive rationnelle sur $\mathrm{End}_{\mathbf{Q}}(X)$.

Démonstration. — Comme la trace est $\mathbf{Z}$-linéaire, on peut suposer que u et u' sont des endomorphismes de X. Le polynôme caractéristique de u' est alors celui de ${}^t\overline{u}_{\mathbf{R}}$, de sorte que

$P_{u'} = \overline{P}_u = P_u$. La forme bilinéaire du théorème est donc symétrique. On a ensuite, pour tout entier n,

$$\begin{aligned}\deg \varphi_{n\omega - u^*\omega} &= \deg(n\varphi_\omega - \varphi_{u^*\omega})\\ &= \deg(n\varphi_\omega - \hat{u}\varphi_\omega u)\\ &= \deg(n\varphi_\omega - \varphi_\omega u'u)\\ &= \deg(\varphi_\omega)\deg(\mathbf{n} - u'u) = \deg(\varphi_\omega)P_{u'u}(n).\end{aligned}$$

Comme la forme hermitienne H associée à ω est définie positive, il existe une base complexe $\mathscr{B}$ de V dans laquelle cette matrice est l'identité, tandis que la matrice D de la forme hermitienne (positive) associée à u^*H est diagonale, de coefficients diagonaux $a_1, \dots, a_g$ positifs. Puisque $\omega(x, iy) = \operatorname{Re} H(x, y)$, la matrice de ω dans la base réelle $(\mathscr{B}, i\mathscr{B})$ de V est $\begin{pmatrix} 0 & I_g \\ -I_g & 0\end{pmatrix}$, tandis que celle de $u^*\omega$ est $\begin{pmatrix} 0 & D \\ -D & 0\end{pmatrix}$. Si P est la matrice de passage d'une base de Γ à la base $(\mathscr{B}, i\mathscr{B})$, on a

$$\operatorname{pf}(\omega) = \text{dét}(P), \qquad \operatorname{pf}(n\omega - u^*\omega) = \text{dét}(P)\,\text{dét}(nI_g - D).$$

Or le degré de $\varphi_{n\omega-u^*\omega}$ est $\operatorname{pf}(n\omega - u^*\omega)^2$ (th. 4.2) et celui de φ_ω est $\operatorname{pf}(\omega)^2$; on en déduit

$$P_{u'u}(n) = \text{dét}(nI_g - D)^2,$$

ce qui entraîne $\operatorname{Tr}(u'u) = 2(a_1 + \cdots + a_g) \geq 0$. Si c'est nul, $u^*\omega$ est nul, et u est nul. □

Si X est une variété abélienne simple, $K = \operatorname{End}_{\mathbf{Q}}(X)$ est donc un corps gauche de dimension finie sur $\mathbf{Q}$ muni d'une anti-involution $'$. Le théorème précédent entraîne $\operatorname{Tr}_{K/\mathbf{Q}}(u'u) > 0$ pour tout u non nul dans K. Les paires $(K,')$ vérifiant cette propriété ont été classifiées par Albert (*cf.* [**LB**, § 5.5, p. 133]) ; cela permet de déterminer complètement la liste des algèbres $\operatorname{End}_{\mathbf{Q}}(X)$ possibles.

Exercices

VI.1. — Théorème du cube. Soient X un tore complexe et $\pi_j \colon X \times X \times X \to X$, pour $j = 1, 2, 3$, les trois projections. Pour tout fibré en droites L sur X, le fibré en droites

$$(\pi_1 + \pi_2 + \pi_3)^*L \otimes (\pi_1 + \pi_2)^*L^{-1} \otimes (\pi_2 + \pi_3)^*L^{-1} \otimes (\pi_3 + \pi_1)^*L^{-1} \otimes \pi_1^*L \otimes \pi_2^*L \otimes \pi_3^*L$$

sur $X \times X \times X$ est trivial.

VI.2. — Soient X un tore complexe et n un entier. On note $\mathbf{n}$ l'endomorphisme de X de multiplication par n. Montrer que pour tout fibré en droites L sur X, on a

$$\mathbf{n}^*L \simeq L^{\otimes n(n+1)/2} \otimes (-\mathbf{1})^*L^{\otimes n(n-1)/2}.$$

VI.3. — Soient $u \colon X \to Y$ un morphisme entre tores complexes et L un fibré en droites sur Y. Montrer que le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{u} & Y \\ {\scriptstyle\varphi_{u^*L}}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle\varphi_L} \\ \hat{X} & \xleftarrow{\hat{u}} & \hat{Y} \end{array}$$

VI.4. — Soient L un fibré en droites sur un tore complexe X et n un entier strictement positif.

a) Montrer $K(L^n) = \{x \in X \mid nx \in K(L)\}$.

b) Montrer l'égalité $e^{L^n}(x, y) = e^L(x, ny)$ pour tout x dans $K(L)$ et y dans $K(L^n)$.

VI.5. — Soient $X = V/\Gamma$ un tore complexe et $u \colon X \to \hat{X}$ un morphisme de groupes. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) il existe un fibré en droites L sur X tel que $u = \varphi_L$;

(ii) $\hat{u} = u$.

VI.6. — Soient X le tore complexe quotient de $\mathbf{C}^2$ par le réseau engendré par $(i, 0)$, $(\sqrt{2}, i)$, $(1, 0)$ et $(0, 1)$, et Y le sous-tore de X image du morphisme $\mathbf{C}/i\mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z} \to X$ défini par $z \mapsto (z, 0)$. Montrer qu'il n'existe aucun sous-tore Z de X tel que $Y \times Z$ soit isogène à X.

VI.7. — Soit Γ un réseau dans un espace vectoriel complexe V. On appelle forme de Riemann toute forme hermitienne positive sur V dont la partie imaginaire est entière sur Γ.

a) Soit H une forme de Riemann. Montrer que les formes de Riemann H' telles que la forme hermitienne $H - H'$ soit positive sont en nombre fini.

b) En déduire que si D est un diviseur sur le tore complexe V/Γ, il existe des diviseurs effectifs *irréductibles* (*cf.* IV.2.6) $D_1, \ldots, D_r$ deux à deux distincts et des entiers $n_1, \ldots, n_r$ tels que $D = n_1 D_1 + \cdots + n_r D_r$.

VI.8. — Soit D un diviseur effectif ample sur une variété abélienne X. Montrer que tout sous-ensemble analytique compact de X qui ne rencontre pas le support de D est fini (*Indication :* il est contenu dans une fibre de l'application $\psi_{\mathscr{O}_X(3D)}$ définie en V.1.6, p. 52).

VI.9. — Soit X une variété abélienne de dimension g ; on définit sa *variété de Kummer* $K(X)$ comme le quotient de X par l'involution $\iota \colon x \mapsto -x$. Il ressort du théorème de Cartan (th. VII.1.2, p. 91) que $K(X)$ peut être muni d'une structure d'espace analytique de façon que $\pi \colon X \to K(X)$ soit une application holomorphe.

a) Montrer que $K(X)$ est une variété complexe sur le complémentaire des 2^{2g} points images des points d'ordre 2 de X.

b) Soit L un fibré en droites ample sur X. Montrer que $\iota^* L$ est un translaté de L. On dit que L est *symétrique* si $\iota^* L \simeq L$.

c) Soit ω une polarisation principale sur X. Montrer qu'il existe exactement 2^{2g} représentants symétriques L de ω, et que le fibré en droites $M = L^2$ ne dépend que de ω. Montrer qu'il définit un morphisme $\psi_M \colon X \to \mathbf{P}^{2^g - 1}$.

d) Sous les hypothèses de c), montrer que le morphisme ψ_M se factorise en

$$\psi_M \colon X \longrightarrow K(X) \xrightarrow{\psi} \mathbf{P}^{2^g - 1}.$$

Montrer que ψ est injectif et que c'est un plongement sur le lieu lisse de $K(X)$ (on peut montrer que c'est un plongement partout ; ceci entraîne par le théorème de Chow (*cf.* § 6) que $K(X)$ est une variété algébrique projective).

VI.10. — Soient (X, ω) une variété abélienne principalement polarisée et Θ un diviseur thêta (*cf.* § 6) symétrique (*cf.* exerc. VI.9.b)).

a) Soient a et b des éléments de $\frac{1}{2}\mathbf{Z}^g/\mathbf{Z}^g$. Montrer que la fonction thêta $\vartheta\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}(\cdot, \tau)$ a même parité que $4\,{}^t\!ab$.

b) En déduire que Θ contient au moins $2^{g-1}(2^g - 1)$ points de 2-torsion de X, et que s'il contient l'un des $2^{g-1}(2^g + 1)$ points de 2-torsion restants, il est singulier en ce point.

VI.11. — Soient E la courbe elliptique dont le groupe d'automorphisme est d'ordre 4 (*cf.* exerc. II.12, p. 23) et A la variété abélienne E^4.

a) Montrer que la donnée d'une polarisation principale indécomposable sur A équivaut à celle d'une forme hermitienne positive unimodulaire indécomposable sur le $\mathbf{Z}$-module $\mathbf{Z}[i]^4$.

b) Montrer qu'une telle forme existe et est unique [7] (*Indication :* sa partie réelle, qui est une forme quadratique positive unimodulaire sur $\mathbf{Z}^8$, est nécessairement la forme quadratique canonique sur le réseau Γ_8 du système de racines E_8).

VI.12. — Soient X_1 et X_2 des variétés abéliennes et L un fibré en droites ample sur $X_1 \times X_2$. On veut montrer [8] l'inégalité

$$\dim H^0(X_1 \times X_2, L) \leq \dim H^0(X_1, L|_{X_1}) \, \dim H^0(X_2, L|_{X_2}),$$

avec égalité si et seulement si L est isomorphe à $L|_{X_1} \boxtimes L|_{X_2}$.

a) Écrivons $X_1 = V_1/\Gamma_1$ et $X_2 = V_2/\Gamma_2$, et notons L_j la restriction de L à X_j. Soient $\mathscr{B}_j$ une base de Γ_j et $\mathscr{C}_j$ une base complexe de V_j, orthonormale pour la forme hermitienne associée à $c_1(L_j)$. Soit P_j la matrice de passage de la base $\mathscr{B}_j$ à la base $\mathscr{C}_j \sqcup i\mathscr{C}_j$ de $(V_j)_{\mathbf{R}}$. Montrer l'égalité $\dim H^0(X_j, L_j) = 1/\operatorname{dét}(P_j)$.

b) Soient A une matrice rectangulaire quelconque et $H = \begin{pmatrix} I & A \\ {}^t\overline{A} & I \end{pmatrix}$ matrice hermitienne définie positive. Montrer $\operatorname{dét}(H) \leq 1$; s'il y a égalité, A est nulle.

c) En déduire le résultat cherché.

VI.13. — Soit K un corps de nombres totalement réel de degré g, soit $\mathscr{O}_K$ l'anneau de ses entiers, et soient $\sigma_1, \ldots, \sigma_g$ les différents plongements de K dans $\mathbf{R}$. Soient $\tau_1, \ldots, \tau_g$ des nombres complexes dont la partie imaginaire est strictement positive. On pose

$$\Gamma = \big\{ \big(\sigma_1(p)\tau_1 + \sigma_1(q), \ldots, \sigma_g(p)\tau_g + \sigma_g(q)\big) \mid p, q \in \mathscr{O}_K \big\}.$$

a) Montrer que Γ est un réseau dans $\mathbf{C}^g$ et que $X = \mathbf{C}^g/\Gamma$ est une variété abélienne.

b) Montrer que l'algèbre $\operatorname{End}_{\mathbf{Q}}(X)$ contient K.

VI.14. — L'astuce de Zarhin. Soient (X, ω) une variété abélienne polarisée et n un entier tel que $n(\operatorname{Ker} \varphi_\omega) = 0$, de sorte que $n\varphi_\omega^{-1}$ définit une application $\hat{X} \to X$.

a) On suppose qu'il existe un endomorphisme u de X vérifiant $uu' = u'u = (n-1)\operatorname{Id}_X$. Grâce à l'exercice VI.5, il existe un fibré en droites M sur $X \times \hat{X}$ tel que la matrice de $\varphi_M : X \times \hat{X} \to \widehat{(X \times \hat{X})} = \hat{X} \times X$ soit

$$\begin{pmatrix} \varphi_\omega & \hat{u} \\ u & n\varphi_\omega^{-1} \end{pmatrix}.$$

Montrer que l'application φ_M est injective et que M définit une polarisation principale sur $X \times \hat{X}$.

b) Montrer qu'il existe une polarisation principale sur la variété abélienne $(X \times \hat{X})^4$ (*Indication :* on pourra considérer l'endomorphisme u de X^4 de matrice $\begin{pmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & d & -c \\ c & -d & a & b \\ d & c & -b & a \end{pmatrix}$, où a, b, c, d sont des entiers bien choisis).

VI.15. — Soit X une variété abélienne dont le groupe des endomorphismes est isomorphe à $\mathbf{Z}$.

a) Montrer que toute variété abélienne isogène à X a la même propriété.

b) Montrer que les seules sous-variétés abéliennes de X sont 0 et X.

---

7. La variété abélienne principalement polarisée indécomposable ainsi construite est étudiée dans *Annulation de thêtaconstantes sur les variétés abéliennes de dimension quatre*, C.R.A.S., t. 305, Série I (1987), 885–888 et dans R. Varley, *Weddle's surface, Humbert's curves, and a certain 4-dimensional abelian variety*, Am. J. of Math. **108** (1986), 931–952. Son groupe d'automorphismes est d'ordre 46080. Elle admet une polarisation principale indécomposable et une autre polarisation pour laquelle elle est produit de 4 courbes elliptiques.

8. On trouvera dans l'article *Polarisations sur les variétés abéliennes produits*, C.R.A.S., t. 323, Série I (1996), 631–635, une démonstration algébrique de ce résultat.

c) Montrer que le groupe $\mathrm{NS}(X) = \mathrm{Pic}(X)/\operatorname{Pic}^0(X)$ (*cf.* rem. V.5.12.2), p. 63) est isomorphe à $\mathbf{Z}$. En particulier, les polarisations de X sont toutes proportionnelles.

VI.16. — Soit (X,ω) une variété abélienne polarisée.

a) Montrer que l'on peut définir une application

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{NS}(X)\otimes_{\mathbf{Z}}\mathbf{Q} & \longrightarrow & \mathrm{End}_{\mathbf{Q}}(X) \\ \eta & \longmapsto & \varphi_\omega^{-1}\circ\varphi_\eta \end{array}$$

et que son image est l'espace vectoriel des éléments symétriques de $\mathrm{End}_{\mathbf{Q}}(X)$, c'est-à-dire qui vérifient $u' = u$ (*Indication :* utiliser l'exercice VI.5).

b) Lorsque la polarisation ω est principale, montrer que cette application se restreint en un isomorphisme entre $\mathrm{NS}(X)$ et l'ensemble des ≪ vrais ≫ endomorphismes symétriques de X (l'involution de Rosati est dans ce cas définie sur $\mathrm{End}(X)$ puisque φ_ω est un isomorphisme).

VI.17. — Soient (X,ω) une variété abélienne polarisée et u un automorphisme de (X,ω), c'est-à-dire tel que $u^*\omega = \omega$.

a) Montrer l'égalité $u'u = 1$ dans $\mathrm{End}_{\mathbf{Q}}(X)$.

b) En déduire que le groupe d'automorphismes de (X,ω) est fini (on obtiendra dans le corollaire VII.3.5, p. 98, une borne explicite sur l'ordre de ce groupe).

CHAPITRE VII

ESPACES DE MODULES

1. Espaces de modules de variétés abéliennes polarisées

Soient $X = V/\Gamma$ un tore complexe et ω une polarisation sur X. La proposition VI.1.1 permet d'associer à ω des entiers $d_1, \ldots, d_g$ strictement positifs vérifiant $d_1 \mid \cdots \mid d_g$. On appelera $\Delta = (d_1, \ldots, d_g)$ le *type* [1] de la polarisation ω. On note encore Δ la matrice diagonale de coefficients diagonaux $d_1, \ldots, d_g$.

On cherche à paramétrer les classes d'isomorphisme de variétés abéliennes munies d'une polarisation de type fixé. Par le théorème VI.1.3, p. 66, toute variété abélienne polarisée de type Δ est isomorphe au quotient X_τ de $\mathbf{C}^g$ par un réseau $\Gamma_\tau = \tau\mathbf{Z}^g \oplus \Delta\mathbf{Z}^g$, où τ est dans le demi-espace de Siegel

$$\mathscr{H}_g = \{\tau \in \mathscr{M}_g(\mathbf{C}) \mid \tau = {}^t\tau,\ \operatorname{Im}\tau > 0\}.$$

Pour que de telles variétés X_τ et $X_{\tau'}$ soient isomorphes, il faut et il suffit qu'il existe un automorphisme u de $\mathbf{C}^g$ qui vérifie $u(\Gamma_{\tau'}) = \Gamma_\tau$ (th. I.2.3, p. 7). Soient A la matrice de l'application $\mathbf{C}$-linéaire u dans la base canonique de $\mathbf{C}^g$ et N sa matrice (entière) dans les bases de $\Gamma_{\tau'}$ et Γ_τ correspondant aux colonnes des matrices $\begin{pmatrix}\tau' & \Delta\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}\tau & \Delta\end{pmatrix}$ respectivement. Notons σ_Δ l'automorphisme

$$P \longmapsto \begin{pmatrix} I_g & 0 \\ 0 & \Delta \end{pmatrix}^{-1} P \begin{pmatrix} I_g & 0 \\ 0 & \Delta \end{pmatrix}$$

de $GL_{2g}(\mathbf{Q})$; il est plus commode de considérer la matrice (rationnelle) $M = \sigma_\Delta(N)$ de u dans les bases $\mathscr{C}'$ et $\mathscr{C}$ correspondant aux colonnes des matrices $\begin{pmatrix}\tau' & I_g\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}\tau & I_g\end{pmatrix}$. On a la relation

$$A\begin{pmatrix}\tau' & I_g\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\tau & I_g\end{pmatrix} M.$$

1. Cette notion de type est différente celle de type de fibré en droites définie dans le th. V.5.10, p. 62, mais cela ne posera pas de problème. On s'autorisera aussi à parler de fibré en droites (ample) de type $(d_1, \ldots, d_g)$ sur une variété abélienne.

Si on écrit ${}^tM = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, elle se traduit par

$$A\tau' = \tau\, {}^ta + {}^tb \qquad \text{et} \qquad A = \tau\, {}^tc + {}^td,$$

de sorte que la matrice $c\tau + d$ est inversible et

$$\tau' = (a\tau + b)(c\tau + d)^{-1}.$$

Si u induit aussi un isomorphisme entre variétés abéliennes *polarisées*, il respecte les formes alternées de matrice $J = \begin{pmatrix} 0 & I_g \\ -I_g & 0 \end{pmatrix}$ dans les bases $\mathscr{C}'$ et $\mathscr{C}$, de sorte que M, donc aussi ${}^tM$, appartient au groupe symplectique

$$\mathrm{Sp}_{2g}(\mathbf{Q}) = \{M \in \mathrm{GL}_{2g}(\mathbf{Q}) \mid MJ\, {}^tM = J\}.$$

Récapitulons : pour que des variétés abéliennes polarisées X_τ et $X_{\tau'}$ soient isomorphes, il faut et il suffit qu'il existe un élément $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ du groupe

$$\begin{aligned} G_\Delta &= \sigma_\Delta(\mathscr{M}_{2g}(\mathbf{Z})) \cap \mathrm{Sp}_{2g}(\mathbf{Q}) \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{Sp}_{2g}(\mathbf{Q}) \mid a, b\Delta^{-1}, \Delta c, \Delta d \Delta^{-1} \text{ à coefficients entiers} \right\} \end{aligned}$$

tel que la matrice $c\tau + d$ est inversible (nous verrons dans la démonstration de la proposition 1.1 que cette condition est toujours réalisée) et $\tau' = (a\tau + b)(c\tau + d)^{-1}$. L'isomorphisme entre X_τ et $X_{\tau'}$ (induit par u^{-1}) est défini par

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{C}^g/\tau\mathbf{Z}^g \oplus \Delta\mathbf{Z}^g & \longrightarrow & \mathbf{C}^g/\tau'\mathbf{Z}^g \oplus \Delta\mathbf{Z}^g \\ z & \longmapsto & z' = {}^t(c\tau + d)^{-1} z \\ \tau p + q & \longmapsto & \tau' p' + q', \end{array} \tag{24}$$

avec $\begin{pmatrix} p' \\ q' \end{pmatrix} = {}^t\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$ (comparer avec le § II.4, p. 19).

Proposition 1.1. — *La relation*

$$(M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \tau) \longmapsto M \cdot \tau = (a\tau + b)(c\tau + d)^{-1} \tag{25}$$

définit une action [2] *à gauche du groupe* $\mathrm{Sp}_{2g}(\mathbf{R})$ *sur* $\mathscr{H}_g$.

2. Lange et Birkenhake utilisent dans [**LB**] la même action que nous (avec les mêmes notations pour σ_Δ et G_Δ). Igusa préfère utiliser dans [**I**] l'action

$$\Big(N = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \tau\Big) \longmapsto \sigma_\Delta(N) \cdot \tau = (a\tau + b\Delta)(c\tau + d\Delta)^{-1}\Delta$$

du groupe $\mathrm{Sp}^\Delta_{2g}(\mathbf{Z}) = \sigma_\Delta^{-1}(G_\Delta) = \Big\{N \in \mathrm{GL}_{2g}(\mathbf{Z}) \mid N \begin{pmatrix} 0 & \Delta \\ -\Delta & 0 \end{pmatrix} {}^tN = \begin{pmatrix} 0 & \Delta \\ -\Delta & 0 \end{pmatrix}\Big\}$ noté $G_{\mathbf{Z}}$ dans *loc.cit.* (p. 173) et Γ_Δ dans [**LB**, p. 219]. Dans le cas (fréquent) où Δ est un multiple de l'identité, on a $\mathrm{Sp}^\Delta_{2g}(\mathbf{Z}) = \mathrm{Sp}_{2g}(\mathbf{Z})$.

Démonstration. — Pour qu'une matrice $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ soit dans $\mathrm{Sp}_{2g}(\mathbf{R})$, il faut et il suffit que

$$\begin{aligned} {}^t\!ac &= {}^t\!ca, \quad \text{c'est-à-dire } {}^t\!ac \text{ symétrique}\,; \\ {}^t\!bd &= {}^t\!db, \quad \text{c'est-à-dire } {}^t\!bd \text{ symétrique}\,; \\ {}^t\!ad - {}^t\!cb &= I_g = {}^t\!da - {}^t\!bc. \end{aligned}$$

On en déduit en développant

$$\text{(26)} \qquad {}^t\overline{(c\tau + d)}(a\tau + b) - {}^t\overline{(a\tau + b)}(c\tau + d) = \tau - \overline{\tau} = 2i \operatorname{Im} \tau.$$

Si v est un vecteur complexe tel que $(c\tau + d)v = 0$, cette formule entraîne ${}^t\overline{v}(2i \operatorname{Im} \tau)v = 0$, soit $v = 0$ puisque $\operatorname{Im} \tau$ est non dégénérée. Le membre de droite de la formule (25) est donc bien défini pour tout M dans $\mathrm{Sp}_{2g}(\mathbf{R})$; notons-le τ'. On a aussi

$${}^t\overline{(c\tau + d)}(\tau' - {}^t\tau')(c\tau + d) = \tau - {}^t\tau = 0,$$

de sorte que τ' est symétrique. Enfin, la relation (26) s'écrit aussi

$$\text{(27)} \qquad {}^t\overline{(c\tau + d)}(\tau' - {}^t\overline{\tau'})(c\tau + d) = 2i \operatorname{Im} \tau,$$

de sorte que $\operatorname{Im} \tau'$ est définie positive ; la matrice τ' est donc dans $\mathscr{H}_g$. On vérifie sans problème que l'on définit bien ainsi une action du groupe $\mathrm{Sp}_{2g}(\mathbf{R})$ sur $\mathscr{H}_g$. □

L'ensemble des classes d'isomorphisme de variétés abéliennes polarisées de type Δ est donc en bijection avec le quotient $G_\Delta \backslash \mathscr{H}_g$. Grâce au théorème suivant de H. Cartan ([**C2**]), on peut munir ce quotient d'une structure naturelle d'≪ espace analytique ≫ [(3)].

Rappelons que l'action d'un groupe G sur un espace topologique X est dite *propre et discontinue* si, pour tout compact K de X, l'ensemble $\{g \in G \mid gK \cap K \neq \varnothing\}$ est fini.

***Théorème 1.2* (H. Cartan).** — *Soient X un espace analytique, G un groupe agissant proprement et discontinûment sur X par transformations biholomorphes, et $\rho\colon X \to X/G$*

3. Je renvoie au chap. 5 de [**GR**] pour une définition précise des espaces analytiques. L'idée est assez simple : de la même façon qu'une variété complexe est un espace topologique qui ressemble localement à un ouvert de $\mathbf{C}^n$, un espace analytique ressemble localement à un sous-ensemble d'un ouvert de $\mathbf{C}^n$ défini par des équations holomorphes (on permet ainsi des singularités). Le bon langage pour une définition correcte est celui des faisceaux : on définit un espace analytique comme une paire $(X, \mathscr{O}_X)$, où X est un espace topologique et $\mathscr{O}_X$ le faisceau des fonctions holomorphes sur X (on peut très bien, même si ce n'est pas l'approche habituelle, définir de la même façon une variété différentiable comme un espace topologique muni d'un faisceau de fonctions localement isomorphe à un ouvert de $\mathbf{C}^n$ muni du faisceau des fonctions différentiables sur cet ouvert ; dans notre cas, il faut préciser ce qu'on entend par fonction holomorphe sur un sous-espace analytique, peut-être singulier, de $\mathbf{C}^n$, et cela se fait très bien avec le langage des faisceaux quotients). On dit qu'un point x d'un espace analytique X est *lisse*, ou que X est lisse en x, s'il existe un voisinage de x dans X qui est une variété complexe. Dans le cas contraire, on dit que X est *singulier en x*, ou que x est un point singulier de X. Par exemple, l'espace analytique défini par l'équation $x^2 = y^3$ dans le plan $\mathbf{C}^2$ a un seul point singulier, l'origine.

l'application quotient. Le faisceau d'anneaux $\mathscr{O}$ sur X/G défini pour tout ouvert U de X/G par

$$\mathscr{O}(U) = \{f : U \to \mathbf{C} \mid f \circ \rho \text{ est holomorphe dans } \rho^{-1}(U)\}$$

définit sur X/G une structure d'espace analytique.

Sous l'hypothèse du théorème, les stabilisateurs sont finis. Si X est une variété complexe, X/G est localement quotient d'une variété par un groupe fini ; ce type de singularité est assez bénin et les espaces analytiques de ce type jouissent de beaucoup des propriétés des variétés complexes. En tout état de cause, si l'action de G est de plus libre, X/G est une variété complexe.

Tout ce passe bien dans notre cas, comme le montre la proposition suivante.

Proposition 1.3. — *Tout sous-groupe discret de $\mathrm{Sp}_{2g}(\mathbf{R})$ agit proprement et discontinûment sur $\mathscr{H}_g$ par la formule (25).*

Démonstration. — Soient G sous-groupe discret de $\mathrm{Sp}_{2g}(\mathbf{R})$ et K un compact de $\mathscr{H}_g$. Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ un élément de G tel que $(M \cdot K) \cap K$ soit non vide ; prenons $\tau_M \in (M \cdot K) \cap K$ et posons $\tau'_M = M^{-1} \cdot \tau_M$. Soient H_{τ_M} la forme hermitienne définie positive sur $\mathbf{C}^g$ de matrice $(\operatorname{Im} \tau_M)^{-1}$ et u_M l'automorphisme de $\mathbf{C}^g$ de matrice ${}^t(c\tau_M + d)^{-1}$. L'égalité (27) s'écrit alors $H_{\tau'_M} = H_{\tau_M} \circ u_M$. Comme $\operatorname{Im} \tau_M$ et $\operatorname{Im} \tau'_M$ sont dans un compact de $GL_g(\mathbf{C})$, il en est de même pour u_M. Il s'ensuit que $c\tau_M + d$ est dans un compact, donc aussi sa partie imaginaire $c \operatorname{Im} \tau_M$, donc aussi c, puis d, ainsi que $a\tau'_M + b = \tau_M(c\tau'_M + d)$, donc aussi a et b par le même raisonnement. Il s'ensuit que M est dans un sous-ensemble compact donc fini de G. [4] □

Le théorème de Cartan permet ainsi de munir l'ensemble $G_\Delta \backslash \mathscr{H}_g$ des classes d'isomorphisme de variétés abéliennes polarisées de type Δ d'une structure d'espace analytique de même dimension $g(g+1)/2$ que $\mathscr{H}_g$. On appelle cet espace l'*espace des modules* des variétés abéliennes polarisées de type Δ ; on le note $\mathscr{A}_{g,\Delta}$, ou simplement $\mathscr{A}_g$ lorsque $\Delta = I_g$.

Le stabilisateur $G_{\Delta,\tau}$ d'un point τ de $\mathscr{H}_g$ sous l'action de G_Δ est isomorphe au groupe $\operatorname{Aut}(X_\tau, \omega_\tau)$ des automorphismes u de la variété abélienne X_τ qui conservent la polarisation [5], c'est-à-dire tels que $u^*\omega_\tau = \omega_\tau$. Il contient toujours $-\operatorname{Id}_{X_\tau}$ (*cf.* exerc. VI.9.b), p. 85), mais l'action de $G_\Delta/\{\pm I_{2g}\}$ n'est cependant pas libre : il existe en toute dimension des variétés abéliennes polarisées dont le groupe d'automorphismes contient strictement [6] $\{\pm \operatorname{Id}\}$.

---

4. On pourra préférer la démonstration plus conceptuelle de [**LB**, p. 218] qui utilise le fait que l'action (25) de $\mathrm{Sp}_{2g}(\mathbf{R})$ est transitive à stabilisateurs compacts, ce qui entraîne que la surjection $\mathrm{Sp}_{2g}(\mathbf{R}) \to \mathscr{H}_g$ est propre.

5. Il ressort de l'exercice VI.17, p. 87, que ce groupe est fini. Cela résulte aussi du fait que l'action de G_Δ est propre et discontinue. On obtiendra dans le corollaire 3.5 une borne explicite sur l'ordre de ce groupe.

6. En dimension $g > 1$, si $E_1, \dots, E_g$ sont des courbes elliptiques, le groupe d'automorphismes de la variété abélienne $E_1 \times \cdots \times E_g$ munie de la polarisation produit $(d_1) \times \cdots \times (d_g)$ contient $(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^g$; en dimension 1, *cf.* exerc. II.12, p. 23. Cependant, pour une variété abélienne polarisée (X_τ, ω_τ) ≪ très générale ≫, c'est-à-dire

Au voisinage d'un point correspondant à une variété abélienne polarisée (X_τ, ω_τ), l'espace analytique $\mathscr{A}_{g,\Delta}$ est isomorphe au quotient d'un voisinage U de τ dans $\mathscr{H}_g$ par l'action de $G_{\Delta,\tau}$. Une telle action peut toujours être linéarisée, c'est-à-dire que le quotient $U/G_{\Delta,\tau}$ est isomorphe en tant qu'espace analytique au quotient d'un voisinage de 0 dans l'espace tangent T à $\mathscr{H}_g$ en τ par l'action de $G_{\Delta,\tau}$. Identifions cette action.

***Lemme 1.4.* —** *Le groupe $G_{\Delta,\tau}$ agit à gauche sur l'espace vectoriel T des matrices complexes symétriques d'ordre g par*

$$\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \varepsilon\right) \longmapsto {}^t(c\tau + d)^{-1}\, \varepsilon\, (c\tau + d)^{-1}.$$

Démonstration. — Pour tout ε dans T et tout $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ dans $G_{\Delta,\tau}$, on a

$$\begin{aligned} M \cdot (\tau + \varepsilon) &= (a\tau + a\varepsilon + b)(c\tau + c\varepsilon + d)^{-1} \\ &= (a\tau + b)\big((I_g + c\varepsilon(c\tau + d)^{-1})(c\tau + d)\big)^{-1} + a\varepsilon(c\tau + d)^{-1} + o(\varepsilon) \\ &= \tau'\big(I_g - c\varepsilon(c\tau + d)^{-1}\big) + a\varepsilon(c\tau + d)^{-1} + o(\varepsilon), \end{aligned}$$

où l'on a posé $\tau' = M \cdot \tau$. La différentielle de l'action est donc

$$\varepsilon \longmapsto (a - \tau' c)\varepsilon(c\tau + d)^{-1}.$$

Comme on l'a vu en (24), la matrice dans la base canonique de $\mathbf{C}^g$ de la différentielle de l'automorphisme de X_τ associé à M est $A = {}^t(c\tau + d)^{-1}$; puisque $M^{-1} = \begin{pmatrix} {}^td & -{}^tb \\ -{}^tc & {}^ta \end{pmatrix}$, son inverse est $A^{-1} = {}^t(-{}^tc\tau' + {}^ta)^{-1} = (a - \tau' c)^{-1}$. Le lemme s'en déduit [(7)]. $\square$

Par un théorème de Chevalley [(8)], pour que le quotient $G_\Delta \backslash \mathscr{H}_g$ soit lisse au voisinage de la classe de τ, il faut et il suffit que $G_{\Delta,\tau}$ soit engendré par des éléments qui agissent comme des pseudo-réflexions sur T, c'est-à-dire des applications linéaires qui sont l'identité sur un hyperplan. Gardons nos notations ; comme A est d'ordre fini, elle est diagonalisable

---

pour τ dans un ouvert dense de $\mathscr{H}_g$, on a bien $\mathrm{Aut}(X_\tau, \omega_\tau) = \{\pm \mathrm{Id}\}$ (*cf.* exerc. VII.1, p. 102, pour le cas d'une polarisation principale et exerc. II.12, p. 23, en dimension 1).

7. Le lecteur savant se sera souvenu que les déformations au premier ordre de la variété complexe $X = V/\Gamma$ sont paramétrées par l'espace vectoriel $H^1(X, TX)$, où TX est le fibré tangent à X (théorie de Kodaira). Or TX est trivial, de sorte que

$$H^1(X, TX) \simeq H^1(X, \mathscr{O}_X) \otimes H^0(X, TX) \simeq \overline{V}^* \otimes V.$$

L'application tangente de l'isogénie $\varphi_\omega : X \to \hat{X}$ induit un isomorphisme entre $H^0(X, TX)$ et $H^1(X, \mathscr{O}_X)$. On obtient donc $H^1(X, TX) \simeq V \otimes V$ et l'action d'un automorphisme u de X préservant la polarisation est donnée par $u \cdot (x \otimes y) = \widetilde{u}(x) \otimes \widetilde{u}(y)$, où $\widetilde{u}$ est l'automorphisme linéaire de V associé à u. L'espace vectoriel T paramètre les déformations au premier ordre de la *paire* (X, ω) ; celles-ci correspondent aux tenseurs *symétriques* dans $V \otimes V$ (on trouvera tous les détails—exposés de façon très formelle—dans l'article de G. Welters : *Polarized abelian varieties and the heat equations*, Comp. Math. **49** (1983), p. 181). On retrouve ainsi de manière plus algébrique le résultat du lemme.

8. Voir Bourbaki, Groupes et Algèbres de Lie, Ch. V, § 5, exerc. 7.

de valeurs propres $\lambda_1, \ldots, \lambda_g$, et l'action de M sur T a comme valeurs propres les $\lambda_j\lambda_k$ pour $1 \leq j \leq k \leq g$. La seule possibilité, en dehors de $A = \pm I_g$, pour que l'espace propre de la valeur propre 1 contienne un hyperplan est $g = 2$, $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = -1$. On en déduit le résultat suivant [(9)] qui entraîne que $\mathscr{A}_{g,\Delta}$ n'est jamais une variété complexe (*cf.* note 6, p. 92).

Théorème 1.5. — *Les points lisses de $\mathscr{A}_{g,\Delta}$ correspondent exactement, pour $g \geq 3$, aux variétés abéliennes polarisées dont le groupe d'automorphisme est* $\{\pm \mathrm{Id}\}$.

Ce résultat n'est plus vrai pour $g = 2$: les surfaces abéliennes polarisées produits de deux courbes elliptiques générales correspondent à des points lisses de $\mathscr{A}_{2,(1,p)}$, bien que leur groupe d'automorphismes soit d'ordre 4 [(10)].

Notre but est maintenant de montrer que, tout comme en dimension 1 (*cf.* § II.4, p. 19), l'espace de modules $\mathscr{A}_{g,\Delta}$ peut être muni d'une structure de variéte algébrique [(11)] quasi-projective. Selon les idées d'Igusa, nous allons pour cela construire, pour $4 \mid d_1$, un plongement de $\mathscr{A}_{g,\Delta}$ dans un espace projectif, dont l'adhérence sera une variété projective. Au lieu de fabriquer des fonctions méromorphes sur $\mathscr{H}_g$ invariantes sous l'action de G_Δ, nous allons suivre une tactique similaire à celle utilisée pour construire des morphismes d'un tore complexe vers un espace projectif : utiliser des fonctions sur $\mathscr{H}_g$ qui se transforment « de la même façon » sous l'action de G_Δ. Nous utiliserons pour cela les fonctions thêta de Riemann.

2. Fonctions thêta de Riemann

On a posé, dans l'exemple IV.1.4, p. 39, pour tout τ dans $\mathscr{H}_g$, tout z dans $\mathbf{C}^g$, et tous éléments a et b de $\mathbf{R}^g$,

$$\vartheta\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}(z,\tau) = \sum_{m \in \mathbf{Z}^g} \exp i\pi\big[{}^t(m+a)\tau(m+a) + 2\,{}^t(m+a)(z+b)\big].$$

Pour toutes matrices colonnes entières p et q à g lignes, on a, si $a \in \Delta^{-1}\mathbf{Z}^g$,

$$\vartheta\begin{bmatrix} a \\ 0 \end{bmatrix}(z+\tau p+\Delta q,\tau) = e^{2i\pi(-\frac{1}{2}{}^tp\tau p - {}^tpz)}\vartheta\begin{bmatrix} a \\ 0 \end{bmatrix}(z,\tau), \tag{28}$$

de sorte que la fonction $\vartheta\begin{bmatrix} a \\ 0 \end{bmatrix}(\cdot,\tau)$ est une fonction thêta pour le réseau $\tau\mathbf{Z}^g \oplus \Delta\mathbf{Z}^g$. Plus exactement, c'est une fonction thêta « classique » (au sens de la remarque VI.2.3, p. 69) qui

9. Ce résultat se trouve dans l'article de Y.-S. Tai : *On the Kodaira Dimension of the Moduli Space of Abelian Varieties*, Invent. Math. **68** (1982), p. 439.

10. Voir l'article de K. Hulek, C. Kahn, S. Weintraub et H. Steven : *Singularities of the moduli spaces of certain abelian surfaces*, Comp. Math. **79** (1991), 231–253.

11. On rappelle qu'une variété algébrique projective est un sous-ensemble d'un espace projectif défini par des équations polynomiales homogènes. Une variété algébrique quasi-projective est le complémentaire d'une variété algébrique projective dans une autre ; l'espace affine $\mathbf{C}^n$ en est un exemple puisque c'est le complémentaire de $\mathbf{P}^{n-1}$ dans $\mathbf{P}^n$. Une telle variété est naturellement munie d'une structure d'espace analytique, mais il existe des espaces analytiques compacts qui ne sont pas des variétés quasi-projectives.

satisfait à (18), p. 68, avec

$$\begin{aligned}\omega(\tau p+q,\tau p'+q') &= {}^t\!p'q-{}^t\!q'p\\ H(z,z') &= {}^t\overline{z}(\operatorname{Im}\tau)^{-1}z'\\ (H-B)(\tau p+\Delta q,z) &= -2i\,{}^t\!pz\\ \alpha(\tau p+\Delta q) &= (-1)^{{}^t\!p\Delta q}\\ \ell &= 0,\end{aligned}$$

et qui est donc associée au fibré correspondant $L(H,\alpha)$ sur X_τ, que l'on notera L_τ. On a $\vartheta\begin{bmatrix} a\\ 0\end{bmatrix} = \vartheta\begin{bmatrix} a+m\\ 0\end{bmatrix}$ pour tout m dans $\mathbf{Z}^g$; les

$$\Big(\vartheta\begin{bmatrix} a\\ 0\end{bmatrix}(\cdot,\tau)\Big)_{a\in\Delta^{-1}\mathbf{Z}^g/\mathbf{Z}^g},$$

où $\Delta^{-1}\mathbf{Z}^g/\mathbf{Z}^g$ désigne un ensemble de représentants dans $\Delta^{-1}\mathbf{Z}^g$ de chaque classe du groupe $\Delta^{-1}\mathbf{Z}^g/\mathbf{Z}^g$, forment une base de l'espace des fonctions thêta classiques associées à L_τ (*cf.* la démonstration du théorème VI.2.2, p. 67).

***Remarques 2.1.* —** 1) Le théorème de Lefschetz VI.3.5.b), p. 70, entraîne que si $d_1 \geq 2$, pour tout τ et tout z, il existe a dans $\Delta^{-1}\mathbf{Z}^g$ tel que $\vartheta\begin{bmatrix} a\\ 0\end{bmatrix}(z,\tau)$ ne soit pas nul.

2) Pour tout entier m divisant Δ (c'est-à-dire d_1), on pose $\alpha_m(\tau p+\Delta q) = (-1)^{\frac{1}{m}{}^t\!p\Delta q}$. Le couple $(\frac{1}{m}H,\alpha_m)$ est le type d'un fibré en droites M_τ sur X_τ qui vérifie $M_\tau^{\otimes m} = L_\tau$, et auquel les fonctions thêta $z\mapsto\vartheta\begin{bmatrix} a\\ 0\end{bmatrix}(\frac{1}{m}z,\frac{1}{m}\tau)$, pour $a\in m\Delta^{-1}\mathbf{Z}^g/\mathbf{Z}^g$, sont associées. En particulier, les fonctions

$$z\mapsto\vartheta\begin{bmatrix} a\\ 0\end{bmatrix}(\frac{1}{m}z,\frac{1}{m}\tau)^m,$$

pour $a\in m\Delta^{-1}\mathbf{Z}^g/\mathbf{Z}^g$, sont des fonctions thêta classiques associées à L_τ.

3. Formes modulaires

Nous généralisons la notion de forme modulaire définie au § II.4, p. 19.

***Définition 3.1.* —** Soient G un sous-groupe de $\mathrm{Sp}_{2g}(\mathbf{Q})$ et k un entier ; on appelle forme modulaire de poids k pour G toute fonction holomorphe $f\colon \mathscr{H}_g\to\mathbf{C}$ qui vérifie, pour tout élément $M = \begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}$ de G,

$$f(M\cdot\tau) = \mathrm{dét}(c\tau+d)^k f(\tau),$$

pour tout τ dans $\mathscr{H}_g$.

On admettra aussi des poids rationnels ; il faut alors qu'il existe pour chaque M dans G une racine du déterminant telle que la formule soit valable pour tout τ.

Il s'avère que les fonctions thêta de Riemann permettent de construire beaucoup de formes modulaires.

Théorème 3.2. — *Supposons d_1 divisible par 4. Il existe un sous-groupe G^0_Δ distingué d'indice fini dans G_Δ tel que, pour tout a dans $\Delta^{-1}\mathbf{Z}^g$, la fonction*

$$\tau \mapsto \vartheta\begin{bmatrix} a \\ 0 \end{bmatrix}(0,\tau)$$

soit modulaire de poids $1/2$ pour G^0_Δ.

Ces fonctions sont appelées *thêtaconstantes* (≪ thetanulls ≫ en allemand). Définissons le groupe G^0_Δ intervenant dans l'énoncé du théorème. On définit [12] tout d'abord le sous-groupe

$$G_\Delta(\Delta) = \left\{ \begin{pmatrix} I_g + \Delta a & \Delta b \Delta \\ c & I_g + d\Delta \end{pmatrix} \in \mathrm{Sp}_{2g}(\mathbf{Z}) \mid a,b,c,d \in \mathscr{M}_g(\mathbf{Z}) \right\}$$

de G_Δ. Ensuite,

$$G^0_\Delta = \left\{ \begin{pmatrix} I_g + \Delta a & \Delta b \Delta \\ c & I_g + d\Delta \end{pmatrix} \in \mathrm{Sp}_{2g}(\mathbf{Z}) \mid a,b,c,d \in \mathscr{M}_g(\mathbf{Z}) \text{ et les coefficients diagonaux de } \Delta^{-1} a\,{}^t\!b \Delta^{-1} \text{ et de } c\,{}^t\!d \text{ sont des entiers pairs} \right\};$$

est un sous-groupe [13] de $G_\Delta(\Delta)$.

Plutôt que de faire la démonstration du théorème, qui est très technique [14], il me semble plus instructif d'expliquer la signification ≪ géométrique ≫ de ces groupes. Ils sont discrets, de sorte que le théorème de Cartan 1.2 et la proposition 1.3 permettent de munir les quotients $\mathscr{A}_{g,\Delta}(\Delta) = G_\Delta(\Delta)\backslash\mathscr{H}_g$ et $\mathscr{A}^0_{g,\Delta} = G^0_\Delta\backslash\mathscr{H}_g$ d'une structure d'espace analytique.

---

12. Ce sont les notations de [**LB**, p. 221]. Comme Igusa préfère travailler avec le groupe $\sigma_\Delta^{-1}(G_\Delta)$ au lieu du groupe G_Δ (*cf.* note 2, p. 90), il utilise le sous-groupe

$$\sigma_\Delta^{-1}(G_\Delta(\Delta)) = \left\{ M \in \mathrm{Sp}^\Delta_{2g}(\mathbf{Z}) \mid M - I_{2g} \in \begin{pmatrix} \Delta & 0 \\ 0 & \Delta \end{pmatrix} \cdot \mathscr{M}_{2g}(\mathbf{Z}) \right\},$$

noté $G_{\mathbf{Z}}(\Delta)$ dans [**I**, p. 177] et $\Gamma_\Delta(\Delta)$ dans [**LB**, p. 221].

13. Il est noté $G_\Delta(\Delta)_0$ dans [**LB**, p. 239] tandis que Igusa utilise son image par σ_Δ^{-1}, notée $G_{\mathbf{Z}}(\Delta, 2\Delta)$ dans [**I**, p. 177]. Dans le cas $\Delta = dI_g$, on a

$$\sigma_\Delta^{-1}(G_\Delta(\Delta)) = \{ M \in \mathrm{Sp}_{2g}(\mathbf{Z}) \mid M \equiv I_{2g} \pmod d \};$$

ce groupe est habituellement noté $\Gamma_g(d)$ dans la littérature. *Si d est pair*, on a

$$\sigma_\Delta^{-1}(G^0_\Delta) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_g(d) \mid \text{les coefficients diagonaux de } a\,{}^t\!b \text{ et de } c\,{}^t\!d \text{ sont divisibles par } 2d \right\};$$

ce groupe est habituellement noté $\Gamma_g(d, 2d)$.

14. Le lecteur intéressé pourra la trouver dans [**LB**, Lemma (9.2), p. 239] ou dans [**I**, pp. 173–183].

Nous allons voir que ces espaces paramètrent les classes d'isomorphisme de couples constitués d'une variété abélienne polarisée de type Δ et d'une « structure » supplémentaire que nous allons maintenant identifier.

Notons $K(\Delta)$ le groupe $(\mathbf{Z}^g/\Delta\mathbf{Z}^g)\times(\widehat{\mathbf{Z}^g/\Delta\mathbf{Z}^g})$ (isomorphe à $(\mathbf{Z}/d_1\mathbf{Z}\times\cdots\times\mathbf{Z}/d_g\mathbf{Z})^2$) et munissons-le de la forme symplectique multiplicative e^Δ définie par

$$e^\Delta\big((a,\chi),(a',\chi')\big)=\chi(a')\chi'(a)^{-1}.$$

***Proposition 3.3.** — L'espace $\mathscr{A}_{g,\Delta}(\Delta)$ paramètre les classes d'isomorphisme de paires constituées d'une variété abélienne polarisée (X,ω) de type Δ et d'un isomorphisme* symplectique [15] $\big(K(\omega),e^\omega\big)\simeq\big(K(\Delta),e^\Delta\big)$.

Démonstration. — Les idées sont les mêmes que dans le § 1. Soit τ un élément de $\mathscr{H}_g$; comme on l'a vu au cours de la démonstration du théorème VI.4.2, p. 72, et du lemme VI.4.5, p. 73, le groupe $K(\omega_\tau)$ est alors $(\tau\Delta^{-1}\mathbf{Z}^g\oplus\mathbf{Z}^g)/(\tau\mathbf{Z}^g\oplus\Delta\mathbf{Z}^g)$, ce qui donne un isomorphisme symplectique ψ_τ entre $K(\omega_\tau)$ et $K(\Delta)$.

Si (X,ω) est une variété abélienne polarisée de type Δ et ψ un isomorphisme symplectique entre $K(\omega)$ et $K(\Delta)$, il existe τ dans $\mathscr{H}_g$ tel que (X,ω) soit isomorphe à (X_τ,ω_τ) ; il s'agit de montrer que l'on peut choisir τ de façon que cet isomorphisme envoie ψ sur ψ_τ.

Changeons τ en $\tau'=M\cdot\tau$, avec $M=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$ dans G_Δ ; par (24), l'automorphisme de $\mathbf{C}^g$ correspondant envoie $\tau p+q$ sur $\tau'p'+q'$ avec $\begin{pmatrix}p'\\q'\end{pmatrix}={}^tM^{-1}\begin{pmatrix}p\\q\end{pmatrix}$ pour p,p',q,q' réels. Il envoie donc $\tau'\Delta^{-1}p+q$ sur $\tau\Delta^{-1}p'+q'$ avec $\begin{pmatrix}p'\\q'\end{pmatrix}=\sigma_\Delta^{-1}({}^tM^{-1})\begin{pmatrix}p\\q\end{pmatrix}$. Cela signifie que M agit sur $K(\Delta)$ par la matrice $\sigma_\Delta^{-1}({}^tM^{-1})$. On en déduit d'abord que pour que M préserve ψ_τ, il faut et il suffit qu'elle soit dans $G_\Delta(\Delta)$. Ensuite, pour montrer que l'on peut choisir τ de façon à envoyer ψ sur ψ_τ, il faut montrer que l'application de réduction « modulo Δ » de $\sigma_\Delta^{-1}(G_\Delta)=\mathrm{Sp}_{2g}^\Delta(\mathbf{Z})$ dans le groupe symplectique de $\big(K(\Delta),e^\Delta\big)$ est *surjective*. Je n'ai pas trouvé de référence accessible pour ce résultat : il est démontré dans [**I**, lemme 25, p. 216] lorsque $\Delta=dI_g$ (c'est le cas le plus courant ; il s'agit alors de montrer la surjectivité de l'application $\mathrm{Sp}_{2g}(\mathbf{Z})\to\mathrm{Sp}_{2g}(\mathbf{Z}/d\mathbf{Z})$), tandis que [**LB**] réfère pour le cas général à un manuscrit non publié de H.-J. Brasch de l'Université de Erlangen. □

On montre de façon analogue ([**LB**, p. 238]) que l'espace $\mathscr{A}_{g,\Delta}^0$ paramètre les classes d'isomorphisme de paires constituées d'une variété abélienne polarisée (X,ω) et d'un isomorphisme symplectique entre $\big(K(\omega),e^\omega\big)$ et $\big(K(\Delta),e^\Delta\big)$ qui préserve de plus une certaine forme quadratique.

Il existe des applications holomorphes propres à fibres finies

$$\mathscr{A}_{g,\Delta}^0\longrightarrow\mathscr{A}_{g,\Delta}(\Delta)\longrightarrow\mathscr{A}_{g,\Delta}$$

15. On rappelle que $K(\omega)$ est le noyau du morphisme $\varphi_\omega\colon X\to\hat X$ défini dans le § VI.6, p. 76. Il est muni de la forme symplectique e^ω définie en VI.4.4, p. 73.

dont la composée est le quotient par l'action du groupe fini G_Δ/G^0_Δ. Prendre l'image dans $\mathscr{A}_{g,\Delta}$ d'un élément $\big((X,\omega),\psi\big)$ de $\mathscr{A}_{g,\Delta}(\Delta)$ correspond à « oublier » l'isomorphisme symplectique ψ.

Proposition 3.4. — *Soit d un entier supérieur à 3. Tout automorphisme d'une variété abélienne polarisée (X,ω) qui est l'identité sur le groupe des points de d-torsion de X, est l'identité. En particulier, si $d_1 \geq 3$, les groupes $G_\Delta(\Delta)$ et G^0_Δ opèrent librement sur $\mathscr{H}_g$ et $\mathscr{A}_{g,\Delta}(\Delta)$ et $\mathscr{A}^0_{g,\Delta}$ sont des variétés complexes.*

Démonstration. — Si u est un automorphisme de (X,ω) qui est l'identité sur le groupe des points de d-torsion de X, il existe un endomorphisme v de X tel que $\mathrm{Id}_X - u = dv$. Comme $\mathrm{Aut}(X,\omega)$ est fini (note 5, p. 92), l'automorphisme $\widetilde{u}$ du revêtement universel V de X associé à u est d'ordre fini, donc diagonalisable. Il suffit de montrer que $\widetilde{u}$ ne peut être d'ordre un nombre premier p. Si c'est le cas, une de ses valeurs propres λ est une racine primitive $p^{\text{ième}}$ de 1. Il existe une valeur propre μ de $\widetilde{v}$ telle que

$$d\mu = 1 - \lambda. \tag{29}$$

Mais on a vu en VI.10.3, p. 83, que $\widetilde{v}$ (ou plutôt l'endomorphisme réel $v_{\mathbf{R}}$ associé) est annulé par un polynôme unitaire à coefficients entiers, de sorte que μ est un *entier algébrique*. Si on applique la norme N de l'extension $\mathbf{Q}(\lambda)$ de $\mathbf{Q}$ à l'équation (29), on obtient

$$d^{p-1}N(\mu) = N(1-\lambda) = (1-\lambda)(1-\lambda^2)\cdots(1-\lambda^{p-1}) = p, \tag{30}$$

ce qui est impossible puisque $N(\mu)$ est entier, p est premier et $d \geq 3$. [16] □

Corollaire 3.5. — *Soit (X,ω) une variété abélienne polarisée de dimension g. Le groupe $\mathrm{Aut}(X,\omega)$ est isomorphe à un sous-groupe de $\mathrm{GL}_{2g}(\mathbf{Z}/3\mathbf{Z})$.*

4. Plongement des espaces de modules

Lorsque d_1 est divisible par 4, le théorème 3.2, joint à la remarque 2.1.1), permet de définir une application *holomorphe*

$$\begin{array}{rccc} \psi\colon & \mathscr{A}^0_{g,\Delta} & \longrightarrow & \mathbf{P}^{d_1\cdots d_g - 1} \\ & \tau & \longmapsto & \left(\vartheta\begin{bmatrix} a \\ 0 \end{bmatrix}(0,\tau)\right)_{a\in\Delta^{-1}\mathbf{Z}^g/\mathbf{Z}^g}. \end{array}$$

En fait, cette application est définie dès que $d_1 \geq 2$: même si les thêtaconstantes ne sont plus des formes modulaires, elles se transforment encore toutes « de la même façon » sous l'action du groupe G^0_Δ ([**LB**, Lemma (9.2), p. 239]).

Nous allons expliquer les étapes de la démonstration du résultat suivant. L'idée de paramétrer les variétés abéliennes en utilisant les thêtaconstantes est due à Igusa ; l'application

16. On trouvera une démonstration plus « terre-à-terre » dans [**I**, Lemma 9, p. 185]. On remarquera que notre démonstration s'applique encore aux automorphismes de X qui sont *d'ordre fini*. Elle prouve aussi que le noyau de la restriction $\mathrm{Aut}(X,\omega) \to \mathrm{Aut}(X[2])$ est isomorphe à un produit (fini) de copies de $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$.

de cette idée dans un cadre algébrique sera réalisée par Mumford, dont les résultats seront affinés par la suite par Kempf (*cf.* note 17, p. 101).

Théorème 4.1. — *Supposons d_1 pair plus grand que 4. L'application holomorphe*

$$\psi\colon \mathscr{A}^0_{g,\Delta} \longrightarrow \mathbf{P}^{d_1\cdots d_g-1}$$

définie ci-dessus est un plongement; elle induit un isomorphisme de $\mathscr{A}^0_{g,\Delta}$ sur une variété quasi-projective (cf. note 11, p. 94).

On montre dans l'exercice VII.2 que l'application ψ est constante pour $g=1$ et $\Delta=(3)$. Une hypothèse sur d_1 est donc indispensable.

Démonstration. — Commençons par l'injectivité de l'application tangente à ψ (pour laquelle on n'a besoin que de $d_1\geq 4$). Par I.3.2, p. 8, il suffit de montrer que la matrice

$$\left(\vartheta\begin{bmatrix} a\\ 0\end{bmatrix}(0,\tau)\quad \frac{\partial\vartheta\begin{bmatrix} a\\ 0\end{bmatrix}}{\partial\tau_{jk}}(0,\tau)\right)_{\substack{a\in\Delta^{-1}\mathbf{Z}^g/\mathbf{Z}^g\\ 1\leq j\leq k\leq g}}$$

est de rang $1+g(g+1)/2$ pour tout τ dans $\mathscr{H}_g$. On remarque pour cela que les fonctions thêta satisfont les équations de la chaleur

$$\frac{\partial^2\vartheta\begin{bmatrix} a\\ 0\end{bmatrix}}{\partial z_j\partial z_k}(z,\tau) = 2i\pi(1+\delta_{jk})\,\frac{\partial\vartheta\begin{bmatrix} a\\ 0\end{bmatrix}}{\partial\tau_{jk}}(z,\tau) \tag{31}$$

(la vérification ne pose pas de problème à partir de la formule définissant $\vartheta\begin{bmatrix} a\\ 0\end{bmatrix}$). Supposons qu'il existe des complexes c_0 et c_{jk} (avec $c_{jk}=c_{kj}$) tels que

$$c_0\vartheta\begin{bmatrix} a\\ 0\end{bmatrix}(0,\tau) + \sum_{1\leq j,k\leq g} c_{jk}\,\frac{\partial^2\vartheta\begin{bmatrix} a\\ 0\end{bmatrix}}{\partial z_j\partial z_k}(0,\tau) = 0.$$

Soit X_τ la variété abélienne $\mathbf{C}^g/\tau\mathbf{Z}^g\oplus\Delta\mathbf{Z}^g$, soit $\pi\colon\mathbf{C}^g\to X_\tau$ la surjection canonique et soit L_τ le fibré en droites associé de type Δ sur X_τ (*cf.* § 2). Les fonctions $\vartheta\begin{bmatrix} a\\ 0\end{bmatrix}(\cdot,\tau)$ forment une base de l'espace vectoriel des fonctions thêta classiques associées à L_τ, de sorte que

$$c_0 s(0) + \sum_{1\leq j,k\leq g} c_{jk}\,\frac{\partial^2 s}{\partial z_j\partial z_k}(0) = 0$$

pour toute fonction thêta classique s associée à L_τ.

Soit M_τ un fibré en droites sur X_τ tel que $L_\tau = M_\tau^{d_1}$ (*cf.* par exemple rem. 2.1.2)). On utilise la même astuce que dans la démonstration du théorème de Lefschetz : la fonction thêta classique $\vartheta\colon z \mapsto \vartheta\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}(\frac{1}{d_1}z, \frac{1}{d_1}\tau)$ est associée à M_τ, et la fonction

$$s\colon z \mapsto \vartheta(z+a_1)\vartheta(z+a_2)\cdots\vartheta(z+a_{d_1})$$

est une fonction thêta classique associée à L_τ lorsque $\sum a_j = 0$ (*cf.* VI.3.4, p. 70). On choisit a_1 et a_2 quelconques dans le support du diviseur D de ϑ, puis $a_3, \dots, a_{d_1}$ en dehors de ce même diviseur, avec de plus $\sum a_j = 0$ (c'est possible car $d_1 \geq 4$). On a alors

$$\vartheta(a_3)\cdots\vartheta(a_{d_1}) \sum_{1\leq j,k\leq g} c_{jk}\, \frac{\partial\vartheta}{\partial z_j}(a_1)\frac{\partial\vartheta}{\partial z_k}(a_2) = 0,$$

de sorte que la restriction de la forme quadratique de matrice (c_{jk}) au sous-espace vectoriel engendré par les vecteurs $\big(\dfrac{\partial\vartheta}{\partial z_j}(a)\big)_{1\leq j\leq g}$, pour a décrivant le support de D, est nulle. Le lemme suivant entraîne que les c_{jk} sont tous nuls, donc aussi c_0 ; ceci montre l'injectivité de l'application tangente à ψ.

***Lemme 4.2.* —** *L'image de l'application*

$$\begin{array}{ccc} \pi^{-1}(\mathrm{Supp}(D)) & \longrightarrow & \mathbf{C}^g \\ x & \longmapsto & \Big(\dfrac{\partial\vartheta}{\partial z_1}(x), \dots, \dfrac{\partial\vartheta}{\partial z_g}(x)\Big) \end{array}$$

engendre l'espace vectoriel $\mathbf{C}^g$.

Démonstration. — Le point essentiel de la démonstration est que le diviseur π^*D (*cf.* note 2, p. 46) est *réduit*. Cela peut se voir soit en suivant [**I**, Lemma 10, p. 186, Lemma 18, p. 129, et p. 107], soit en se ramenant au corollaire VI.9.4, p. 82, qui dit qu'un diviseur thêta d'une variété abélienne principalement polarisée est réduit.

Considérons pour cela la variété abélienne $Y = \mathbf{C}^g/\frac{1}{d_1}\tau\mathbf{Z}^g \oplus \mathbf{Z}^g$ et l'isogénie $u\colon X \to Y$ donnée par $z \mapsto z/d_1$. La variété abélienne Y est munie d'une polarisation principale dont un diviseur thêta Θ correspond à celui de la fonction thêta $\vartheta\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}(\cdot, \frac{1}{d_1}\tau)$, donc a pour image inverse D par u. Or la remarque qui suit la démonstration de la proposition IV.2.5, p. 42, montre qu'on peut vérifier *localement* qu'un diviseur est réduit ; comme u et π sont des isomorphismes locaux, et que Θ est réduit, il en est de même de $\pi^*D = \pi^*(u^*\Theta)$.

Cela entraîne que si $\sum_{j=1}^g c_j \frac{\partial\vartheta}{\partial z_j}$ s'annule sur $\pi^{-1}(\mathrm{Supp}(D))$, lieu des zéros de ϑ, la fonction

$$\Big(\sum_{j=1}^{g} c_j \frac{\partial\vartheta}{\partial z_j}\Big)/\vartheta$$

est holomorphe. On conclut comme dans la démonstration du théorème de Lefschetz VI.3.5, p. 70, que les c_j sont tous nuls. □

Passons à l'injectivité de ψ. Voici les étapes principales : on sait depuis Riemann qu'il existe un ensemble J de relations du type

$$\sum_{a,a',n,n'\in\Delta^{-1}\mathbf{Z}^g/\mathbf{Z}^g} q^{(j)}_{a,a',n,n'}\,\vartheta\begin{bmatrix}a\\0\end{bmatrix}(0,\tau)\vartheta\begin{bmatrix}a'\\0\end{bmatrix}(0,\tau)\vartheta\begin{bmatrix}n\\0\end{bmatrix}(z,\tau)\vartheta\begin{bmatrix}n'\\0\end{bmatrix}(z,\tau)=0, \tag{32}$$

pour j dans J et pour tout z et tout τ, où les $q^{(j)}_{a,a',n,n'}$ sont des constantes (entières !) indépendantes de z et τ. Cela signifie que l'image du morphisme

$$\varphi_{L_\tau}\colon X_\tau \longrightarrow \mathbf{P}^{d_1\cdots d_g-1}$$

est contenue dans l'intersection des quadriques

$$Q^{(j)}_\tau(X_n)_{n\in\Delta^{-1}\mathbf{Z}^g/\mathbf{Z}^g}=\sum_{a,a',n,n'\in\Delta^{-1}\mathbf{Z}^g/\mathbf{Z}^g} q^{(j)}_{a,a',n,n'}\,\vartheta\begin{bmatrix}a\\0\end{bmatrix}(0,\tau)\vartheta\begin{bmatrix}a'\\0\end{bmatrix}(0,\tau)\,X_nX_{n'}$$

pour j décrivant J. Le point clé [17], dû à Mumford et Kempf, est que *lorsque d_1 est pair plus grand que 4, la variété $\varphi_{L_\tau}(X_\tau)$ est l'intersection des quadriques $Q^{(j)}_\tau$* pour j décrivant J.

Si $\psi(\tau)=\psi(\tau')$, il existe une constante c non nulle telle que

$$\vartheta\begin{bmatrix}a\\0\end{bmatrix}(0,\tau')=c\,\vartheta\begin{bmatrix}a\\0\end{bmatrix}(0,\tau)$$

pour tout $a\in\Delta^{-1}\mathbf{Z}^g/\mathbf{Z}^g$. Cela entraîne $Q^{(j)}_{\tau'}=c^2Q^{(j)}_\tau$ pour tout j dans J, d'où, par le résultat de Mumford, $\varphi_{L_{\tau'}}(X_{\tau'})=\varphi_{L_\tau}(X_\tau)$. Par le théorème de Lefschetz, les morphismes $\varphi_{L_{\tau'}}$ et φ_{L_τ} sont des plongements, et par hypothèse, $\varphi_{L_{\tau'}}(0)=\varphi_{L_\tau}(0)$. Il existe donc un isomorphisme $u\colon X_{\tau'}\to X_\tau$, vérifiant $u(0)=0$ et $\varphi_{L_\tau}\circ u=\varphi_{L_{\tau'}}$. En particulier

$$u^*L_\tau\simeq u^*\varphi^*_{L_\tau}\mathscr{O}_{\mathbf{P}}(1)=\varphi^*_{L_{\tau'}}\mathscr{O}_{\mathbf{P}}(1)\simeq L_{\tau'},$$

de sorte que u est un isomorphisme de variétés abéliennes polarisées. On déduit du § 1 qu'il existe une matrice M dans G_Δ telle que $\tau'=M\cdot\tau$. En travaillant un peu plus, on obtient $M\in G^0_\Delta$ (*cf.* [**I**, p. 171]).

17. Les relations de Riemann ≪ classiques ≫ sont le cas particulier de [**I**, th. 1, p. 137] décrit p. 141 de *loc.cit.*. Elles entraînent les relations

$$\vartheta[m](z,\tau)\vartheta[m+a](z,\tau)\vartheta[m+b](0,\tau)\vartheta[m-a-b](0,\tau)=$$
$$2^{-g}\sum_{n\in\frac12\mathbf{Z}^{2g}/\mathbf{Z}^{2g}}\vartheta[n](z,\tau)\vartheta[n+a](z,\tau)\vartheta[n+b](0,\tau)\vartheta[n-a-b](0,\tau)$$

pour tous m,a,b dans $\frac12\mathbf{Z}^{2g}/\mathbf{Z}^{2g}$ et tout z dans $\mathbf{C}^g$. En utilisant l'exercice VII.2.a), on obtient les relations (32) dans le cas particulier $d_1=\cdots=d_g=4$. Dans le cas général, ces relations sont le fruit de manipulations assez pénibles que le lecteur intéressé pourra suivre dans [**M2**, pp. 320–333], [**I**, pp. 136–152] ou [**LB**, pp. 200–202] (la difficulté principale étant de maîtriser les notations, et elles sont partout différentes).

Que $\varphi_{L_\tau}(X_\tau)$ soit intersection de quadriques dès que $d_1\geq 4$ est dû à Mumford ([**M3**, th. 10, p. 80]) ; Kempf démontre ensuite dans *Linear systems on abelian varieties*, Am. J. of Math. **111** (1989), th. 19, p. 84, que les relations de Riemann engendrent l'espace vectoriel de ces quadriques pour d_1 pair plus grand que 4 (*cf.* aussi [**LB**, (5.2), p. 202]).

Ceci prouve que ψ est un plongement. Igusa démontre que l'adhérence (pour la topologie usuelle) de $\psi(\mathscr{A}^0_{g,\Delta})$ dans $\mathbf{P}^{d_1\cdots d_g-1}$ est une variété projective ([**I**, th. 8, p. 220]), et que le complémentaire de $\psi(\mathscr{A}^0_{g,\Delta})$ dans son adhérence est aussi une variété projective (*loc.cit.*, Remark, p. 224). $\square$

À l'aide d'un théorème de Grauert et Remmert (*cf.* [**LB**, th. (A.5), p. 410]), on peut déduire du théorème que tous les espaces $\mathscr{A}_{g,\Delta}$ sont naturellement munis d'une structure de variété algébrique quasi-projective. On pourra préférer l'approche plus algébrique de Mumford ([**M2**]), qui a l'avantage d'être valable sur d'autres corps que celui des complexes, et qui fournit directement et plus naturellement la quasi-projectivité de tous ces espaces de modules.

Exercices

VII.1. — Soient τ un élément du demi-espace de Siegel $\mathscr{H}_g$ et $X_\tau = \mathbf{C}^g/\tau\mathbf{Z}^g \oplus \mathbf{Z}^g$ la variété abélienne principalement polarisée correspondante.

a) Montrer qu'à tout endomorphisme u de X_τ on peut associer des matrices a, b, c, d carrées d'ordre g à coefficients entiers vérifiant $\tau(c\tau + d) = a\tau + b$.

b) En déduire qu'il existe une famille dénombrable $(Z_n)_{n\in\mathbf{Z}}$ d'hypersurfaces algébriques dans l'espace des matrices complexes carrées symétriques d'ordre g telle que, pour tout τ dans $\mathscr{H}_g \smallsetminus \bigcup_{n\in\mathbf{Z}} Z_n$, l'anneau des endomorphismes de X_τ soit isomorphe à $\mathbf{Z}$.

VII.2. — a) Soit r un entier ; montrer que l'on passe des r^{2g} fonctions

$$\vartheta\begin{bmatrix} a \\ 0 \end{bmatrix}(rz,\tau), \quad a \in \frac{1}{r^2}\mathbf{Z}^g/\mathbf{Z}^g$$

aux r^{2g} fonctions

$$\vartheta\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}(r^2z, r^2\tau), \quad a, b \in \frac{1}{r}\mathbf{Z}^g/\mathbf{Z}^g$$

par une matrice inversible à coefficients indépendants de z et τ (*cf.* [**I**, p. 171]).

b) On suppose $g = 1$ et $\Delta = (4)$. Montrer que l'image du morphisme $\varphi_{\omega_\tau} : X_\tau \to \mathbf{P}^3$ est intersection de deux quadriques, et que l'image du morphisme $\psi\colon \mathscr{A}^0_{1,(4)} \to \mathbf{P}^3$ est une courbe plane d'équation homogène $x^4 + y^4 = z^4$ (*Indication :* utiliser l'exercice II.6, p. 22).

c) On suppose $g = 1$ et $\Delta = (3)$. Montrer que l'image du morphisme $\varphi_{\omega_\tau} : X_\tau \to \mathbf{P}^2$ est une cubique plane d'équation homogène $x^3 + y^3 + z^3 - 3\alpha xyz = 0$, où α est un nombre complexe [18] tel que $\alpha^3 \neq 1$, et que le morphisme $\psi\colon \mathscr{A}^0_{1,(3)} \to \mathbf{P}^2$ est constant.

VII.3. — Théorie d'Andreotti et Mayer. Le but de cet exercice est de montrer que les diviseurs thêta d'une variété abélienne principalement polarisée générale (c'est-à-dire dans le complémentaire d'une hypersurface analytique de $\mathscr{A}_g$) sont lisses. Il résulte de principes généraux de géométrie analytique que l'ensemble des variétés abéliennes principalement polarisées dont les diviseurs thêta sont singuliers est un fermé analytique de $\mathscr{A}_g$ dont il faut montrer que ce n'est pas tout $\mathscr{A}_g$. Il suffit donc de montrer que cet ensemble est d'intérieur vide ; nous raisonnons par l'absurde, et supposons qu'il existe un ouvert non vide U de $\mathscr{H}_g$ tel que les diviseurs thêta de X_τ soient singuliers

18. On peut exprimer α à l'aide de thêtaconstantes ; *cf.* H. Lange, *Cubic theta relations*, J. reine angew. Math. **407** (1990), 167–177.

pour tout τ dans U. De nouveau à cause de résultats généraux de géométrie analytique, il existe, quitte à rétrécir U, une application holomorphe $z\colon U \to \mathbf{C}^g$ telle que

$$\vartheta(z(\tau), \tau) = \frac{\partial \vartheta}{\partial z_1}(z(\tau), \tau) = \cdots = \frac{\partial \vartheta}{\partial z_g}(z(\tau), \tau) = 0$$

pour tout τ dans U (ce qui signifie que le point de X_τ correspondant à $z(\tau)$ est singulier sur le diviseur thêta défini par $\vartheta(\cdot, \tau) = 0$).

Montrer à l'aide des équations de la chaleur (31) que les dérivées partielles de tous ordres de $\vartheta(\cdot, \tau)$ sont nulles en $z(\tau)$ et en déduire une contradiction.

CHAPITRE VIII

SOUS-VARIÉTÉS D'UN TORE COMPLEXE

Nous étudions dans ce chapitre les sous-variétés des tores complexes. Comme il n'est pas question de se restreindre aux sous-variétés *lisses*, nous appellerons à partir de maintenant *sous-variété* d'une variété complexe X tout sous-espace analytique (au sens de la note 3, p. 91) *fermé* de X, c'est-à-dire tout sous-ensemble de X défini localement sur X par l'annulation de fonctions holomorphes [(1)]. Nous dirons *sous-variété lisse* dans le cas où l'on a affaire à une variété complexe.

L'ensemble des points singuliers d'un espace analytique A est un fermé analytique propre de A ([**F**, pp. 96 et 97]) ; on notera A_{lisse} son complémentaire. Un espace analytique est dit *irréductible* s'il n'est pas réunion de deux sous-variétés propres (c'est équivalent à dire que A_{lisse} est *connexe*).

Nous aurons aussi besoin de parler de *dimension* d'un espace analytique A. Le plus rapide est de définir la dimension en un point a de A comme la dimension de Krull de l'anneau local $\mathscr{O}_{A,a}$ des germes de fonctions holomorphes en a ([**F**, 3.1, p. 131] [(2)]). Ce n'est aussi pas très parlant ; de façon plus concrète, la dimension d'un espace analytique irréductible A est celle de la variété complexe connexe A_{lisse}. Nous admettrons sans démonstration les résultats standard sur les dimensions des fibres d'une application holomorphe [(3)]. Une *hypersurface* est une sous-variété (partout) de codimension 1.

Une dernière précision terminologique : lorsque qu'une propriété $\mathscr{P}(x)$ dépendant d'un point x d'une variété X est vraie pour tout x dans le complémentaire d'un sous-espace analytique d'intérieur vide de X, il est d'usage de dire que $\mathscr{P}(x)$ est vraie « pour x général dans X ».

1. Pour les lecteurs savants, précisons tout de suite que nous ne considérerons que des espaces analytiques *réduits*, c'est-à-dire tels que le faisceau des fonctions holomorphes ne contienne aucun élément nilpotent non nul.

2. Dans le cas algébrique, la référence classique est [**H**, chap. I, § 1 et 2]. Voir aussi la note 2, p. 78.

3. On pourra par exemple consulter le chapitre 3 de [**F**] pour le cas analytique et le chapitre 4 de [**P**] pour le cas algébrique.

Soient A et B des sous-ensembles d'un tore complexe X. On notera $A \pm B$ la partie $\{a \pm b \mid a \in A,\ b \in B\}$ de X.

1. Sous-tore engendré par une partie

Soient X un tore complexe et A un sous-ensemble connexe de X. On appelle sous-tore de X engendré par A l'intersection des sous-tores de X dont un translaté contient A ; on le note $\langle A\rangle$. C'est aussi l'intersection des sous-tores de X contenant $A - A$. En général, on pose la définition suivante.

***Définition 1.1.* —** Soit A une partie d'un tore complexe X. On appelle *sous-tore de X engendré par A* l'intersection des sous-tores de X contenant la composante connexe de 0 dans $A - A$. On le note $\langle A\rangle$. On dit que A *engendre* X si $\langle A\rangle = X$.

On a $\langle A\rangle = \langle \overline{A}\rangle$ et, pour tous sous-ensembles A et B de X,

$$\langle A \cup B\rangle = \langle A\rangle + \langle B\rangle.$$

Soit A une sous-variété irréductible de X ; les

$$\langle A\rangle_m = \overbrace{(A - A) + \cdots + (A - A)}^{m \text{ fois}}$$

forment une chaîne croissante de sous-variétés irréductibles de X. Il existe donc un entier m_0 tel que $\langle A\rangle_m = \langle A\rangle_{m_0}$ pour tout $m \geq m_0$, de sorte que $\langle A\rangle = \langle A\rangle_{m_0}$.

Si A n'est que connexe et que $A_1, \ldots, A_r$ sont ses composantes irréductibles, on a

$$\langle A\rangle = \langle A_1\rangle + \cdots + \langle A_r\rangle,$$

d'où l'on déduit encore $\langle A\rangle = \langle A\rangle_m$ pour tout m assez grand.

***Lemme 1.2.* —** *Soient X un tore complexe, A une sous-variété de X et U un ouvert dense de A_{lisse}. Le sous-espace vectoriel* [(4)] *$T_0\langle A\rangle$ de T_0X est engendré par les $T_0(A - a)$ pour $a \in U$.*

Démonstration. — On peut supposer A connexe. Soit m un entier tel que l'application $\sigma\colon A^{2m} \to \langle A\rangle$ définie par

$$\sigma(a_1, \ldots, a_{2m}) = a_1 - a_2 + \cdots + a_{2m-1} - a_{2m}$$

soit surjective. Dans cette situation, l'application tangente à σ en un point général de A^{2m} est surjective [(5)] ; elle l'est donc en un point $(a_1, \ldots, a_{2m})$ de U^{2m}. Or cette application tangente

4. Pour toute variété complexe X et tout point x de X, on désigne par T_xX l'espace tangent à X en x.

Pour les lecteurs qui connaissent la notion d'espace tangent de Zariski ([**GR**, def. 10, p. 152]), le lemme entraîne facilement l'égalité $T_0\langle A\rangle = T_0(A - A)$.

5. Cette propriété de ≪ lissité générale ≫ est l'analogue du théorème de Sard, qui dit que l'ensemble des valeurs critiques d'une fonction différentiable est de mesure nulle. Sa version algébrique se trouve dans [**H**, Lemma 10.5, p. 271], et la version analytique dans [**GR**, prop. 9, p. 159].

s'identifie à l'application

$$\begin{array}{ccc} T_0(A-a_1)\oplus\cdots\oplus T_0(A-a_{2m}) & \longrightarrow & T_0\langle A\rangle \\ (t_1,\dots,t_{2m}) & \longmapsto & t_1-t_2+\cdots+t_{2m-1}-t_{2m} \end{array}$$

ce qui montre le lemme. □

Lemme 1.3. — *Soient X un tore complexe et A une sous-variété irréductible de X. Soit K un sous-tore de X tel que, pour tout a général (lisse) dans A, on ait $T_0K \subset T_0(A-a)$. On a $A+K=A$.*

Démonstration. — Notons $p\colon X\to X/K$ la surjection canonique et considérons la surjection $A\to p(A)$ induite par p. Son application tangente est surjective en un point général a de A (*cf.* note 5, p. 106), ce qui entraîne

$$\begin{aligned}\dim p(A) &= \dim A - \dim\bigl(T_aA\cap \operatorname{Ker} T_ap\bigr)\\ &= \dim A - \dim\bigl(T_aA\cap T_a(K+a)\bigr)\\ &= \dim A - \dim K,\end{aligned}$$

ce qui prouve le lemme. □

Lemme 1.4. — *Soient X un tore complexe, A un espace analytique compact et G une sous-variété irréductible de $X\times A$. On note $u\colon G\to A$ la seconde projection. Il existe un sous-tore K de X tel que l'on ait $\langle u^{-1}(a)\rangle = K$ pour a général dans $u(G)$.*

Démonstration. — Soit a_0 un point de $u(G)$ tel que la dimension du tore $K=\langle u^{-1}(a_0)\rangle$ soit *minimale*. Notons $p\colon X\to X/K$ la surjection canonique, G' l'image de G par la surjection $(p,\mathrm{Id})\colon X\times A\to (X/K)\times A$ et $u'\colon G'\to u(G)$ l'application induite par la seconde projection. La fibre $u'^{-1}(a_0)$ est finie ; il s'ensuit que, pour a général dans $u(G)$, la fibre $u'^{-1}(a)$ est finie, de sorte que $\langle u^{-1}(a)\rangle$ est contenu dans K. Vu le choix de a_0, on a égalité. □

2. Intersection de sous-variétés

Soient X un tore complexe et A et B des sous-variétés irréductibles de X. Nous voulons étudier l'intersection de A avec un translaté général de B.

Proposition 2.1. — *Soient X un tore complexe et A et B des sous-variétés irréductibles de X. Pour x général dans X,*

— *soit $A\cap(B+x)$ est vide ;*

— *soit $A\cap(B+x)$ est de dimension* $\dim A+\dim B-\dim X$.

Démonstration. — Considérons l'application $\delta\colon A\times B\to X$ qui envoie (a,b) sur $a-b$, de sorte que la projection sur A induit un isomorphisme de $\delta^{-1}(x)$ sur $A\cap(B+x)$. L'image de δ est une sous-variété de X. Si δ n'est pas surjective, on est donc dans le premier cas ; si elle est surjective, une fibre générale est de dimension $\dim(A\times B)-\dim X$. □

Notre but est maintenant de dégager une condition nécessaire et suffisante pour que l'on soit dans le premier cas du lemme. On notera que pour que A ne rencontre pas un translaté général de B, il faut et il suffit que l'on ait $A - B \neq X$.

Théorème 2.2. — *Soient X un tore complexe et A et B des sous-variétés irréductibles de X. Soient K le plus grand sous-tore de X tel que $A+B+K = A+B$ et $p\colon X \to X/K$ la surjection canonique. On a*

$$\dim\bigl(p(A)+p(B)\bigr) = \dim p(A) + \dim p(B).$$

Démonstration. — On peut, en se plaçant dans X/K, supposer que $A+B$ n'est invariant par translation par aucun sous-tore non nul de X. Pour tout x dans $A+B$, posons $F_x = A \cap (x - B)$. Notons G l'image de $A \times B$ par l'automorphisme

$$\begin{array}{ccc} X \times X & \longrightarrow & X \times X \\ (x,y) & \longmapsto & (x, x+y) \end{array}$$

et $u\colon G \to A+B$ l'application induite par la seconde projection, de sorte que $u^{-1}(x) = F_x \times \{x\}$. Le lemme entraîne qu'il existe un sous-tore K' de X tel que $\langle F_x \rangle = K'$ pour x général dans $A+B$.

Soit x un point général (lisse) de $A+B$. Pour tout a (lisse) dans F_x, on a $F_x - a \subset A+B-x$, donc $T_0(F_x - a) \subset T_0(A+B-x)$. Le lemme 1.2 entraîne

$$T_0 K' = T_0\langle F_x \rangle \subset T_0(A+B-x),$$

d'où $A+B = A+B+K'$ par le lemme 1.3. L'hypothèse faite entraîne que K' est nul, donc que les fibres générales de u sont finies. Il s'ensuit que $A \times B$ et $A+B$ ont même dimension, ce qui prouve le théorème. □

Corollaire 2.3. — *Soient X un tore complexe et A et B des sous-variétés irréductibles de X. Pour que A ne rencontre pas un translaté général de B, il faut et il suffit qu'il existe un tore quotient Y de X tel que*

$$\dim p(A) + \dim p(B) < \dim Y,$$

où $p\colon X \to Y$ est la surjection canonique.

En particulier, deux sous-variétés d'un tore *simple* dont la somme des dimensions excède celle du tore se rencontrent toujours.

Démonstration. — S'il existe un tore quotient Y de X comme dans l'énoncé du théorème, la proposition 2.1 montre que pour x général dans X, la variété $p(A)$ ne rencontre pas $p(B)+p(x)$, de sorte que A ne rencontre pas $B+x$.

Inversement, si A ne rencontre pas un translaté général de B, on a $A+(-B) \neq X$ et, avec les notations du théorème 2.2, le tore quotient $Y = X/K$ répond à la question. □

***Définition 2.4.* —** On dit qu'une sous-variété irréductible A d'un tore complexe X est *non dégénérée* [6] si, pour tout sous-tore K de X, on a

$$\dim(A + K) = \min(\dim A + \dim K, \dim X).$$

On peut dire de façon équivalente que A est non dégénérée si pour tout tore quotient Y de X, on a $\dim p(A) = \min(\dim A, \dim Y)$, où $p\colon X \to Y$ est la surjection canonique.

***Exemples 2.5.* —** 1) Pour qu'une courbe irréductible dans un tore soit non dégénérée, il faut et il suffit qu'elle l'engendre. Pour qu'une hypersurface irréductible D d'un tore soit non dégénérée, il faut et il suffit que le fibré en droites associé $\mathscr{O}_X(D)$ soit ample (*cf.* VI.3.6, p. 71).

2) Toute sous-variété irréductible d'un tore *simple* est non dégénérée.

***Corollaire 2.6.* —** *Soient X un tore complexe et A et B des sous-variétés irréductibles de X.*

a) Si A est non dégénérée, on a

$$\dim(A + B) = \min(\dim A + \dim B, \dim X).$$

b) Si A et B sont non dégénérées, $A + B$ l'est aussi.

Démonstration. — On suppose donc A non dégénérée. Avec les notations du théorème 2.2, on a

$$\begin{aligned}
\dim(A + B) &= \dim\bigl(p(A) + p(B)\bigr) + \dim K\\
&= \dim p(A) + \dim p(B) + \dim K\\
&= \min(\dim A, \dim(X/K)) + \dim p(B) + \dim K\\
&\geq \min(\dim A, \dim(X/K)) + \max(\dim B, \dim K)\\
&\geq \min(\dim A + \dim B, \dim(X/K) + \dim K),
\end{aligned}$$

ce qui montre a).

Si B est aussi non dégénérée, on a pour tout sous-tore K de X, en utilisant a),

$$\begin{aligned}
\dim(A + B + K) &= \min(\dim A + \dim(B + K), \dim X)\\
&= \min(\dim A + \dim B + \dim K, \dim A + \dim X, \dim X)\\
&\geq \min(\dim(A + B) + \dim K, \dim X),
\end{aligned}$$

ce qui montre b). $\square$

***Corollaire 2.7.* —** *Soient X une* variété abélienne *et A une sous-variété irréductible de X. Pour que A soit non dégénérée, il faut et il suffit que A rencontre toute sous-variété de X de dimension $\geq \dim X - \dim A$.*

6. Cette notion a été introduite par Z. Ran dans *On subvarieties of abelian varieties*, Invent. Math. **62** (1981), 459–479, où il utilise la terminologie ≪ geometrically non-degenerate ≫.

Démonstration. — Si A est non dégénérée et que B est une sous-variété irréductible de X de dimension $\geq \dim X - \dim A$, on a $A - B = X$ par le corollaire précédent donc $A \cap B \neq \varnothing$.

Supposons inversement que A soit dégénérée ; soit Y un tore quotient de X tel que $p(A) \neq Y$, où $p\colon X \to Y$ est la surjection canonique, et $d = \dim p(A) < \dim A$. L'intersection B de $d+1$ hypersurfaces très amples générales de la variété abélienne Y est une sous-variété de Y de codimension $d+1$ qui ne rencontre pas $p(A)$. On a donc $A \cap p^{-1}(B) = \varnothing$ et

$$\dim p^{-1}(B) = \dim B + \dim X - \dim Y = \dim X - d - 1 \geq \dim X - \dim A,$$

ce qui montre le corollaire. □

Corollaire 2.8. — *Soient X un tore complexe et A une sous-variété irréductible de X. On suppose que pour tout tore quotient Y de X, on a $\dim p(A) \geq \frac{1}{2} \dim Y$, où $p\colon X \to Y$ est la surjection canonique. Le morphisme $\pi_1(A) \to \pi_1(X)$ induit par l'inclusion de A dans X est surjectif*[7].

Les hypothèses du corollaire sont vérifiées lorsque A est une sous-variété irréductible non dégénérée de X de dimension $\geq \frac{1}{2} \dim X$.

Démonstration. — Comme $\pi_1(X)$ est un groupe abélien libre, il suffit de montrer que l'application composée $\pi_1(A) \to \pi_1(X) \to \pi_1(X)/n\pi_1(X)$ est surjective pour tout entier $n > 0$, c'est-à-dire que l'image inverse de A par l'isogénie $\mathbf{n}\colon X \to X$ est connexe[8]. Si A_1 et A_2 en sont des composantes irréductibles, on a, pour tout tore quotient Y de X,

$$\dim p(A_1) + \dim p(A_2) = 2 \dim p(A) \geq \dim Y,$$

où $p\colon X \to Y$ est la surjection canonique. Le corollaire 2.3 entraîne que A_1 et A_2 se rencontrent. □

3. Théorème de connexité, groupe fondamental des sous-variétés

Il est maintenant naturel de s'intéresser à la *connexité* de l'intersection de deux sous-variétés d'un tore complexe. Le théorème principal de cette section permet de répondre à ce genre de question, mais aussi de calculer le groupe fondamental de certaines sous-variétés d'un tore complexe. Nous aurons hélas besoin d'un bagage technique un peu plus important, que nous expliquerons au fur et à mesure des besoins.

Nous allons démontrer un énoncé très général, mais malheureusement un peu technique. Pour alléger l'écriture, nous dirons qu'un couple (A, B) de sous-variétés irréductibles d'un tore complexe X est *non dégénéré* si, pour tout tore quotient Y de X, on a

- $\dim p(A) + \dim B > \dim X$ si $p(A) \neq Y$,

7. On montre dans l'exercice VIII.3 que cette condition est nécessaire et suffisante.

8. Il résulte de la définition du groupe fondamental que pour tout sous-espace connexe A d'un espace connexe X, et tout revêtement connexe $\pi\colon \widetilde{X} \to X$ correspondant à un quotient G de $\pi_1(X)$, l'image inverse $\pi^{-1}(A)$ est connexe si et seulement si la composée $\pi_1(A) \to \pi_1(X) \to G$ est surjective.

- $\dim A + \dim p(B) > \dim X$ si $p(B) \neq Y$,

où $p\colon X \to Y$ est la surjection canonique. Ces deux propriétés entraînent l'inégalité

$$\dim p(A) + \dim p(B) > \dim Y$$

si $Y \neq 0$.

Le couple (A, B) est non dégénéré dans chacun des deux cas suivants :

— A et B sont non dégénérées et $\dim A + \dim B > \dim X$;

— $A = X$ et B engendre X.

Théorème 3.1. **—** *Soient A et B des variétés compactes irréductibles normales* [9]*, X un tore complexe et $u\colon A \to X$ et $v\colon B \to X$ des applications holomorphes. On suppose que le couple $\big(u(A), v(B)\big)$ est non dégénéré. Il existe une isogénie $w\colon \widetilde{X} \to X$ et des factorisations $u\colon A \xrightarrow{\widetilde{u}} \widetilde{X} \xrightarrow{w} X$ et $v\colon B \xrightarrow{\widetilde{v}} \widetilde{X} \xrightarrow{w} X$ telles que*

— *le produit fibré $A \times_{\widetilde{X}} B$ est connexe ;*

— *la suite*

$$\pi_1(A \times_{\widetilde{X}} B) \longrightarrow \pi_1(A) \times \pi_1(B) \xrightarrow{\pi_1(\widetilde{u}) - \pi_1(\widetilde{v})} \pi_1(\widetilde{X}) \longrightarrow 0 \tag{33}$$

est exacte.

Démonstration. — L'application $\delta\colon A \times B \to X$ définie par $\delta(a, b) = u(a) - v(b)$ est surjective par le corollaire 2.6. Nous noterons

$$A' = u(A),\ \ B' = v(B),\ \ h = (u, v)\colon A \times B \longrightarrow A' \times B'\ ,\ \ \delta'\colon A' \times B' \longrightarrow X,$$

de sorte que $\delta = \delta' \circ h$. Nous adoptons ces notations dans le lemme suivant.

Lemme 3.2. **—** *Soient A et B des variétés compactes irréductibles normales, X un tore complexe et $u\colon A \to X$ et $v\colon B \to X$ des applications holomorphes telles que* $\dim A' + \dim B' > \dim X$*. On suppose qu'il existe une hypersurface D de X et une hypersurface irréductible E de $A \times B$ vérifiant $\delta(E) = D$ et telle que l'application tangente de δ ne soit pas surjective en un point général de E. Alors*

— *soit il existe un sous-tore non nul K de X tel que $D + K = D$;*

— *soit il existe une hypersurface B_0 de B telle que $E = A \times B_0$ et*

$$\dim A' + \dim v(B_0) = \dim(X) - 1;$$

---

9. Un espace analytique X est dit *normal* si, pour tout point x de X, l'anneau local $\mathscr{O}_{X,x}$ des germes de fonctions holomorphes en x est intégralement clos dans son corps des fractions ([**F**, p. 112]). Cette définition n'est pas très parlante ; heureusement, le lecteur pressé ou peu curieux pourra aisément se passer d'en comprendre toutes les subtilités dans la suite. Précisons simplement que toute variété lisse est normale (puisque les anneaux locaux $\mathscr{O}_{X,x}$ sont factoriels, comme on l'a déjà vu dans la démonstration de la proposition IV.2.3, p. 42), et que l'ensemble des points singuliers d'un espace normal est de codimension au moins 2, ce qui permet de travailler avec les diviseurs (presque) de la même façon que sur une variété lisse.

— *soit il existe une hypersurface A_0 de A telle que $E = A_0 \times B$ et*

$$\dim u(A_0) + \dim B' = \dim(X) - 1.$$

Démonstration. — Soient x un point général de D et (a, b) un point général de $\delta^{-1}(x) \cap E$. L'application tangente en (a, b) de l'application $E \to D$ induite par δ est surjective (*cf.* note 5, p. 106), tandis que $T_{(a,b)}\delta\colon T_aA \oplus T_bB \to T_xX$ ne l'est pas par hypothèse ; son image est donc T_xD. On a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} T_aA \oplus T_bB & \xrightarrow{T_{(a,b)}\delta} & T_xX \\ \uparrow & & \uparrow \\ T_aA & \xrightarrow{T_au} & T_{u(a)}A' \end{array}$$

Comme E est une hypersurface, on peut supposer par exemple que la première projection $E \to A$ est surjective, auquel cas a est général dans A et T_au est surjective. Si on note F_x la projection dans A' de ${\delta'}^{-1}(x) \cap h(E)$, on a

$$T_0(F_x - a') \subset T_0(A' - a') \subset T_0(D - x)$$

pour a' général dans F_x. Le lemme 1.2 entraîne alors

$$T_0\langle F_x\rangle \subset T_0(D - x).$$

Le lemme 1.4 appliqué à l'image de $h(E)$ par l'automorphisme $(x, x') \mapsto (x, x - x')$ de $X \times X$ montre que le tore $K = \langle F_x\rangle$ est indépendant de x. Le lemme 1.3 permet de conclure $D + K = D$.

Si K n'est pas nul, on a terminé. Dans le cas contraire, les fibres générales de l'application $h(E) \hookrightarrow A' \times B' \xrightarrow{\delta'} D$ sont finies, donc

$$\dim h(E) = \dim D = \dim X - 1 < \dim A' + \dim B' - 1.$$

Comme la projection $h(E) \to A'$ est surjective, cela signifie que ses fibres générales sont de codimension au moins 2 dans B'. Les fibres générales de la projection $E \to A$, qui sont des hypersurfaces de B, sont donc envoyées par v sur des sous-variétés de B' de codimension au moins 2. Or il ne peut exister qu'un nombre fini de telles hypersurfaces dans B (sinon leur réunion serait B mais ne pourrait s'envoyer surjectivement sur B'). On en déduit qu'il existe une hypersurface B_0 de B telle que $E = A \times B_0$. On a alors $h(E) = A' \times v(B_0)$, et

$$\dim A' + \dim v(B_0) = \dim h(E) = \dim D = \dim X - 1,$$

ce qui termine la démonstration du lemme. □

Revenons à la démonstration du théorème, et considérons la *factorisation de Stein*

$$A \times B \xrightarrow{\widetilde{\delta}} \widetilde{X} \xrightarrow{w} X$$

de l'application propre δ, où les fibres de $\widetilde{\delta}$ sont connexes et celles de w finies ([**F**, p. 71]). Nous allons montrer par l'absurde que l'application tangente de w est bijective en tout point. Si ce n'est pas le cas, le *théorème de pureté* ([**F**, p. 170]) dit qu'il existe une hypersurface irréductible $\widetilde{D}$ de $\widetilde{X}$ en tout point de laquelle l'application tangente de w n'est pas bijective [(10)]. Considérons la factorisation de Stein

$$A \times B \xrightarrow{\widetilde{h}} \widetilde{A}' \times \widetilde{B}' \xrightarrow{q} A' \times B'$$

de h ; toute fibre de $\widetilde{h}$ est connexe et contenue dans une fibre de δ, donc dans une fibre de $\widetilde{\delta}$, d'où une factorisation

$$\widetilde{\delta}\colon A \times B \xrightarrow{\widetilde{h}} \widetilde{A}' \times \widetilde{B}' \longrightarrow \widetilde{X}.$$

Par conséquent, il existe une hypersurface irréductible $\widetilde{E}'$ de $\widetilde{A}' \times \widetilde{B}'$ qui s'envoie surjectivement sur $\widetilde{D}$, puis une hypersurface irréductible E de $A \times B$ qui s'envoie surjectivement sur $\widetilde{E}'$.

On utilise alors le lemme : l'image de E dans $A' \times B'$ est une hypersurface (c'est $q(\widetilde{E}')$), donc il existe un sous-tore non nul K de X tel que $D + K = D$, où $D = \delta(E) = w(\widetilde{D})$. Supposons que K soit le plus grand sous-tore de X qui ait cette propriété ; on considère les applications composées

$$A \xrightarrow{u} X \xrightarrow{p} X/K \qquad \text{et} \qquad B \xrightarrow{v} X \xrightarrow{p} X/K.$$

La différentielle de l'application correspondante $p \circ \delta\colon A \times B \to X/K$ en un point général de E a pour image l'espace tangent à D/K, donc n'est pas surjective. Comme on a $\dim p(A') + \dim p(B') > \dim X/K$ par hypothèse, on peut de nouveau appliquer le lemme : D/K n'étant invariant par translation par aucun sous-tore non nul de X/K, il existe (par exemple) une hypersurface B_0 de B tel que $E = A \times B_0$ et $\dim p(A') + \dim p(v(B_0)) = \dim(X/K) - 1$. Mais, par construction, l'image de E dans $A' \times B'$ est une hypersurface, donc

$$\begin{aligned} \dim p(A') + \dim B' &= \dim p(A') + \dim v(B_0) + 1 \\ &\leq \dim p(A') + \dim p(v(B_0)) + \dim K + 1 \\ &= \dim(X/K) - 1 + \dim K + 1 = \dim X, \end{aligned}$$

ce qui contredit l'hypothèse que le couple (A', B') est non dégénéré.

L'application holomorphe $w\colon \widetilde{X} \to X$ est donc un revêtement topologique, de sorte que $\widetilde{X}$ s'obtient comme le quotient du revêtement universel V de X par un sous-groupe $\widetilde{\Gamma}$ de son groupe fondamental Γ ; comme $\widetilde{X}$ est compacte, $\widetilde{\Gamma}$ est un réseau dans V, de sorte que $\widetilde{X}$ est un tore complexe et w une isogénie.

Soient b_0 un point de B et $\widetilde{x}_0$ un point de $\widetilde{X}$ vérifiant $w(\widetilde{x}_0) = v(b_0)$. L'application

$$\begin{array}{rccc} \widetilde{u}\colon & A & \longrightarrow & \widetilde{X} \\ & a & \longmapsto & \widetilde{\delta}(a, b_0) + \widetilde{x}_0 \end{array}$$

vérifie $w \circ \widetilde{u} = u$. Pour tout b dans B, l'application continue $a \mapsto \widetilde{u}(a) - \widetilde{\delta}(a, b)$ est à valeurs dans l'ensemble fini $w^{-1}(v(b))$ donc est constante ; notons $\widetilde{v}(b)$ sa valeur. On a

$$\widetilde{\delta}(a, b) = \widetilde{u}(a) - \widetilde{v}(b)$$

10. L'hypothèse ≪ $\widetilde{X}$ normale ≫ nécessaire pour appliquer ce théorème découle du fait que A et B le sont.

pour tout a dans A et tout b dans B, de sorte que $\widetilde{v}$ est holomorphe et relève v. La variété $A \times_{\widetilde{X}} B$ n'est autre que $\widetilde{\delta}^{-1}(0)$, donc est connexe.

Reste à montrer l'exactitude de la suite (33). La démonstration qui précède montre que le lieu des points $\widetilde{x}$ de $\widetilde{X}$ tels que la différentielle de $\widetilde{\delta}$ ne soit surjective en aucun point de $\widetilde{\delta}^{-1}(\widetilde{x})$ est de codimension au moins 2 dans $\widetilde{X}$. Le théorème résulte alors du lemme suivant appliqué au morphisme propre $\widetilde{\delta}\colon A\times B \to \widetilde{X}$. Sa démonstration est donnée en note [(11)]. $\square$

***Lemme 3.3* (Nori). —** *Soient* [(12)] *X et Y des variétés analytiques, avec X normale et Y lisse, et $f\colon X \to Y$ un morphisme propre à fibres connexes. On suppose qu'il existe un sous-espace analytique Y' de Y de codimension 2 tel que, pour tout $y \in Y \smallsetminus Y'$, la différentielle*

---

11. Il existe un ouvert non vide U de Y tel que le morphisme $f^{-1}(U) \to U$ induit par f soit une fibration topologiquement localement triviale (cette propriété est démontrée dans le corollaire (5.1) de J.-L. Verdier, *Stratifications de Whitney et théorème de Bertini-Sard*, Invent. Math. **36** (1976), 295–312). Quitte à rétrécir U, on peut supposer qu'il existe un ouvert U' de Y contenant U tel que

– $Y \smallsetminus U'$ soit de codimension au moins 2 ;

– $U' \smallsetminus U$ soit lisse de codimension 1, union disjointe d'hypersurfaces irréductibles $D_1, \dots, D_r$;

– la différentielle de f est surjective en au moins un point de chaque fibre de U'.

Pour tout point y de U, on a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc}
\pi_1(f^{-1}(y)) & \longrightarrow & \pi_1(f^{-1}(U)) & \longrightarrow & \pi_1(U) & \longrightarrow & 1 \\
\| & & \downarrow{\scriptstyle\alpha} & & \downarrow{\scriptstyle\beta} & & \\
\pi_1(f^{-1}(y)) & \longrightarrow & \pi_1(f^{-1}(U')) & \longrightarrow & \pi_1(U') & \longrightarrow & 1 \\
\| & & \downarrow{\scriptstyle\alpha'} & & \downarrow{\scriptstyle\beta'} & & \\
\pi_1(f^{-1}(y)) & \longrightarrow & \pi_1(X) & \longrightarrow & \pi_1(Y) & \longrightarrow & 1
\end{array} \tag{34}$$

où la première ligne est exacte puisque $f^{-1}(U) \to U$ est une fibration topologiquement localement triviale à fibres *connexes*. Les applications α, α' et β sont surjectives et β' est bijective (*cf.* exerc. VIII.1). Le noyau de β est engendré par des lacets $\gamma_1, \dots, \gamma_r$, où γ_i fait le tour de D_i près d'un point d_i. Soit x_i un point de $f^{-1}(d_i)$ en lequel la différentielle de f est surjective. La fibration f est topologiquement localement triviale au voisinage de x_i, et on peut remonter chaque γ_i en un lacet dans $f^{-1}(U)$ dont l'image par α est triviale. Une petite ballade dans le diagramme (34) entraîne que sa dernière ligne, c'est-à-dire la suite (35), est exacte (pour tout y dans U). Il s'agit de montrer qu'elle est encore exacte pour tout point y de Y.

Soient V un voisinage contractile de y dans Y et Ω un voisinage de $f^{-1}(y)$ dans $f^{-1}(V)$ tel que le morphisme $\pi_1(f^{-1}(y)) \to \pi_1(\Omega)$ induit par l'inclusion soit bijectif (l'existence de Ω résulte de ce que toute sous-variété compacte d'un espace analytique admet une base de voisinages dont elle est rétracte par déformation ; les références pour ce type d'énoncé sont difficiles à trouver, mais la proposition 5.A.1 du livre de M. Goresky et R. MacPherson : Stratified Morse Theory, Springer Verlag, 1988, donne ce dont on a besoin). Comme f est propre, il existe un voisinage V' de y dans V tel que $f^{-1}(V')$ soit contenu dans Ω. Choisissons un point y' dans $U \cap V'$; on a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & \pi_1(f^{-1}(y')) & \xrightarrow{\iota_{y'}} & \pi_1(X) & \xrightarrow{\pi_1(f)} & \pi_1(Y) & \longrightarrow & 1 \\
 & & \downarrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\
\pi_1(f^{-1}(y)) & \xrightarrow{\sim} & \pi_1(\Omega) & \longrightarrow & \pi_1(f^{-1}(V)) & \xrightarrow{\pi_1(f)} & \pi_1(V) & = 1 &
\end{array}$$

qui montre que l'image de $\iota_{y'}$, c'est-à-dire le noyau de $\pi_1(f)$, est contenue dans celle de ι_y, ce qui achève la démonstration du lemme.

12. M. Nori, *Zariski's conjecture and related problems*, Ann. Sci. École Norm. Sup. **16** (1983), Lemma 1.5, p. 311.

de f soit surjective en au moins un point de $f^{-1}(y)$. Pour tout *y dans Y, on a une suite exacte*

$$\pi_1(f^{-1}(y)) \xrightarrow{\iota_y} \pi_1(X) \xrightarrow{\pi_1(f)} \pi_1(Y) \longrightarrow 1. \tag{35}$$

Ce théorème à l'énoncé rébarbatif va nous permettre de tirer des conséquences très simples sur le groupe fondamental des sous-variétés ≪ de grande dimension ≫ d'un tore complexe.

Corollaire 3.4. — *Soient X un tore complexe et A une sous-variété irréductible normale de X telle que, pour tout tore quotient Y de X tel que $p(A) \neq Y$, on ait*

$$\dim A + \dim p(A) \geq \dim X,$$

où $p\colon X \to Y$ est la surjection canonique. Le morphisme $\pi_1(A) \to \pi_1(X)$ induit par l'inclusion de A dans X est bijectif.

Les hypothèses du corollaire sont vérifiées lorsque A est une sous-variété irréductible normale non dégénérée de X de dimension $> \frac{1}{2} \dim X$.

Démonstration. — Appliquons le théorème en prenant pour u et v l'inclusion ι de A dans X. Comme $\pi_1(\iota)$ est surjective par le corollaire 2.8, l'isogénie p est un isomorphisme, $A \times_X A$ est la diagonale de $A \times A$ et on a une suite exacte

$$\begin{array}{ccccccc} \pi_1(A) & \longrightarrow & \pi_1(A) \times \pi_1(A) & \longrightarrow & \pi_1(X) & \longrightarrow & 0 \\ t & \longmapsto & (t,t) & & & & \\ & & (t,t') & \longmapsto & \pi_1(\iota)(t-t') & & \end{array}$$

qui montre que $\pi_1(\iota)$ est bijective. □

On trouvera dans les exercices VIII.4 et VIII.5 d'autres applications du théorème au calcul du groupe fondamental de certaines variétés compactes normales munies d'une application holomorphe surjective sur un tore complexe simple.

Retraçons brièvement l'historique des résultats de cette section. La première version du ≪ théorème de connexité ≫ 3.1 concernait les applications vers un espace projectif. Due à l'origine à A. Grothendieck en 1968 [13] puis un peu oubliée, elle sera retrouvée par différentes méthodes par W. Fulton et J. Hansen en 1979 [14], et étendue au cadre topologique par P. Deligne, W. Fulton et R. Lazarsfeld [15].

13. Voir l'exposé XIII, 2.3, de Cohomologie locale des faisceaux cohérents et théorèmes de Lefschetz locaux et globaux (SGA 2). Masson et North Holland, Paris Amsterdam, 1968.
14. Voir l'article : *A Connectedness Theorem for Projective Varieties, with Applications to Intersections and Singularities of Mappings*, Ann. of Math. **110** (1979), 159–166, ainsi que la présentation élémentaire de J.-P. Jouanolou dans *Théorèmes de Bertini et applications*, Prog. Math. **42**, Birkhäuser, 1983.
15. Voir l'article : Connectivity and its Applications in Algebraic Geometry, in *Algebraic Geometry*, Proceedings of the Midwest Algebraic Geometry Conference, Chicago 1980, Springer Lecture Notes 862. Les idées de la démonstration du corollaire ci-dessus et des résultats des exercices VIII.4 et VIII.5 leur sont dues.

Parallèlement, W. Barth démontrait en 1968 [16] que les groupes de cohomologie rationnelle d'une sous-variété lisse de petite codimension d'un espace projectif sont les mêmes, jusqu'en un certain degré, que ceux de l'espace projectif. Ce résultat fut par la suite étendu aux groupes d'homotopie par M. Larsen en 1973 [17]. Enfin, A. Sommese généralisa en 1982 [18] les résultats de M. Larsen aux sous-variétés lisses d'un espace homogène quelconque. G. Lyubeznik obtint enfin en 1993 [19] les meilleurs résultats possibles sur les groupes d'homotopie des sous-variétés d'un espace projectif.

Les résultats sur les groupes d'homotopie d'une sous-variété singulière d'un tore complexe (même simple) restent à ce jour limités à ceux du corollaire 3.4. Vus les résultats de A. Sommese et de W. Fulton et R. Lazarsfeld, il semble naturel de conjecturer le résultat suivant :

***Conjecture 3.5.* —** *Soient X un tore complexe et A une sous-variété irréductible de X* non dégénérée *et localement intersection complète* [20]. *On a*

$$\pi_j(A) \simeq \pi_j(X) \qquad \textit{pour} \qquad j \leq 2\dim A - \dim X.$$

4. Application de Gauss

Soient X un tore complexe et A une sous-variété irréductible de X de dimension d. En associant à tout point lisse a de A l'espace tangent à $A - a$ en 0, on définit une application holomorphe

$$\mathscr{G}_A \colon A_{\text{lisse}} \longrightarrow G(d, T_0X),$$

où $G(d, T_0X)$ désigne la grassmannienne des sous-espaces vectoriels de T_0X de dimension d. Rappelons (exerc. V.2, p. 63) que celle-ci est une variété complexe sur laquelle on a construit un fibré en droites noté $\mathscr{O}_{G(d,T_0X)}(1)$ dont la fibre au-dessus d'un point correspondant à un sous-espace T de T_0X de dimension d est $\bigwedge^d T^*$. On en déduit que $\mathscr{G}_A^* \mathscr{O}_{G(d,T_0X)}(1)$ *est isomorphe au fibré canonique de la variété complexe* A_{lisse} (*cf.* ex. 1.2.3), p. 50).

***Proposition 4.1.* —** *Soient X un tore complexe et A une sous-variété irréductible de X de dimension d. Notons K le plus grand sous-tore de X tel que $A + K = A$ et $p \colon X \to X/K$ la surjection canonique. On a*

16. Voir l'article : *Fortsetzung meromorpher Funktionen in Tori und Komplexprojektiven Räumen*, Invent. Math **5** (1968), 42–62.
17. Voir l'article : *On the topology of complex projective manifolds*, Invent. Math. **19** (1973), 251–260.
18. Voir l'article : *Complex Subspaces of Homogeneous Complex Manifolds II. Homotopy Results*, Nagoya Math. J. **86** (1982), 101–129, qui conclut une série de cinq articles, ainsi que l'article avec A. van de Ven : *Homotopy Groups of Pullbacks of Varieties*, Nagoya Math. J. **102** (1986), 79–90.
19. Voir l'article : *Etale Cohomological Dimension and the Topology of Algebraic Varieties*, Ann. of Math. **137** (1993), 71–128.
20. Cela signifie que A est définie localement dans X par $\operatorname{codim} A$ équations. Toute sous-variété lisse est localement intersection complète.

— *l'application de Gauss de A se factorise en*

$$\begin{array}{ccccccc} \mathscr{G}_A\colon A_{\mathrm{lisse}} & \overset{p}{\twoheadrightarrow} & A_{\mathrm{lisse}}/K & \xrightarrow{\mathscr{G}_{p(A)}} & G(d-\dim K, T_0(X/K)) & \hookrightarrow & G(d,T_0X) \\ & & & & T & \mapsto & (T_0p)^{-1}(T), \end{array}$$

— *les fibres non vides générales de l'application de Gauss $\mathscr{G}_{p(A)}$ sont finies.*

Démonstration. — Considérons le graphe G de $\mathscr{G}_A$ dans $A_{\mathrm{lisse}} \times G(d, T_0X)$ et son adhérence [21] $\overline{G}$ dans $A \times G(d, T_0X)$. Posons $\partial G = \overline{G} \smallsetminus G$ et notons

$$u\colon G \longrightarrow G(d,T_0X) \qquad \overline{u}\colon \overline{G} \longrightarrow G(d,T_0X) \qquad \partial u\colon \partial G \longrightarrow G(d,T_0X)$$

les applications holomorphes induites par la seconde projection. Soit x un point général de $\overline{u}(\overline{G})$. Si $\overline{u}(\partial G) \neq \overline{u}(\overline{G})$, on a $\overline{u}^{-1}(x) = u^{-1}(x)$. Si au contraire $\overline{u}(\partial G) = \overline{u}(\overline{G})$, la fibre $\overline{u}^{-1}(x)$ est partout de dimension $\dim \overline{G} - \dim \overline{u}(\overline{G})$, tandis que sa sous-variété

$$\overline{u}^{-1}(x) \smallsetminus u^{-1}(x) = (\partial u)^{-1}(x)$$

est de dimension $\dim \partial G - \dim \overline{u}(\overline{G})$. On en déduit que dans tous les cas $u^{-1}(x)$ est un ouvert dense de $\overline{u}^{-1}(x)$.

Par le lemme 1.4, il existe un sous-tore K' de X tel que

$$K' = \langle \overline{u}^{-1}(x)\rangle = \langle u^{-1}(x)\rangle = \langle \mathscr{G}_A^{-1}(x)\rangle$$

pour x général dans l'image de $\mathscr{G}_A$. Par le lemme 1.2,

$$T_0K' = \sum_{a\in\mathscr{G}_A^{-1}(x)} T_0(\mathscr{G}_A^{-1}(x) - a) \subset \sum_{a\in\mathscr{G}_A^{-1}(x)} T_0(A-a) = \Pi_x,$$

où Π_x est le sous-espace vectoriel de T_0X que x représente. En particulier, T_0K' est contenu dans $T_0(A-a)$ pour a général dans A, d'où $A = A + K'$ par le lemme 1.3, et $K' \subset K$. Notons $p'\colon X \to X/K'$ la surjection canonique.

Il est clair que l'application de Gauss de A se factorise comme dans le théorème (avec K' à la place de K). Soit x un point général dans l'image de $\mathscr{G}_A$; comme

$$K' = \langle \mathscr{G}_A^{-1}(x)\rangle = \langle {p'}^{-1}\big(\mathscr{G}_{p'(A)}^{-1}(x)\big)\rangle = {p'}^{-1}\langle \mathscr{G}_{p'(A)}^{-1}(x)\rangle,$$

$\mathscr{G}_{p'(A)}^{-1}(x)$ est fini et K est égal à K'. □

On peut tirer de ce résultat la conséquence suivante : si X est un tore complexe, toute sous-variété irréductible de X invariante par translation par aucun sous-tore non nul de X est *de type général* [22].

21. Il s'agit ici de l'adhérence pour la *topologie de Zariski*, c'est-à-dire l'intersection des sous-variétés de $A \times G(d, T_0X)$ qui contiennent G. D'autre part, je triche en supposant dans la suite que G est ouvert dans son adhérence. Ce n'est pas un problème sérieux : G est *constructible* (*cf.* [**H**, chap. II, exerc. 3.19]), donc contient un sous-ensemble ouvert et dense dans $\overline{G}$.

22. Lorsque A est lisse, cela signifie que le fibré en droites $\omega_A^{\otimes r}$ définit (selon la procédure de V.1.6, p. 52), pour tout entier r assez grand, une application méromorphe

$$\psi_{\omega_A^{\otimes r}}\colon A \dashrightarrow \mathbf{P}H^0(A, \omega_A^{\otimes r})^*$$

Nous allons maintenant voir que l'on peut préciser ce résultat lorsque A est *lisse*, en montrant que ω_A est alors *ample*.

Soient X un tore complexe, A une sous-variété de X et B une sous-variété irréductible de X contenue dans $A_{\rm lisse}$. On pose

$$T(A,B)=\bigcup_{b\in B} T_0(A-b);$$

c'est une sous-variété de T_0X.

Il nous sera utile d'étendre cette définition à la situation plus générale suivante. Soient A une variété irréductible compacte et B une sous-variété irréductible de A contenue dans $A_{\rm lisse}$. Soit $u\colon A\to X$ une application holomorphe dont la différentielle est injective en tout point de B. On définit une sous-variété de T_0X en posant

$$T(A,B)=\bigcup_{b\in B} \operatorname{Im}(T_b u),$$

où pour alléger l'écriture, on a identifié l'espace tangent en chaque point de X à l'espace vectoriel T_0X au moyen d'une translation.

On remarquera que l'hypothèse entraîne [(23)] que la diagonale

$$\Delta_B=\{(a,b)\in A\times B\mid a=b\}$$

est ouverte dans $A\times_X B$; c'en est donc une composante connexe.

On peut aussi définir $T(A,B)$ en faisant intervenir *l'éclatement* [(24)] $\varepsilon\colon\hat X\to X$ de 0 dans X. La variété $\hat X$ est compacte lisse connexe ; l'application holomorphe ε induit un isomorphisme entre $\varepsilon^{-1}(X\smallsetminus\{0\})$ et $X\smallsetminus\{0\}$, tandis que l'image inverse de 0, appelée *diviseur exceptionnel*, s'identifie à l'espace projectif $\mathbf{P}T_0X$.

On remarque que $\mathbf{P}T(A,B)$ est l'ensemble des limites dans $\hat X$ des $u(a)-u(b)$, lorsque l'élément a de A et l'élément b de B convergent vers le même point. En particulier, il est contenu dans l'intersection de $\overline{\varepsilon^{-1}\big((u(A)-u(B))\smallsetminus\{0\}\big)}$ avec le diviseur exceptionnel de $\hat X$, de sorte que [(25)]

$$\dim T(A,B)\le \dim(u(A)-u(B)). \tag{36}$$

Le résultat suivant montre qu'il y a égalité.

---

dont l'image est de même dimension que A ; c'est le cas en particulier lorsque ω_A est ample, puisqu'alors $\psi_{\omega_A^{\otimes r}}$ est un plongement pour r assez grand. Lorsque A est singulière, cela signifie qu'une désingularisation de A a cette propriété (toutes les désingularisations l'ont alors).

23. La question est locale sur A, que l'on peut donc supposer être une sous-variété lisse de X, auquel cas

$$A\times_X B=\{(a,b)\in A\times B\mid u(a)=u(b)\}=\Delta_B.$$

24. Voir les pages 182 à 184 de [**GH**] pour la construction de l'éclatement d'un point dans une variété complexe.

25. Pour le lecteur familier avec les éclatements de sous-variétés pas nécessairement lisses (*cf.* [**H**, p. 163]), on peut être plus précis. Si $\varepsilon'\colon\widehat{A\times B}\to A\times B$ est l'éclatement de $A\times_X B$ dans $A\times B$, on a par la propriété

Théorème 4.2. — *Soient X un tore complexe, A une variété irréductible compacte et B une sous-variété irréductible de A contenue dans A_{lisse}. Soit $u\colon A \to X$ une application holomorphe dont la différentielle est injective en tout point de B ; on a*

$$\dim T(A,B) = \dim(u(A) - u(B)).$$

Démonstration. — Commençons par un lemme facile.

Lemme 4.3. — *Soient C une courbe lisse compacte connexe, $v\colon C \to X$ une application holomorphe dont l'image est une courbe lisse et c_0 un point de C en lequel la différentielle de v est injective et telle que $T(A,B) \cap \operatorname{Im} T_{c_0} v = \{0\}$. La différentielle de l'application*

$$\begin{array}{rccc} w\colon & A \times C & \longrightarrow & X \\ & (a,c) & \longmapsto & u(a) - v(c) \end{array}$$

est injective en tout point de $B \times \{c_0\}$, et $T(A \times C, B \times \{c_0\})$ est le cône de sommet la droite $\operatorname{Im} T_{c_0} v$ et de base $T(A,B)$.

Démonstration. — Soit b un point de B. La différentielle de w en (b, c_0) est l'application

$$\begin{array}{ccc} T_b A \times T_{c_0} C & \longrightarrow & T_0 X \\ (t,t') & \longmapsto & T_b u(t) - T_{c_0} v(t') \end{array}$$

Or l'image de $T_b u$ est contenue dans $T(A,B)$; elle est donc en somme directe avec celle de $T_{c_0} v$. Il s'ensuit que $T_{(b,c_0)} w$ est injective d'image $\operatorname{Im}(T_b u) \oplus \operatorname{Im}(T_{c_0} v)$, ce qui prouve le lemme. □

Démontrons le théorème par récurrence sur la codimension de $u(A) - u(B)$, en supposant d'abord $u(A) - u(B) = X$ et $T(A,B) \neq T_0 X$. Soit C une courbe lisse compacte connexe avec une application holomorphe $v\colon C \to X$ vérifiant les propriétés suivantes (la construction peut se faire à l'aide de techniques élémentaires de géométrie algébrique ; *cf.* exerc. VIII.2) :

— la fibre $v^{-1}(0)$ a deux points dont l'un, c_0, en lequel la différentielle de v est injective d'image rencontrant $T_0 X \smallsetminus T(A,B)$;

— l'image de v est une courbe lisse qui engendre X ;

---

universelle des éclatements un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \widehat{A \times B} & \xrightarrow{\hat\delta} & \hat X \\ {\scriptstyle \varepsilon'}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle \varepsilon} \\ A \times B & \longrightarrow & X \\ (a,b) & \longmapsto & u(a) - u(b) \end{array}$$

et $\mathbf{P}T(A,B)$ est l'image par $\hat\delta$ du diviseur exceptionnel de ε' qui domine Δ_B. Cette interprétation permet d'ailleurs de définir $T(A,B)$ sous la seule hypothèse que Δ_B est une composante connexe de $A \times_X B$; W. Fulton et R. Lazarsfeld appellent les morphismes u qui ont cette propriété ≪ weakly ramified along B ≫. Le théorème ci-dessous reste encore vrai sous cette condition plus faible, en particulier sans supposer que B est contenu dans A_{lisse} ; *cf. Fulton-Hansen and Barth-Lefschetz theorems for subvarieties of abelian varieties*, J. reine angew. Math. **467** (1995), p. 191.

— v ne se factorise par aucune isogénie non triviale $\widetilde{X} \to X$.

Le théorème 3.1 appliqué à l'application surjective

$$\begin{array}{ccc} A \times B & \longrightarrow & X \\ (a,b) & \longmapsto & u(a) - u(b) \end{array}$$

et à l'application $v\colon C \to X$ dont l'image engendre X et qui ne se factorise par aucune isogénie non triviale, entraîne que

$$(A \times B) \times_X C = \{(a,b,c) \in A \times B \times C \mid u(a) - u(b) = v(c)\}$$

est connexe. Par le lemme, la différentielle de $w\colon A \times C \to X$ est injective en tout point de $B \times \{c_0\}$, de sorte que

$$\Delta = \{(b, c_0, b, c_0) \mid b \in B\}$$

est une composante connexe de $(A \times C) \times_X (B \times \{c_0\})$, qui est l'ensemble des points (a, c, b, c_0) vérifiant

$$w(a,c) = u(a) - v(c) = w(b, c_0) = u(b) - v(c_0) = u(b).$$

On vient de voir que cet ensemble est connexe ; il est donc égal à Δ. C'est absurde car il contient (b, c_1, b, c_0), où c_1 est l'autre point de $v^{-1}(0)$. On a donc bien $T(A,B) = T_0X$.

Supposons maintenant $u(A) - u(B) \neq X$; on a alors $T(A,B) \neq T_0X$ par (36) et on peut choisir une application holomorphe $v\colon C \to X$ comme ci-dessus. On applique l'hypothèse de récurrence au morphisme $w\colon A \times C \to X$, dont la différentielle est injective en tout point de $B \times \{c_0\}$. On a $\dim(w(A \times C) - w(B \times \{c_0\})) = \dim(u(A) - u(B)) + 1$ et le lemme 4.3 donne

$$\dim T(A \times C, B \times \{c_0\}) = \dim T(A,B) + 1,$$

ce qui montre le théorème. □

Corollaire 4.4. — *Soient X un tore complexe et A une sous-variété irréductible de X. Si F est une sous-variété (fermée !) irréductible de X contenue dans une fibre de $\mathscr{G}_A$, on a $A + \langle F \rangle = A$.*

Démonstration. — Sous les hypothèses du corollaire, $T(A,F)$ est de même dimension que A, et donc aussi $A - F$ par le théorème. Cela entraîne que $A - F$ est un translaté de A, d'où la conclusion. □

Comme promis, on peut interpréter ce résultat de la façon suivante : *le fibré canonique d'une sous-variété lisse d'un tore complexe invariante par translation par aucun sous-tore* *non nul est ample* [26]. En effet, l'image inverse ω_A du fibré ample $\mathscr{O}_{G(d,T_0X)}(1)$ par l'application finie $\mathscr{G}_A$ est encore ample [27].

Exercices

VIII.1. — Soient X un espace analytique normal connexe et Z une sous-variété de X distincte de X.

a) Montrer que l'application canonique $\pi_1(X \smallsetminus Z) \to \pi_1(X)$ est surjective (*Indication :* utiliser le fait que tout espace normal connexe est irréductible, puis la note 8, p. 110).

b) Si X est lisse et Z de codimension au moins 2, montrer que l'application canonique $\pi_1(X \smallsetminus Z) \to \pi_1(X)$ est bijective (*Indication :* utiliser le théorème de pureté ; *cf.* p. 112).

VIII.2. — Théorème de Bertini. Soient W un espace vectoriel complexe et X une sous-variété lisse connexe de $\mathbf{P}W$. On rappelle que les hyperplans de $\mathbf{P}W$ sont paramétrés par l'espace projectif dual $\mathbf{P}W^*$.

a) Montrer que la variété d'incidence

$$I = \{(x, H) \in X \times \mathbf{P}W^* \mid x \in H\}$$

est lisse connexe.

b) Montrer que pour H général dans $\mathbf{P}W^*$, la variété $X \cap H$ est lisse de dimension $\dim X - 1$ (*Indication :* utiliser le résultat de ≪ lissité générale ≫ mentionné dans la note 5, p. 106).

c) On suppose X de dimension au moins 2. Montrer que pour tout H dans $\mathbf{P}W^*$, la variété $X \cap H$ est connexe (*Indication :* considérer la factorisation de Stein de la seconde projection $I \to \mathbf{P}W^*$ et utiliser le fait que $\mathbf{P}W^*$ est simplement connexe).

d) Soient x un point de X et U un ouvert dense de T_xX ; montrer que X contient une courbe compacte lisse connexe C' passant par x dont l'espace tangent en x rencontre U.

e) Soient L le fibré en droites $\mathscr{O}_{\mathbf{P}W}(1)$ et $p\colon L \to \mathbf{P}W$ la surjection associée. Montrer qu'il existe une section s de $L^{\otimes 2}$ qui s'annule sur une hypersurface lisse de $\mathbf{P}W$ rencontrant transversalement C'.

f) Construire une courbe lisse compacte connexe C avec une application holomorphe $C \to C'$ dont les fibres générales ont deux points, mais dont la différentielle ne soit pas partout injective (*Indication :* considérer l'ensemble $\{\ell \in p^{-1}(C') \mid \ell^{\otimes 2} = s \circ p(\ell)\}$).

g) Soient X une variété abélienne et U un ouvert dense de T_0X. Construire une courbe lisse compacte connexe C avec une application holomorphe $v\colon C \to X$ telles que

– la fibre $v^{-1}(0)$ a deux points dont l'un en lequel la différentielle de v est injective d'image rencontrant U ;
– l'image de v est une courbe lisse qui engendre X ;
– v ne se factorise par aucune isogénie non triviale $\widetilde{X} \to X$.

VIII.3. — Soit A une sous-variété irréductible d'un tore complexe X ; on suppose $\dim A < \frac{1}{2}\dim X$. Montrer qu'il existe un translaté de A par un point de torsion de X qui ne rencontre pas A. En déduire la réciproque du corollaire 2.8.

---

26. Ce résultat découle aussi d'un théorème difficile de Y. Kawamata, qui dit qu'une variété lisse de type général dont le fibré canonique n'est pas ample contient une courbe rationnelle ; *cf.* th. 6.9 de *Théorèmes de connexité et variétés abéliennes*, Am. J. of Math. **117** (1995), p. 803, pour les références. Rappelons qu'un tore complexe ne contient aucune courbe rationnelle.

27. Pour démontrer que l'image inverse d'un fibré en droites ample par une application finie est ample, il faut utiliser la caractérisation de Serre des fibrés en droites amples sur les variétés complexes compactes par l'annulation de certains groupes de cohomologie, qui dépasse le cadre des connaissances utilisées dans ce livre ; on pourra consulter le livre de R. Hartshorne, Ample Subvarieties of Algebraic Varieties, Lecture Notes **156**, Springer Verlag, 1970, prop. 4.4, p. 25, pour une démonstration.

VIII.4. — Soient X un tore complexe simple, A un espace analytique normal compact et $u\colon A \to X$ une application holomorphe surjective. On suppose qu'il existe une sous-variété B de X de dimension strictement positive telle que l'application $u^{-1}(B) \to B$ induite par u soit bijective. Montrer que l'application $\pi_1(u)\colon \pi_1(A) \to \pi_1(X)$ est bijective (*Indication :* appliquer le théorème 3.1 à u et à la normalisation de B composée avec son inclusion dans X).

VIII.5. — Soient X un tore complexe simple, A un espace analytique normal compact et $u\colon A \to X$ une application holomorphe surjective dont toutes les fibres sont finies. Soit a un point de A ; pour tout voisinage U assez petit de $u(a)$ dans X, notons U_a la composante connexe de $u^{-1}(U)$ qui contient a. Le nombre de points dans une fibre générale de l'application $U_a \to U$ induite par u est indépendant [28] du choix de U ; on le note $e_u(a)$. Pour tout entier ℓ, on pose

$$R_\ell = \{a \in A \mid e_u(a) > \ell\}.$$

Le théorème de pureté (*cf.* [**F**, p. 170]) dit que R_1 est partout de codimension 1 dans A. On admettra que R_ℓ est de codimension au plus ℓ dans A, ou vide [29].

a) Soit d le degré de u, c'est-à-dire le nombre de points dans une fibre générale de u. Montrer que R_{d-1} n'est pas vide (*Indication :* montrer par récurrence sur ℓ que R_ℓ n'est pas vide en appliquant le théorème 3.1 à u et à la normalisation d'une composante de $R_{\ell-1}$ de dimension maximale composée avec son inclusion dans X).

b) En déduire que l'application $\pi_1(u)\colon \pi_1(A) \to \pi_1(X)$ est injective de conoyau fini (*Indication :* appliquer l'exercice précédent).

VIII.6. — Étant donné un *fibré vectoriel* E sur une variété lisse compacte X, on considère le fibré en espaces projectifs $\mathbf{P}E \to X$ (dont les fibres sont les espaces projectifs attachés aux fibres de E) et le fibré en droites $\mathscr{O}_{\mathbf{P}E}(1)$ sur $\mathbf{P}E$ (dont la fibre au-dessus d'un point de $\mathbf{P}E$ est la droite qu'il représente). Si E^* est le fibré dual de E, on dit que E est *ample* si $\mathscr{O}_{\mathbf{P}E^*}(1)$ est ample [30] sur $\mathbf{P}E^*$.

Soient X un tore complexe et A une sous-variété *lisse* de X.

a) Pour que le fibré normal à A dans X soit ample, il faut et il suffit que, pour tout hyperplan H de T_0X, l'ensemble

$$\{a \in A \mid T_0(A - a) \subset H\}$$

soit fini.

b) Si le fibré normal à A dans X est ample, A est non dégénérée.

c) On suppose A non dégénérée ; montrer que pour tout hyperplan H de T_0X, l'ensemble

$$\{a \in A \mid T_0(A - a) \subset H\}$$

est de dimension au plus $\operatorname{codim} A - 1$ (*Indication :* appliquer le théorème 4.2) [31].

VIII.7. — Soit k un entier positif. On dit qu'une sous-variété irréductible A d'un tore complexe X est *k-non dégénérée* si, pour tout sous-tore K de X, on a

$$\dim(A + K) \geq \min(\dim A + \dim K - k, \dim X).$$

a) Soient A et B des sous-variétés irréductibles de X. Si A est k-non dégénérée, on a

$$\dim(A + B) \geq \min(\dim A + \dim B - k, \dim X).$$

28. Voir l'article de T. Gaffney, R. Lazarsfeld, *On the Ramification of Branched Coverings of* $\mathbf{P}^n$, Invent. Math. **59** (1980), 53–58, pour plus de précisions.

29. Ce résultat est démontré dans la thèse de R. Lazarsfeld soutenue à Brandeis University, États-Unis, en 1980.

30. Pour plus de détails, voir les pages 65 à 74 de R. Hartshorne : *Ample vector bundles*, Publ. Math. I.H.E.S. **29** (1966).

31. En généralisant a), on montre que cela revient à dire que le fibré normal à A dans X est $(\operatorname{codim} A - 1)$-ample au sens de la définition (1.3) de l'article de A. Sommese : *Submanifolds of Abelian Varieties*, Math. Ann. **233** (1978), p. 232.

Si A est k-non dégénérée et que B est l-non dégénérée, $A+B$ est $(k+l)$-non dégénérée.

b) Soient X une variété abélienne et A une sous-variété irréductible de X. Pour que A soit k-non dégénérée, il faut et il suffit que A rencontre toute sous-variété de X de dimension $\geq \operatorname{codim} A + k$.

c) Soient X un tore complexe et A une sous-variété irréductible normale k-non dégénérée de X de dimension $> \frac{1}{2}(\dim X + k)$. Le morphisme $\pi_1(A) \to \pi_1(X)$ induit par l'inclusion de A dans X est bijectif.

d) Soient X un tore complexe et A une sous-variété lisse de X. Si le fibré normal à A dans X est k-ample (*cf.* note 31), A est k-non dégénérée. Si A est k-non dégénérée, le fibré normal à A dans X est $(\operatorname{codim} A - 1 + k)$-ample.

BIBLIOGRAPHIE

[BT] R. Bott, L. Tu, Differential Forms in Algebraic Topology, Graduate Texts in Math. **82**, 2ème éd., Springer Verlag, 1986.

[C1] H. Cartan, Formes différentielles, collection Méthodes, Hermann, Paris, 1967.

[C2] H. Cartan, Quotient d'un espace analytique par un groupe d'automorphismes, in *Algebraic Geometry and Algebraic Topology*, A Symposium in honor of S. Lefschetz, Princeton (1957), 90–102.

[F] G. Fischer, Complex Analytic Geometry, Lect. Notes in Math. **538**, Springer Verlag, Berlin, 1976.

[GH] P. Griffiths, J. Harris, Principles of Algebraic Geometry, Wiley, New York, 1978.

[GR] R. Gunning, H. Rossi, Analytic Functions of Several Complex Variables, Prentice-Hall, Inc., Englewoods Cliffs, N.J., 1965.

[H] R. Hartshorne, Algebraic Geometry, Graduate Texts in Mathematics **52**, Springer Verlag, New York, 1977.

[I] J. Igusa, Theta Functions, Grundlehren der math. Wiss. **194**, Springer Verlag, 1972.

[K] G. Kempf, Complex Abelian Varieties and Theta Functions, Universitext, Springer Verlag, 1991.

[LB] H. Lange, Ch. Birkenhake, Complex Abelian Varieties, Grundlehren der math. Wiss. **302**, Springer Verlag, 1992.

[M1] D. Mumford, Abelian Varieties, Oxford University Press, 1974.

[M2] D. Mumford, *On the Equations Defining Abelian Varieties. I*, Invent. Math **1** (1966), 287–354 et *On the Equations Defining Abelian Varieties. II*, Invent. Math **3** (1967), 75–135.

[M3] D. Mumford, Varieties Defined by Quadratic Equations, in *Questions On Algebraic Varieties*, C.I.M.E., Varenna, 1970.

[P] D. Perrin, Géométrie algébrique, Savoirs Actuels, InterÉditions / CNRS Éditions, 1995.

[R] A. Robert, Elliptic Curves, Lect. Notes in Math. **326**, Springer Verlag, 1973.

[S] J.-P. Serre, Cours d'arithmétique, P.U.F., Paris, 1970.

[SD] H.P.F. Swinnerton-Dyer, Analytic Theory of Abelian Varieties, London Math. Soc. Lecture Notes Series **14**, Cambridge University Press, 1974.