

THESE

présentée à

L'INSTITUT DE PHYSIQUE DU GLOBE DE PARIS

pour obtenir le titre de

DOCTEUR DE L'INSTITUT DE PHYSIQUE DU GLOBE DE PARIS

spécialité: Géophysique Interne

par Emmanuel DORMY

sujet :

MODELISATION NUMERIQUE
DE LA DYNAMO TERRESTRE

soutenue le 14 novembre 1997, devant le jury composé de

Jean-Louis LE MOUËL	Président,
Yann BRENIER	Rapporteur,
Christophe SOTIN	Rapporteur,
Andrew SOWARD	Examineur,
Claude JAUPART	Examineur,
Dominique JAULT	Directeur.

Table des matières



1	Modélisation	28
1.1	Les équations du problème	31
1.1.1	Equation du mouvement	31
1.1.2	Equation d'énergie	38
1.1.3	Equation de l'induction	41
1.2	Conditions aux limites	45
1.2.1	Conditions cinématiques	45
1.2.2	Conditions thermiques	46
1.2.3	Conditions magnétiques	46
2	Approximation numérique	51
2.1	Décomposition Poloïdale-Toroïdale	52
2.1.1	Définition et propriétés	52
2.1.2	Champ de vecteur non-solénoïdal	54
2.1.3	Application aux équations	55
2.1.4	Conditions aux limites pour cette décomposition	58
2.2	Discrétisation Verticale	60
2.2.1	Schéma radial	60
2.2.2	Prise en compte des Conditions aux limites	61
2.3	Décomposition spectrale sur la sphère	62
2.3.1	Définition et propriétés	62
2.3.2	Application à nos équations	65
2.3.3	Conditions aux limites magnétiques	67
2.4	Calcul des termes non-linéaires	69
2.4.1	Harmoniques sphériques généralisées	69
2.4.2	Aliasing	73
2.5	Schéma d'intégration temporel	75

3	Magnétohydrodynamique entre deux sphères en rotation différentielle	79
3.1	Système et forme adimensionnée	81
3.2	Mécanique des fluides	82
3.2.1	Couches d'Ekman	82
3.2.2	Etat asymptotique	88
3.2.3	Résultats numériques	93
3.3	Magnétohydrodynamique	99
3.3.1	Couches de Hartmann et d'Ekman-Hartmann	101
3.3.2	Etude numérique	108
4	Convection dans une coquille sphérique en rotation	124
4.1	Etudes expérimentales	125
4.2	Système et forme adimensionnée	129
4.3	Descriptions analytiques de la convection au seuil	134
4.3.1	Etude asymptotique	135
4.3.2	Etude en perturbation	136
4.3.3	Limites de la méthode asymptotique	138
4.3.4	Confrontation avec les études numériques	139
4.4	Etude numérique de la convection au seuil	139
4.4.1	Validation	139
4.4.2	Détermination du seuil	140
4.4.3	Représentation de la solution	144
4.4.4	Réduction de l'espace des paramètres	146
4.4.5	Etude de la limite des grands nombres de Taylor	150
4.5	Convection d'amplitude finie	171
5	Conclusions – Perspectives	187
A	Notations, dimensions, et ordres de grandeurs	196
A.1	Notations	196
A.2	Abréviations	197
A.3	Dimension des principales grandeurs	198
A.4	Nombres sans dimensions	199
A.4.1	Introduction	199
A.4.2	Définition	203
A.5	Ordres de grandeur pour la terre	204
B	Formules utiles, analyse vectorielle	206
B.1	Coordonnées cartésiennes	206
B.2	Coordonnées cylindriques	207
B.3	Coordonnées sphériques	208
B.4	Identités vectorielles	209

C	Schéma aux différences finies compactes pour nos équations	210
D	MHD flow in a slightly differentially rotating spherical shell, with conducting inner core, in a dipolar magnetic field	217

Remerciements

Une thèse se doit d'être signée par son auteur ; cependant chacun est bien conscient qu'il n'a pas effectué ce travail en solitaire. C'est pour cela que sont faits les *remerciements*.

Je voudrais profiter de cette opportunité pour dire à quel point la chance (?), ou au moins les autres, sont pour beaucoup, non seulement dans ce travail, mais aussi plus généralement dans mon choix pour la recherche.

Mon premier contact avec la recherche, j'ai eu la chance de l'avoir à 17 ans. A cet époque, les mathématiques représentent (en tout cas pour moi) *l'art de se passionner pour un système de N équations à N inconnues*, et la physique se résume en *l'étude du glissement d'une savonnette sur un plan incliné*. Est-il besoin de préciser qu'un "prof" de l'une de ces deux disciplines est alors essentiellement un individu inquiétant dont le stock de problèmes barbares et in-intéressants paraît illimité. C'est dans ce décor pour le moins classique que mon père me propose d'aller, un soir que nous étions seuls à Paris, dîner au restaurant avec un de ses amis "prof de math" (en fait professeur à l'université de Strasbourg). J'accepte finalement en traînant la patte et sans grand enthousiasme. C'est ainsi que j'ai fait la connaissance de Claude Godbillon. Quelle surprise ! La première chose qui m'a frappé, c'est qu'il était pétillant et drôle (le dîner a commencé par la description de l'art du transport d'un munster "bien fait" dans un attaché-case). La seconde révélation, c'est que ce qu'il faisait avait l'air de le passionner. Il m'a décrit les problèmes de topologie liés aux retournements du disque, de la sphère, du tore, puis comment un mathématicien aveugle fut le premier à "voir" en trois dimensions le retournement de la sphère ! A la fin du repas la nappe en papier du restaurant chinois était recouverte de sphères, tores et autres objets, et j'avais le cerveau en ébullition ! Claude Godbillon est hélas décédé quelque deux ans plus tard, je garderai longtemps le souvenir de sa rencontre. C'est sans doute suite à ce dîner (il s'en faut parfois de peu) que j'ai continué dans la voie des mathématiques, m'orientant vers les mathématiques appliquées pour lesquelles j'avais le plus d'attrance.

J'aurais vraisemblablement fini par appliquer cette science à toutes sortes de problèmes d'origine industrielle si je n'avais pas subi un deuxième choc (le mot n'est pas trop fort) en rencontrant Vincent Courtillot. Cela s'est encore passé dans un petit restaurant, et cette fois la nappe en papier s'est retrouvé bariolée de coupes du manteau et du noyau terrestre, de panaches et points chauds, de plaques en mouvement, de séries stratigraphiques et de trappes apocalyptiques (je crois me souvenir qu'il a fallu deux nappes). Les sciences de la terre décrites par Vincent Courtillot ont tout pour faire rêver. Une discipline en pleine expansion où la science progresse vite, et où de nombreuses questions restent ouvertes. Il ne lui aura pas fallu beaucoup de temps pour me donner l'envie d'aller voir ça de plus près, sa passion sur ces sujets est telle qu'elle ne peut être que contagieuse !

Les rencontres suivantes sont venues renforcer cette certitude désormais ac-

quise que je voulais faire de la recherche. Je n'étais plus surpris de rencontrer des personnes passionnées et passionnantes (le contraire m'aurait davantage étonné). Il y eu d'abord Albert Tarantola, qui a guidé mes premiers pas en géophysique et à qui je dois mon premier article scientifique. Puis Claude Basdevant qui m'a initié à la mécanique des fluides et m'a présenté Peter Frick avec lequel j'ai écrit un deuxième papier.

Enfin, nous arrivons dans le vif du sujet : la thèse. C'est à Jean-Louis Le Mouél que je dois ce superbe sujet de thèse et ma rencontre avec Dominique Jault, qui a dirigé ce travail. Je lui en suis très reconnaissant. Quelle chance de tomber dans une équipe pareille ! Trois jeunes chercheurs : Dominique Jault, Philippe Cardin, et Henri-Claude Nataf ; différents et complémentaires, qui s'entendent si bien qu'ils décident de fonder ensemble une équipe à Grenoble. Je ne peux m'empêcher de penser que j'ai été là "au bon endroit, et au bon moment" ! Leur projet est ambitieux, et excitant. Je leur souhaite bonne chance pour leur équipée grenobloise et espère que j'aurai l'occasion de continuer à travailler avec eux. Dominique a toujours été d'une disponibilité extrême, m'a appris énormément de choses¹ et a fait preuve d'une grande patience face à mes questions parfois déroutantes. Philippe n'a jamais non plus compté son temps lorsqu'il s'agissait de m'aider. Il m'a souvent donné l'impression d'un *Bulldozer* fonçant sur un obstacle : rien ne semble pouvoir ébranler son optimisme, et je n'échangerai pas ma place avec l'obstacle en question.

I am very grateful to Professor Andrew Soward for the helpful discussions we have had in Uppsala, during the IAGA-97 meeting, as well as for his kind interest in my work.

Je souhaite remercier également Yann Brenier, Claude Jaupart, et Christophe Sotin de me faire l'honneur d'être membres de mon jury.

Pendant ces trois années de thèse, j'ai été moniteur au département de mathématiques du Palais de la Découverte. Je voudrais remercier Jean Brette qui a guidé mes premiers pas dans le domaine de la "divulgation scientifique", mais qui a aussi considérablement enrichi ma culture mathématique au cours des nombreuses et passionnantes conversations que nous avons pu avoir.

Il y a aussi de nombreux problèmes techniques (\LaTeX , A.V.S.) qui se posent au cours du travail, on y perdrait facilement une journée ou plus. Geneviève Moguilny (C.N.C.P.S.T.) et Thierry Goldmann (I.D.R.I.S.) sont passés maître dans l'art de les résoudre en quelques minutes.

Je souhaite aussi remercier tous ceux (thésards, post-docs, chercheurs) en compagnie de qui j'ai passé ces trois années au laboratoire de géomagnétisme de l'IPGP, en particulier Pascale, Lionel, et Marianne avec qui j'ai partagé un bureau.

Je voudrais également adresser un grand merci à Jacqueline Wermelinger,

1. dont l'art de dévaler un 3000m sous la grêle, le mode de cuisson du Baeckhoff, et une excellente recette de mousse au chocolat.

secrétaire du laboratoire, qui fait un travail formidable, et surtout qui ne fait aucune différence entre les requêtes d'un thésard et celles d'un chercheur. J'ai toujours pu compter sur son aide, et cela m'a été plus d'une fois très utile.

Merci à Tutti qui m'a prêté pendant une semaine les clefs de sa maison provinciale, pour me permettre d'avancer la rédaction de cette thèse au calme (et au vert).

Pendant ces trois années, le moral subit (et c'est normal) des hauts et des bas. Heureusement qu'il y a les copains : Sam, Tim, Jul, Tof et Dima avec lesquels je partage les bons moments, mais qui savent aussi supporter mon sale caractère. J'ai aussi pu compter sur le soutien de mes parents et de mon frère Ben. Je voudrais adresser un remerciement tout particulier à Marine, dont le soutien et la patience ont été sans failles, tout particulièrement pendant les derniers mois.

Mon dernier mot sera, vous vous en doutez, pour les nappes en papier des petits restaurants de quartier, sans lesquelles rien de tout cela n'aurait sans doute eu lieu !

Summary

I rapidly recall the history of the knowledge of the Earth's magnetic field, from the magnetic compass to the observatories and paleomagnetic studies. I also briefly present the knowledge we have of the Earth's interior (through seismologic studies, geochemistry, and high pressure physics). Then I introduce the very basic ideas of dynamo theory, and admit that it is the only theory that can agree with observational constraints.

I will try, in the following work, to investigate whether numerical modeling can, or cannot, improve our understanding of the source of the Earth's magnetic field. I will focus on numerical difficulties associated with this problem, and try to defend the idea that, if performed in close interaction with theoretical and experimental studies, numerical modeling can indeed guide our understanding.

Introduction

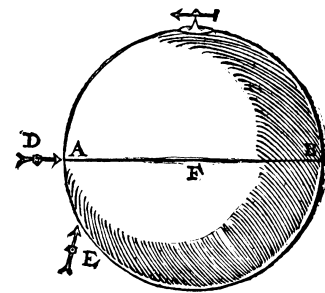


Le champ magnétique terrestre est connu des hommes depuis fort longtemps. Les plus anciens textes retrouvés qui font référence à la boussole sont chinois et remontent au premier siècle de notre ère. Mais l'explication du phénomène restera longtemps mystérieuse, puisque l'on pense encore au XIII^e siècle que la boussole pourrait pointer vers l'étoile polaire. L'idée que l'orientation de la boussole est liée à la Terre elle-même, est mentionnée pour la première fois par le Dr. William Gilbert (médecin de la reine Elisabeth I^{re} d'Angleterre). En 1600, il compare dans son *De Magnete* la Terre à un "énorme aimant" proposant ainsi le premier modèle de génération du champ magnétique terrestre (*c.f.* figure 0.1).

La démonstration que l'essentiel du champ magnétique est bien d'origine interne vient bien plus tard, elle est faite par Carl Friedrich Gauss en 1839. Gauss invente les "Harmoniques Sphériques" pour décrire le champ (nous utiliserons ces mêmes harmoniques dans cette thèse), et déduit de son potentiel l'origine interne du champ. La question de son origine reste cependant encore entière.

Revenons au XVII^e siècle, Henry Gellibrand, professeur d'Astronomie au Gresham College à Londres, publie en 1634 une découverte étonnante. Reprenant les mesures du champ faites par ses deux prédécesseurs William Borough (1580) et Edmund Gunter (1622) en lesquels il avait grande confiance, il constate une

FIG. 0.1 - *Champ magnétique associé à un aimant dipolaire sphérique ("terrella") et à la Terre (De Magnete, William Gilbert, 1600).*



variation dans le temps du champ au même lieu, de plus de 7° .

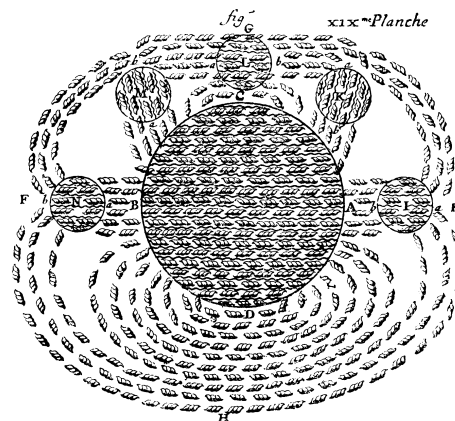
« For it is the Assertion of Mr.Dr.Gilberts. “Variatio unicuiq; Loci constans est”, that is to say, the same place doth alwayes retaine the same variation. Neither hath this Assertion (for ought I ever heard) been questiond by any man. But most diligent magneticall observations have plainly offred violence to the same, and proved the contrary, namely that the variation is accompanied with a variation. »

Henry Gellibrand,
*A discourse Mathematicall
 on the variation of the Needle,*
 (cité d’après P.Radelet).

Cette variation lente du champ (par opposition aux variations rapides et quasi périodiques d’origine externe), s’appellera plus tard “variation séculaire”. Cette observation surprenante paraît difficilement conciliable avec l’hypothèse d’un aimant permanent bien ancré à l’intérieur de la planète...

Descartes reprend pourtant, en 1644, dans les *Principia* (Part IV, § 133 à 183) l’aimantation permanente proposée par Gilbert, et tente d’expliquer l’évolution temporelle du champ en un même lieu par l’activité des hommes qui “tirent continuellement du fer de certains endroits de la Terre, et le transportent en d’autres”, conjugué au fait qu’ “il y a eu autrefois des mines de fer en des lieux où il n’y en a plus, pource qu’elles s’y font corrompuës avec le temps”. Il propose également une interprétation assez singulière du magnétisme à base de “parties canelées” (qui sont les petites “viroles” de la figure 0.2, et qui marquent ce que l’on appellerait sans doute les lignes de force du champ) et de “pores” dont certains corps sont pourvus, comme l’intérieur de la Terre, et les aimants (qui sont les petits cercles périphériques sur la figure 0.2).

FIG. 0.2 – *Modèle de l’aimant pour expliquer le magnétisme terrestre, repris par Descartes dans les Principia, avec une interprétation des phénomènes magnétiques sous forme de “parties canelées” et de “pores”.*



Au début du XIX^e siècle, André-Marie Ampère propose un modèle différent

pour expliquer le magnétisme terrestre, le champ magnétique de la Terre serait dû à des courants électriques qui y circulent :

« La première réflexion que je fis lorsque je voulus chercher les causes des nouveaux phénomènes découverts par M.Ørsted, est que l'ordre dans lequel on a découvert deux faits ne faisant rien aux conséquences des analogies qu'ils présentent, nous pouvions supposer qu'avant de savoir que l'aiguille aimantée prend une direction constante du sud au nord, on avait d'abord connu la propriété qu'elle a d'être amenée par un courant électrique dans une situation perpendiculaire à ce courant, de manière qu'un même pôle de l'aiguille fût toujours porté à gauche du courant, et qu'on découvrit ensuite la propriété qu'elle a de tourner constamment au nord celui de ses pôles qui se portait ainsi à gauche du courant : l'idée la plus simple et celle qui se présenterait immédiatement à celui qui voudrait expliquer cette direction constante de l'aiguille, ne serait-elle pas d'admettre dans la terre un courant électrique, dans une direction telle, que le nord se trouvât à gauche d'un homme qui, couché sur sa surface pour avoir la face tournée du côté de l'aiguille, recevrait ce courant dans la direction de ses pieds à la tête, et d'en conclure qu'il a lieu, de l'est à l'ouest, dans une direction perpendiculaire au méridien magnétique? »

André-Marie Ampère,
Mémoires, (cité d'après G.Laurent).

Ampère envisage alors une pile chimique comme source des courants. En 1831, Michael Faraday s'intéresse également au problème de l'origine électrique possible du champ géomagnétique, et envisage des courants induits par la rotation de la Terre (repris dans *Experimental researches in electricity*).

La même année, Peter Barlow vérifie expérimentalement que l'existence de courants électriques dans la Terre peut expliquer les observations. Le modèle de Barlow consiste en une sphère en bois, de "16 pouces" de diamètre (environ 40 cm), dans laquelle il grave des rainures à l'équateur et des parallèles tous les 4 degrés, ainsi qu'une rainure verticale d'un pôle à l'autre. Il enroule autour d'elle un fil de cuivre de 90 pieds (environ 27 mètres), en passant de parallèle en parallèle. Une fois parcouru par un courant, son modèle reproduit si bien l'orientation de la boussole (déclinaison et inclinaison) qu'il y dessine, pour plus de réalisme, des

continents. Il conclut sur l'origine électrique probable du magnétisme terrestre :

« Nothing can be expected nor desired to represent more exactly on so small a scale all the phenomena of terrestrial magnetism, than does this artificial globe (...) I may therefore, I trust, be allowed to say, that I have proved the existence of a force competent to produce all the phenomena of terrestrial magnetism, without the aid of any body usually called magnetic »

Peter Barlow,
Philosophical Transaction.

Le problème de l'origine de ces courants reste cependant entier, Barlow envisage un effet thermo-électrique. Aucune réponse définitive n'est apportée à la question de l'origine des courants. Arago écrit "Il faut donc se résigner, à l'époque actuelle, à réunir les mesures qui serviront de bases aux recherches de nos successeurs". Qu'en est il donc des mesures du champ? On sait depuis le XV^e siècle que la boussole n'indique pas tout à fait le nord, mais forme avec sa direction un angle appelé déclinaison magnétique. Robert Norman observe au XVI^e siècle que l'aiguille n'est pas non plus parfaitement horizontale². Lors de la fabrication de boussoles, il remarque que si ses aiguilles sont bien équilibrées avant d'être magnétisées, il doit alourdir le pôle sud pour équilibrer l'aiguille une fois celle-ci aimantée³ :

« Having made many and divers compasses, and using alwaies to finish and end them before I touched the needle, I found continually, that after I had touched the yrons with the Stone, that presently the north point thereof would bend or Decline downwards under the Horizon in some quantitie : insomuch that to the Flie of the Compasse, which before was made equall, I was still constrained to put some small pece of waxe in the South part thereof, counterpoise this Declining, and to make it equall againe. »

Robert Norman,
The Newe Attractive,
(cité d'après P.Radelet).

Il démontre ensuite l'existence de l'inclinaison à l'aide d'une expérience consistant à maintenir une aiguille aimantée en suspension dans un liquide (voir figure 0.3).

La troisième composante du champ magnétique, l'intensité, est sans doute la plus difficile à mesurer. Les premières mesures sont faites, par analogie avec la

2. La première observation de l'inclinaison magnétique est en fait à attribuer à Georg Hartmann, qui la relate dans une lettre au Duc de Prusse, mais cette information étant restée cachée, Robert Norman la re-découvre indépendamment.

3. Il travaillait à la latitude de Londres !

FIG. 0.3 – *Robert Norman démontre au XVI^e siècle l'existence de l'inclinaison magnétique à l'aide d'une aiguille aimantée en suspension dans un liquide. Il utilise un vase rempli d'eau, et une aiguille fichée dans un bouchon de liège. Avant d'être magnétisée, l'aiguille flotte à la surface. Lorsqu'on la magnétise, elle pivote, et reste en suspension dans l'eau.*

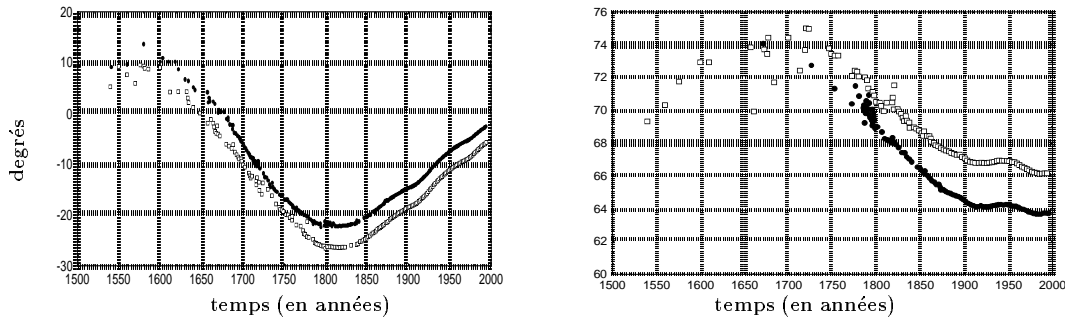
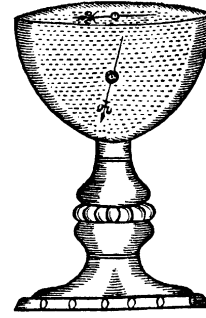


FIG. 0.4 – *Représentation de la déclinaison (à gauche) et de l'inclinaison (à droite) pour Paris et Londres depuis 1540, à partir des mesures historiques ajustées aux observatoires actuels : Chambon-la-Forêt (Paris, en symboles pleins), et Hartland (Londres, en symboles ouverts). La “variation séculaire” (lente) du champ y est très clairement visible (Alexandrescu et al., 1997).*

mesure du champ de gravité (par observation des oscillations d'un pendule), en comptant les battements d'une boussole écartée de sa position d'équilibre.

Pour mesurer de manière systématique ces composantes, Carl Friedrich Gauss a créé en 1839 à Göttingen le premier observatoire magnétique. En France, le premier observatoire est installé en 1883 au parc de Saint-Maur (transféré en 1901 près de Versailles, il est depuis 1936 à Chambon-la-forêt, voir Alexandrescu et al. 1997). On apprend beaucoup sur le champ magnétique de la Terre par son observation. Outre des variations rapides et de faibles amplitudes (d'origine externe), on décrit la variation séculaire, cette évolution lente et assez régulière du champ (voir figure 0.4). Elle peut entraîner une variation de l'intensité du champ de quelques pour-mille par an. Ces variations ont de quoi impressionner. Arago commence le chapitre de ses oeuvres consacré au magnétisme terrestre par

cet avertissement :

« Rien, dans le vaste domaine de la physique du globe, n'est plus caché, n'est plus incertain, que les causes qui en chaque lieu font varier les trois éléments du magnétisme terrestre, savoir : la déclinaison, l'inclinaison et l'intensité. »

François Arago,
Oeuvres complètes.

et James Clerk Maxwell note à la fin de son chapitre sur le magnétisme terrestre de son traité d'électricité et de magnétisme :

« When we consider that the intensity of the magnetization of the great globe of the earth is quite comparable with that which we produce with much difficulty in our steel magnets, these immense changes in so large a body force us to conclude that we are not yet acquainted with one of the most powerful agent in nature, the scene of whose activity lies in those inner depths of the earth, to the knowledge of which we have so few means of access. »

James Clerk Maxwell,
Electricity and Magnetism.

Malgré l'absence de moyens d'accès directs aux profondeurs de la Terre, des caractéristiques plus étonnantes encore du champ furent découvertes ensuite en étudiant les traces des temps anciens. A la fin du XIX^e siècle, on s'aperçoit que l'orientation de l'aimantation de certaines roches coïncide avec le champ terrestre, c'est l'aimantation rémanente naturelle, qui est à la base du paléomagnétisme et de l'archéomagnétisme. Des laves en se refroidissant ont enregistré le champ magnétique ambiant au moment de leur solidification. On peut donc envisager, en lisant convenablement ces enregistrements, d'étudier les variations du champ magnétique de la Terre sur des échelles de temps bien plus grandes que celles jusque là accessibles (par observations directes). Grâce aux études paléomagnétiques, la connaissance du champ magnétique terrestre s'accroît considérablement. On apprend que celui-ci existe depuis au moins 3,5 milliards d'années (les plus vieux enregistrements remonteraient même à 3,8 milliards d'années), et surtout, on explore ses variations sur de grandes échelles de temps.

En 1906, Bernard Brunhes découvre que certains échantillons présentent une aimantation rémanente dont la direction est opposée à celle du champ actuel ! Le champ magnétique de la Terre se serait donc inversé au cours de son histoire. L'existence de ces inversions du champ fut controversée jusque vers 1950 (voir Valet et Courtillot, 1992). Elle est à présent bien établie (voir figure 0.5).

Aucun des mécanismes envisagés jusque là pour expliquer le champ géomagnétique ne peut rendre compte d'une telle variabilité dans le temps.

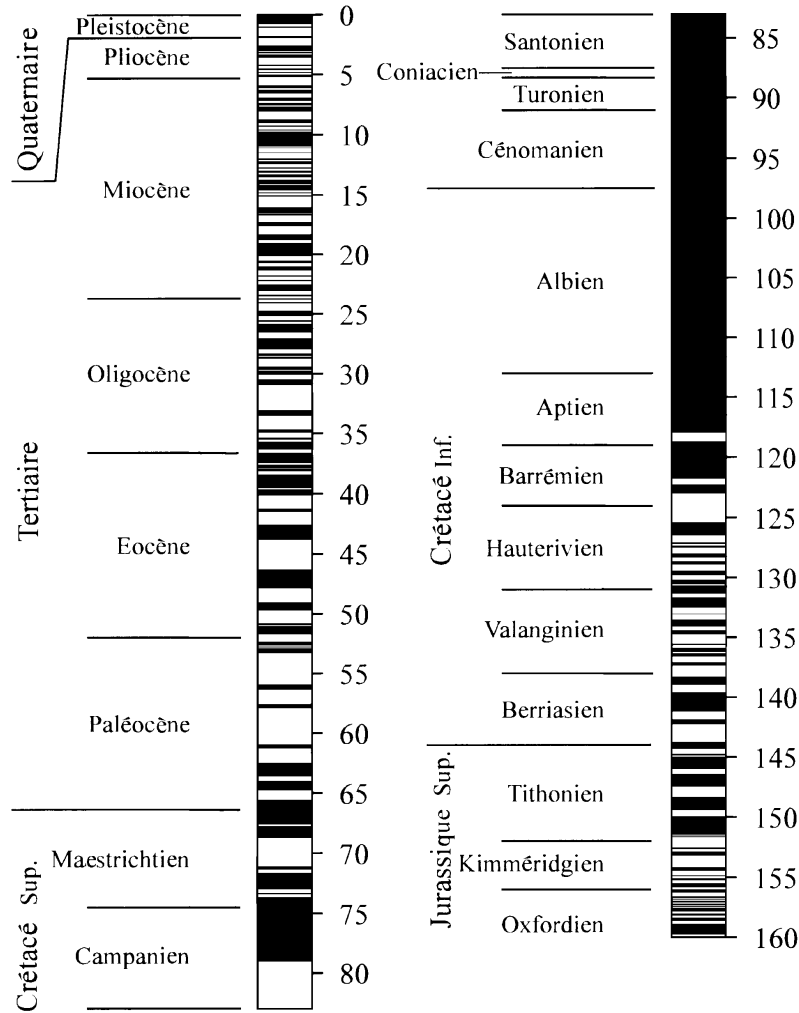


FIG. 0.5 – Polarité de la partie dipolaire axiale du champ magnétique terrestre reconstruite grâce au paléomagnétisme pour les 160 derniers millions d'années (d'après Merrill et al. 1996). En noir les périodes de champ "normal", c'est-à-dire de même direction que le champ actuel (le pôle sud magnétique près du pôle nord géographique; le pôle nord de la boussole "pointant" vers le nord géographique), en blanc les périodes inverses. Il est intéressant de noter le caractère apparemment chaotique de ces inversions. Certaines périodes se prolongent sur plus de 30 millions d'années, alors que d'autres font à peine la taille du trait sur cette figure (les plus courtes qui aient été enregistrées feraient à peine 30 000 ans).

En 1919, Sir Joseph Larmor propose trois possibilités pour expliquer le champ magnétique du soleil. A la fin de son article, il note que seule l'une d'entre elles pourrait être appliquée à la Terre, mais reste prudent, car cela nécessiterait que des régions profondes de notre planète soient fluides. Il décrit cette possibilité en ces termes :

« In the case of the sun, surface phenomena point to the existence of a residual internal circulation mainly in meridian planes. Such internal motion path around the solar axis planes. Such internal motion induces an electrical field acting on the moving matter; and if any conducting path around the solar axis happens to be open, an electrical current will flow round it, which may in turn increase the inducing magnetic field. In this way it is possible for the internal cyclic motion to act after the manner of the cycle of a self-exciting dynamo, and maintain a permanent magnetic field from insignificant beginnings, at the expense of some of the energy of the internal circulation. »

Sir Joseph Larmor,
Electrical Review.

En simplifiant quelque peu, elle peut se résumer ainsi : si l'on admet qu'un champ magnétique existe, et s'il baigne dans un fluide conducteur en mouvement, ces mouvements d'un conducteur dans un champ magnétique peuvent induire des courants. A ces courants est associé un second champ magnétique, et si celui-ci vient renforcer le champ déjà existant, on peut alors obtenir une dynamo⁴ auto-excitée.

Peu de temps après, le sismologue Beno Gutenberg montre, par l'observation des temps d'arrivée d'ondes sismiques ayant traversé la planète, que la Terre possède un noyau. Retardé par la seconde guerre mondiale, Walter Elsasser s'appuyant sur la découverte de Gutenberg, publie en 1946 un travail divisé en trois articles, reprenant et formalisant le mécanisme proposé par Larmor, jetant les bases d'une théorie dynamo dans le noyau fluide de la Terre. Cette théorie est la seule proposée qui permette de rendre compte, tant de la variation rapide des termes non dipôles du champ magnétique (variation séculaire), que des inversions de sa partie dipôle.

Elsasser sera suivi par Bullard en 1949, et bien d'autres après. Il serait certainement passionnant de pouvoir décrire l'histoire de la théorie dynamo, et de connaître les contributions des chercheurs qui l'ont développée, malheureusement cela sort du cadre de cette introduction⁵. Je me borne à rappeler deux événements d'importance. En 1934, Thomas Cowling démontre qu'un champ purement

4. Elle a ceci de commun avec la dynamo de vélo qu'elle transforme de l'énergie cinétique en énergie magnétique. Mais c'est tout ! La dynamo de vélo utilise pour cela un aimant, elle n'est pas "auto-excitée". De plus les courants y sont contraints à l'aide de bobinages, alors que le noyau dans son ensemble est un conducteur.

5. Façon à peine voilée de dire que j'en suis malheureusement encore incapable !

axisymétrique ne peut être entretenu par une action dynamo. C'est le premier théorème anti-dynamo (d'autres sont découverts par la suite). Il est de taille, car le champ de la Terre étant essentiellement dipolaire axial, il était tentant d'imaginer un modèle purement axisymétrique. On peut alors se demander s'il n'existe pas un théorème anti-dynamo général! En 1958, Herzenberg et Backus exhibent indépendamment des familles de mouvements capables de faire croître un champ magnétique, un tel théorème ne saurait donc exister. Depuis lors, la théorie dynamo étant la seule à pouvoir rendre compte des observations est très largement acceptée, elle n'a cependant jamais été démontrée.

Ce que l'on sait aujourd'hui sur l'intérieur de notre planète nous donne-t-il de nouvelles pistes?

Les progrès de la sismologie ont été rapides et considérables. En 1981, Dziewonski et Anderson proposent un modèle de Terre en couches sphériques concentriques, que l'on appelle PREM⁶, et qui sert aujourd'hui encore de référence. Ce modèle est établi à partir des observations sismologiques (ondes et modes normaux), ainsi que de la masse et du moment d'inertie terrestres. Il apporte une grande quantité d'informations sur le noyau terrestre. Il spécifie la densité, ρ , en fonction de la distance au centre de la Terre (premier graphe de la figure 0.6). On peut vérifier qu'elle varie assez peu dans le noyau, avec une légère discontinuité entre la graine et le noyau liquide. On peut en déduire, par intégration, un modèle de gravité. On montre que, pour une Terre à symétrie sphérique et homogène, la pesanteur varierait linéairement avec la distance au centre. Cela dérive de la formule de Gauss sur une sphère de rayon r ,⁷

$$(0.1) \quad \int_{S_r} \vec{g} \cdot \vec{n} dS = -4 \pi G \int_{V_r} \rho dV ,$$

où G est la constante de gravitation universelle, et \vec{n} la normale sortante à la sphère, d'où avec nos hypothèses

$$(0.2) \quad \|\vec{g}\| (4 \pi r^2) = 4 \pi G \rho \left(\frac{4}{3} \pi r^3 \right) ,$$

$$(0.3) \quad \|\vec{g}\| = \frac{4}{3} \pi G \rho r .$$

On vérifie alors que, bien que l'hypothèse d'homogénéité soit fautive, le profil de gravité ne diffère que très peu d'un profil linéaire dans le noyau (deuxième graphe de la figure 0.6). Le modèle PREM spécifie également les vitesses des ondes P et des ondes S (non représentées ici), on peut donc construire le coefficient de compressibilité, $1/K$, (troisième graphe de la figure 0.6). On note que le noyau est très faiblement compressible (de l'ordre de 10^{-12} Pa^{-1}). On peut également

6. PREM=Preliminary Reference Earth Model

7. On note que seules les masses internes à la sphère considérée ont en définitive un effet (l'intégrale sur la sphère s'annulant pour les masses externes).

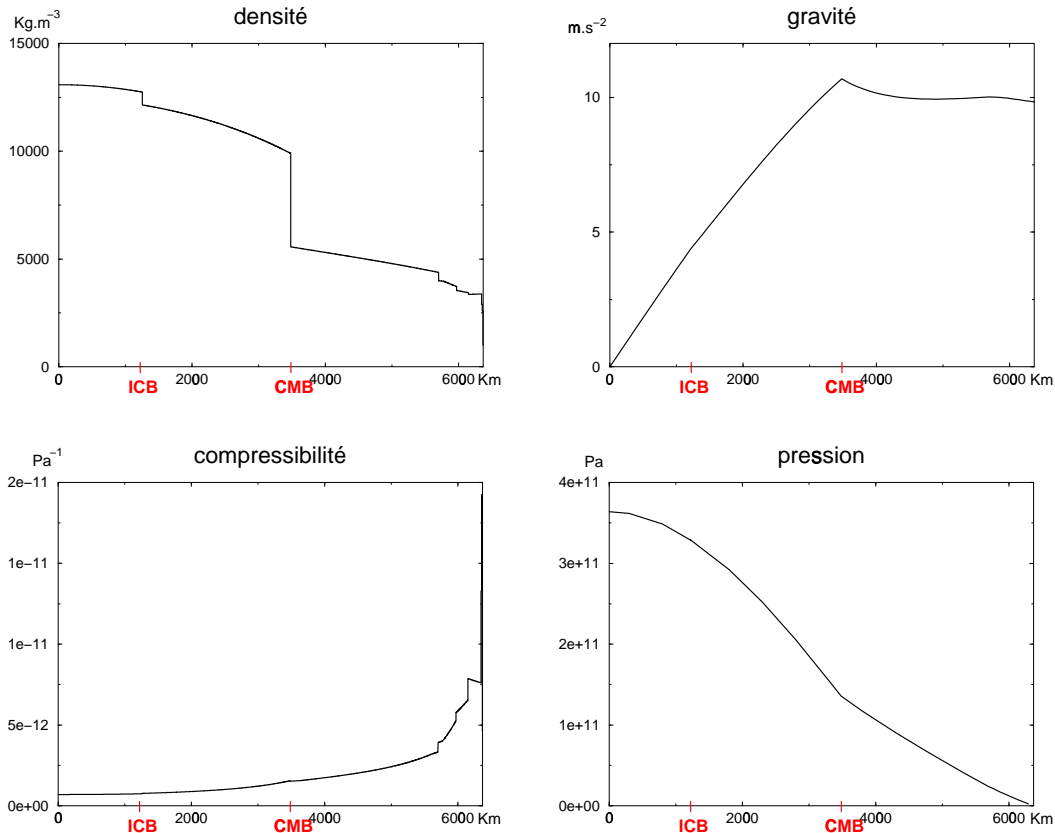


FIG. 0.6 – Le modèle de Terre PREM, à symétrie sphérique, spécifie à partir d'observations sismologiques la densité, ρ , en fonction de la distance au centre de la Terre (en haut à gauche), par intégration on construit alors un modèle de gravité, g (en haut à droite). Le modèle PREM spécifie également les vitesses des ondes P et des ondes S (non représentées ici), on peut donc construire le coefficient de compressibilité, $1/K$ (en bas à gauche). A partir de la densité et de la gravité en supposant un équilibre hydrostatique, on peut également construire un modèle de pression p (en bas à droite).

estimer un profil de pression en supposant un équilibre hydrostatique dans le noyau, on a alors

$$(0.4) \quad \vec{\nabla} P(r) = \rho(r)\vec{g}(r)$$

ce qui donne un modèle de pression hydrostatique dans la Terre (quatrième graphe de la figure 0.6). On le voit, l'approche sismologique fournit des informations très riches sur l'intérieur de la Terre.

D'autres informations importantes sont apportées par différentes branches des sciences. La géochimie aide à comprendre la composition du noyau. A partir des résultats de l'observation des météorites, on pense que le noyau terrestre est essentiellement constitué de fer mélangé à des éléments plus légers (sans doute un mélange de divers éléments: soufre, oxygène, silicium,...). Ceci est confirmé par l'observation du moment d'inertie de la planète. Les caractéristiques du fer (viscosité, conductivité électrique, conductivité thermique) aux conditions de température et de pression du noyau sont très mal connues. On les estime par extrapolation de mesures faites à des conditions moins extrêmes (mais déjà très difficiles à atteindre). La connaissance de la conductivité du noyau liquide est très importante, car elle permet d'estimer en combien de temps les courants y circulant seraient dissipés par effet Joule s'ils n'étaient pas entretenus. C'est le temps diffusif, ou constante de temps de Cowling, qui correspond au temps caractéristique de diffusion du champ dans un conducteur au repos. Si η est le coefficient de diffusion magnétique construit sur la conductivité et r le rayon du noyau, cette constante est de l'ordre de r^2/η (soit environ 100 000 ans pour la Terre). On peut calculer plus précisément cette constante dans le cas d'une sphère: $r^2/(\pi^2 \eta)$ (dans une sphère, le dipôle diffuse avec cette constante de temps, c'est le mode le plus lentement décroissant), soit environ 10 000 ans pour la Terre. Or, on l'a vu, le paléomagnétisme nous apprend que le champ magnétique de la Terre existe depuis au moins 3,5 milliards d'années. C'est un point important, car cela justifie que l'on cherche la source des courants qui sont à son origine.

On a pu reconstruire les variations du champ sur des échelles de temps diverses. L'archéomagnétisme, grâce aux enregistrements du champ dans des fours de potiers ou dans des briques (datés indépendamment par ailleurs), a permis de reconstituer l'inclinaison et la déclinaison du champ sur la période historique. Les mesures fournissent une courbe qui se raccorde avec une précision étonnante avec celles décrite par les mesures effectuées dans les observatoires (voir figure 0.7), et permettent une observation plus étendue de la variation séculaire.

La mesure du champ en plusieurs points du globe permet d'en connaître l'allure spatiale. Si l'on admet que les sources du champ géomagnétique sont bien dans le noyau (c'est-à-dire à des profondeurs supérieures à 2891 km), et si le manteau n'est pas trop conducteur de l'électricité, on peut alors prolonger le potentiel de Gauss duquel dérive le champ et en déduire le champ sortant à la frontière Noyau-Manteau (voir figure 0.8).

Il est important de noter que si la décroissance du potentiel de Gauss en

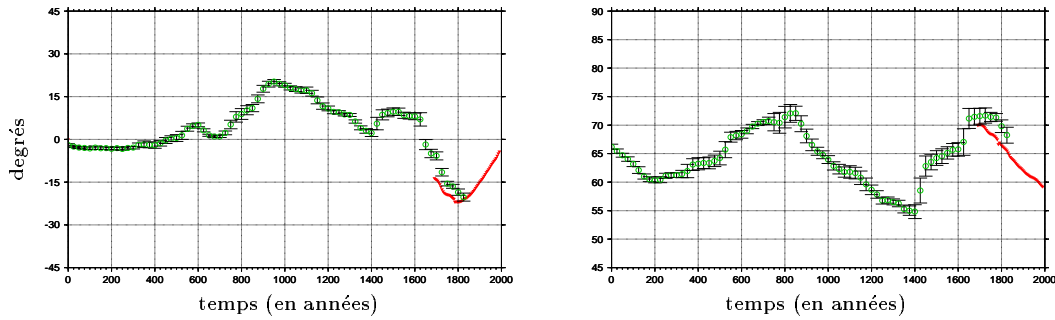


FIG. 0.7 – La déclinaison (à gauche) et l'inclinaison (à droite) du champ magnétique en France reconstruites (en vert) à partir des mesures archéomagnétiques (d'après Daly et Le Goff, 1995), et (en rouge) des mesures historiques (d'après Bloxham et Jackson, 1992). La jonction entre ces deux types de mesures est très satisfaisante, et l'on peut avoir connaissance grâce à l'archéomagnétisme des variations du champ sur une plus grande échelle de temps (courtoisie L. Hongre).

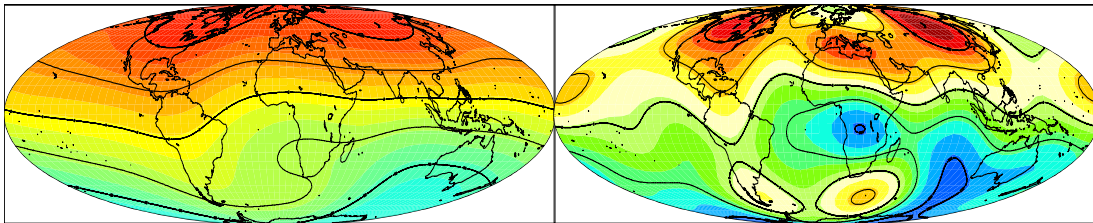


FIG. 0.8 – Modèle de champ (composante radiale) développé jusqu'au degré 6, pour 1992. À gauche à la surface de la Terre et à droite à la frontière noyau-manteau. Modèle obtenu à partir des données du satellite POGS et des données d'observatoires terrestres. Le code de couleur va de $5 \cdot 10^4$ nT (rouge) à $-5,7 \cdot 10^4$ nT (bleu) à gauche, et de $6,27 \cdot 10^5$ nT (rouge) à $-4,87 \cdot 10^5$ nT (bleu) à droite (P.Ultre Guérard, 1996).

fonction du degré de l'harmonique (en $\ell(\ell + 1)$) suffirait à expliquer qu'à la surface de la Terre (donc "loin des sources") le champ soit dominé par le dipôle, ces prolongements montrent que le champ est déjà très largement dipolaire axial à la frontière avec le noyau.

On peut également, en calculant la décomposition en harmoniques sphériques du champ, illustrer la variation séculaire du champ par sa représentation à diverses époques à l'interface noyau-manteau (figure 0.9).

Enfin, aidé d'hypothèses assurant l'unicité, on peut déduire de ces variations du champ à la surface du noyau les mouvements tangentiels qui ont pu les causer. On établit alors des cartes de mouvements à la surface du noyau⁸ (voir figure 0.10).

Notre connaissance du noyau de la Terre et du champ magnétique a donc extrêmement progressé, et pourtant, on ne sait toujours pas comment le champ induit par les mouvements du fer liquide renforce le champ principal, pourquoi le champ est de nature essentiellement dipolaire, pourquoi ce dipôle est en moyenne aligné avec l'axe de rotation de la Terre, ni pourquoi le champ varie et s'inverse...

Ces dernières années ont vu l'apparition de nombreuses études numériques ayant pour but de faire progresser notre compréhension de ces questions : modèles presque axisymétriques, modèles hyper-visqueux (Gary Glatzmaier et Paul Roberts 1995, Weijia Kuang et Jeremy Bloxham 1997), modèles hyper-visqueux à " $2 + \frac{1}{2}$ " dimensions (Graeme Sarson et al. 1997). Ces études nécessitent des calculs très ardues. Pour les simplifier, elles sont réalisées dans des régimes de paramètres très éloignés de la Terre, et sont souvent limitées à une ou deux réalisations (sans faire varier les paramètres). Cela rend leur interprétation difficile et parfois contradictoire. Les interactions nécessaires entre les indications des simulations numériques et les études théoriques et expérimentales sont naissantes dans ce domaine. Tout cela incite bien sûr à la plus grande prudence vis à vis des modèles numériques de la dynamo terrestre, et l'on est en droit de se demander si les simulations par ordinateur peuvent faire progresser notre compréhension de ce problème.

La difficulté du problème incite à la plus grande modestie quant aux objectifs de notre travail. On s'efforcera simplement de montrer dans cette thèse que, bien utilisée, et en interaction avec la théorie et l'expérience, la modélisation numérique peut, et doit, permettre de faire progresser notre compréhension des équilibres existants dans le noyau terrestre et donnant naissance au champ magnétique. Nous essaierons de montrer à travers des études de problèmes simplifiés que, pour faire progresser notre compréhension du champ magnétique terrestre à l'aide de modèles numériques, il faut s'efforcer d'approcher des caractéristiques qui font la spécificité de l'induction dans le noyau terrestre, à savoir une rotation très rapide devant les autres constantes de temps, et une diffusion du champ magnétique très

8. Réalisées sous l'hypothèse de mouvement de grande échelle, et du "flux gelé" (diffusion négligeable devant le transport).

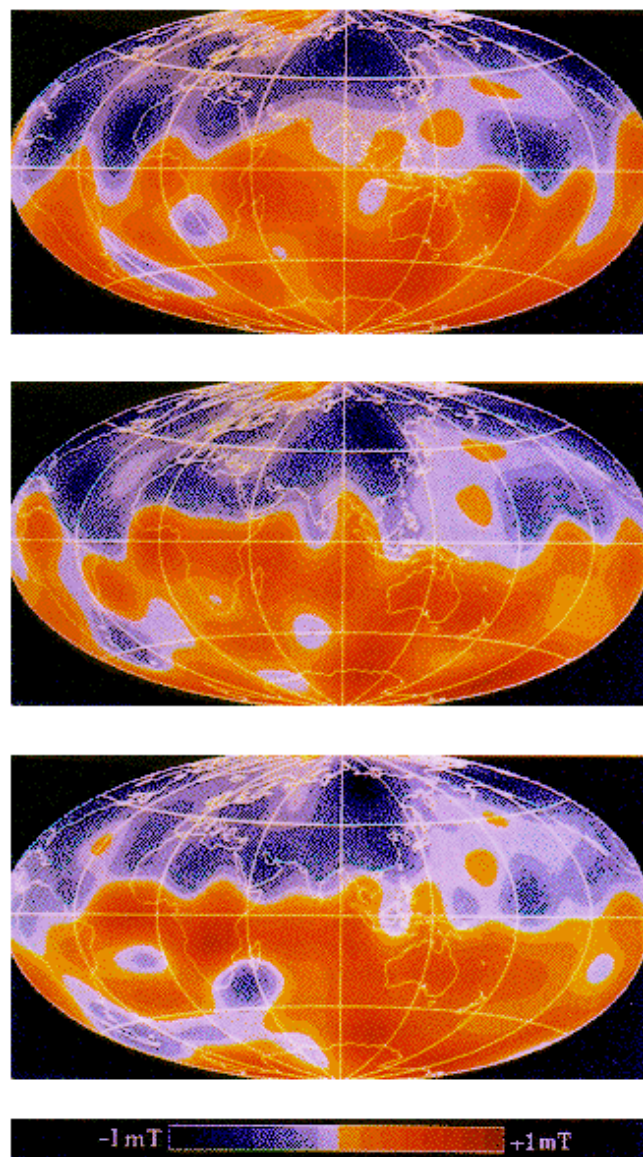


FIG. 0.9 – Composante radiale du champ magnétique à la frontière noyau-manteau, reposant sur la prolongation des mesures de surface en 1777, 1882 et 1980. Le flux magnétique s'échelonne de -1 (bleu) à +1 (orange) militesla. Le champ n'est pas un simple dipôle, mais sa structure est tout de même largement dominée par le terme dipolaire (J. Bloxham, D. Gubbins 1985).

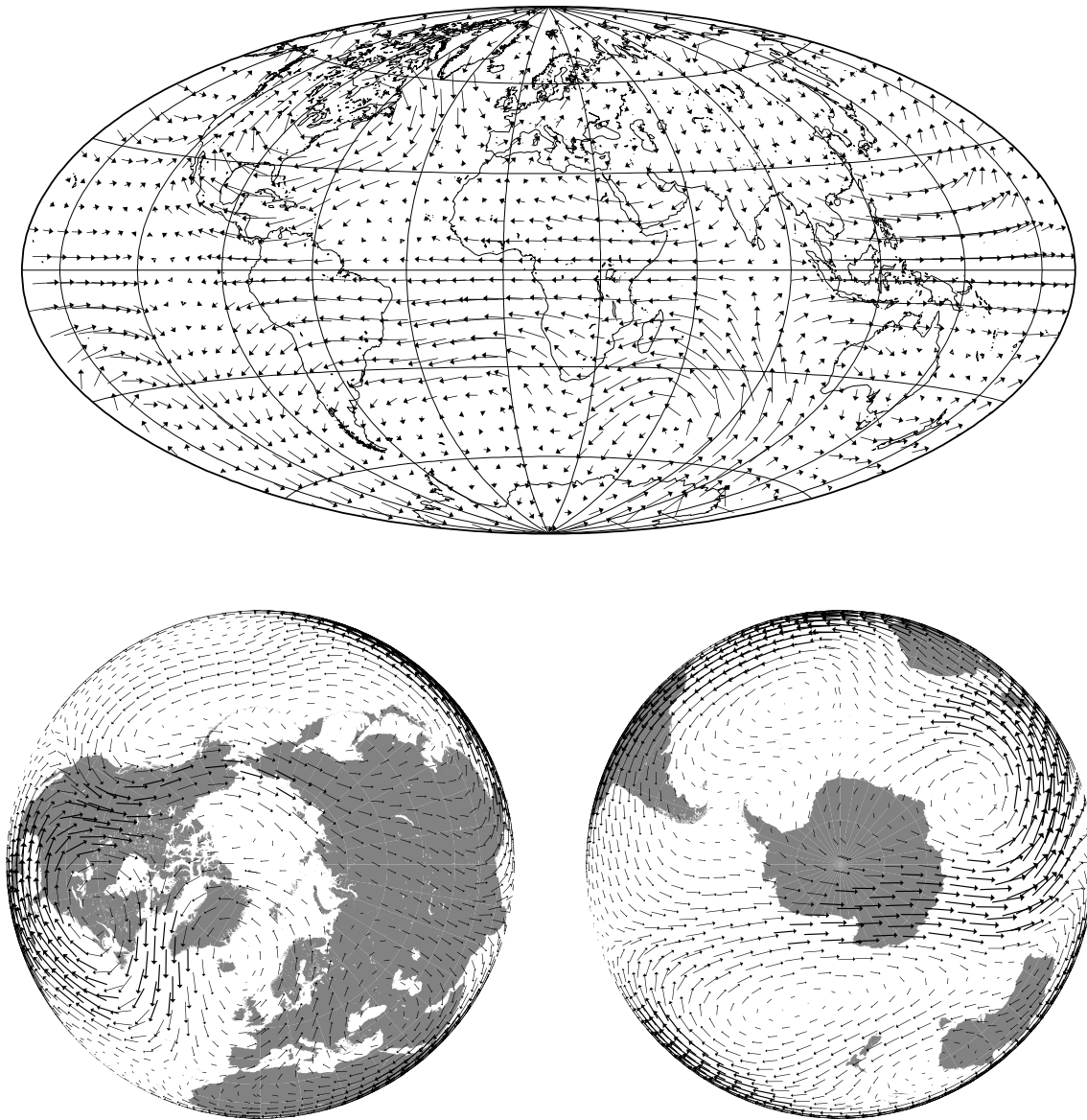


FIG. 0.10 – Cartes de mouvements à la surface du noyau déduites de la variation séculaire du champ magnétique pour 1980 (courtoisie A. Pais et G. Hulot).

efficace devant les diffusions des autres grandeurs.

Nous nous intéresserons dans un premier temps aux hypothèses permettant d'établir un modèle mathématique des équilibres existants dans le noyau. Nous présenterons alors les approximations choisies pour en permettre une résolution numérique approchée. Nous appliquerons ensuite ces méthodes à deux problèmes simplifiés. Le premier, a priori assez éloigné des mécanismes pouvant exister dans le noyau, nous permettra néanmoins d'étudier avec attention les divers équilibres possibles en fonction des régimes de paramètres étudiés. Le second concerne les mouvements convectifs près du seuil ; bien que n'impliquant pas d'effets magnétiques, il constitue une étape obligée vers un modèle de géodynamo. Nous nous sommes également efforcé d'étudier les différents équilibres possibles.

Bibliographie

Mioara Alexandrescu, Vincent Courtillot, Jean-Louis Le Mouél, 1997

*High-resolution secular variation of the geomagnetic field
in western Europe over the last four centuries:
Comparison and integration of historical data from Paris and London.*
Journal of Geophysical Research, **102**, B 9, p.20 245–20 258.

François Arago, 1865

Oeuvres complètes.
Legrand, Pomey et Crouzet, Paris.

George Backus, 1958

A class of self-sustaining dissipative spherical dynamos,
Annals of Physics **4**, p.372–447.

Peter Barlow, 1831

*On the probable Electric Origin of all the Phenomena
of Terrestrial Magnetism ;
with an illustrative Experiment.*
Philosophical Transaction, part 1., p.99–108.

Antoine Becquerel, 1834

*Traité expérimental de l'électricité et du magnétisme
et de leurs rapports avec les phénomènes naturels.*
Firmin Didot frères, Paris.

Antoine Becquerel, 1847

Elements de physique terrestre et de météorologie.
Firmin Didot frères, Paris.

Jeremy Bloxham, David Gubbins et Andrew Jackson, 1989

Geomagnetic secular variation
Philosophical Transaction of the Royal Society (London)
A329, p.415–502.

Vincent Courtillot, 1996

La vie en Catastrophes
Fayard.

René Descartes, 1644 (en latin), 1647 (en français)

Principia philosophiae,
(Principes de la philosophie).
Re-édition : Librairie J. Vrin Paris, 1978.

A. Dziewonski et D. Anderson, 1981

Preliminary Reference Earth Model PREM

Physics of the Earth and Planetary Interiors, **25**, 297-356.

Walter Elsasser, 1946

Induction Effects in Terrestrial Magnetism

Physical Review, **69**, No 3 & 4, p.106–116.

Physical Review, **70**, No 3 & 4, p.202–212.

Physical Review, **72**, No 9, p.821–833.

Michael Faraday, 1839

Terrestrial Magneto-electric Induction

dans *Experimental researches in electricity*

Richard and John Edward Taylor, London.

William Gilbert, 1600

De Magnete

Traduction Anglaise (P.F.Mottelay): John Wiley & Sons, 1893,

Re-édition: Dover Publications Inc., 1958, 1991.

A. Herzenberg, 1958

Geomagnetic dynamos

Proceedings of the Royal Society of London A,

250, p.543–584.

Lionel Hongre, 1997

Contribution à la modélisation du champ géomagnétique dans le temps et dans l'espace.

Thèse I.P.G.P.

Joseph Larmor, 1919

How the Sun might have become a Magnet.

The electrical review, **85**, No. 2, p.412.

repris à quelques modifications près dans :

How could a Rotating Body such as the Sun become a Magnet?

Report of the XVIIIth meeting of the British association for the advancement of science, Bournemouth 1919.

Gaston Laurent, 1924

Les Grands Ecrivains Scientifiques

(de Copernic à Berthelot).

Librairie Armand Colin, Paris.

Jean-Louis Le Mouél, 1976

Le champ géomagnétique et L'origine du champ magnétique terrestre
dans *Traité de Géophysique Interne, tome II*
Coulomb Jean et Georges Jobert
Masson.

Daniel Mattis, 1965

The theory of magnetism
Harper & Row.

James Clerk Maxwell, 1873

A Treatise on electricity and magnetism
Oxford : Clarendon Press.

Ronald Merrill, Michael McElhinny, et Phillip McFadden, 1996

The Magnetic Field of the Earth
Academic Press.

Robert Norman, 1585

The Newe Attractive.

Jean-Paul Poirier, 1991

Les profondeurs de la Terre
Masson.

Jean-Paul Poirier, 1996

Le noyau de la Terre
Dominos, Flammarion.

Patricia Radelet de Grave, 1982

Les lignes magnétiques du XIII^e siècle au milieu du XVIII^e siècle
Cahiers d'Histoire et de Philosophie des Sciences, No 1, C.N.R.S.

Graeme Sarson, Chris Jones et Aaron Longbottom

Convection driven geodynamo models of varying Ekman number.
en préparation pour Geophysical and astrophysical fluid dynamics.

Pascale Ultré-Guérard, 1996

Du Paléomagnétisme au Géomagnétisme spatial:
analyse de quelques séquences temporelles du champ magnétique terrestre.
Thèse I.P.G.P.

Jean-Pierre Valet et Vincent Courtillot, 1992

Les inversions du champ magnétique terrestre.
La Recherche, **23**, p.1002-1013.

Summary

In this chapter, we introduce the equations of incompressible MHD, that will be used as a model for induction in the Earth's core. Doing so, we try and insist on the underlying hypotheses (for clarity they are expressed in the beginning of each section of §1.1). Boussinesq approximation is adopted (leaving aside the question of the adiabatic gradient); precession forces are neglected (the core is considered spherical); variations of the length of the day are also neglected; the fluid in the core is supposed to be newtonian. Buoyancy force is adopted as the only driving force.

In §1.2, we recall boundary conditions for velocity, temperature, and induction fields. Most of our studies will be performed with no-slip boundary conditions. Both no-slip and free-slip boundary conditions are presented here.

Chapitre 1

Modélisation



Nous allons approcher la géométrie du noyau liquide de la terre par une coquille parfaitement sphérique, de rayon interne r_i , et externe r_e (cf figure 1).

On définit le rapport d'aspect $\tilde{\eta}$ de cette coquille par

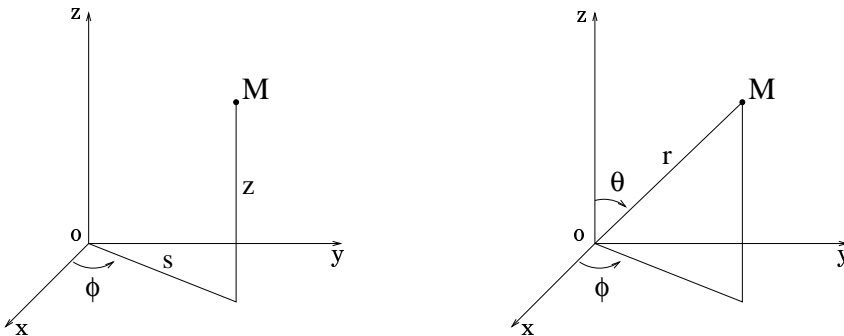
$$(1.1) \quad r_i = \tilde{\eta} r_e,$$

et la distance d par

$$(1.2) \quad d = r_e - r_i = (1 - \tilde{\eta}) r_e.$$

On utilisera par la suite les coordonnées cylindriques $(\vec{e}_s, \vec{e}_\phi, \vec{e}_z)$, ou les coordonnées sphériques $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\phi)$ en fonction des simplifications qu'elles apportent aux calculs. On définit les vecteurs

$$(1.3) \quad \vec{s} = s \vec{e}_s, \quad \vec{r} = r \vec{e}_r.$$



Il existe deux candidats pour générer les mouvements, le couple luni-solaire et la force d'Archimède. L'axe de rotation terrestre décrit en 26000 ans un cône dont

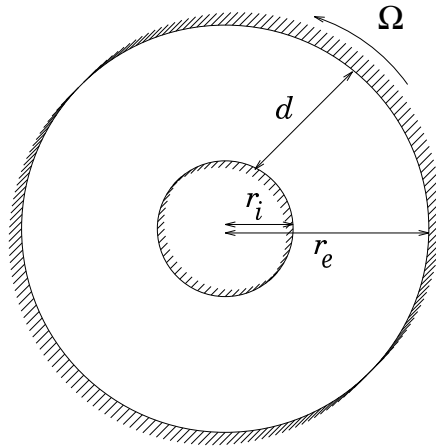


FIG. 1.1 – La géométrie que nous nous proposons d’étudier (représentée ici en coupe) est une simplification de celle du noyau liquide de la terre ; les éventuels reliefs des frontières sont négligés, et l’ellipsoïde est ramené à une sphère.

l’axe est la normale au plan de l’écliptique : c’est la précession luni-solaire. Les calculs d’ordres de grandeur montrent qu’elle pourrait fournir l’énergie nécessaire à la dynamo (voir Malkus, 1994). Pour étudier cet apport d’énergie, on ne peut négliger l’écart à la sphéricité, et il est nécessaire de travailler dans un ellipsoïde. La force d’Archimède suppose qu’en certains endroits le fluide soit plus léger qu’en d’autres, cela peut avoir au moins deux causes. La première est la dilatation thermique : si le liquide est chauffé, il se dilate, et est localement plus léger. La prise en compte de ce “moteur” nécessite donc la modélisation de la température dans le fluide (ou plutôt de sa perturbation par rapport à un état de référence). Les sources de chaleur possibles sont diverses. La première est sans doute le refroidissement séculaire de la terre, qui mène à une température plus faible près de l’interface avec le manteau qu’au centre du noyau. A ce refroidissement est associé la croissance de la graine, et la chaleur latente de solidification du fer près de la graine. Le mouvement lui-même crée de la chaleur à l’intérieur du domaine par dissipation ohmique. On ne peut pas exclure non plus la possibilité de sources radioactives de chaleur (comme c’est le cas dans le manteau), mais elles seraient de faible importance. A ces différences de densité peuvent être associés des mouvements, on parle alors de convection thermique (voir Verhoogen 1980, Cardin et al. 1992, Labrosse 1997). Une autre source de différence de densité pourrait résider en une différence de composition locale du fluide. On l’a dit, le fer dans le noyau liquide n’est pas tout à fait pur, la croissance de la graine par solidification va donc concentrer la composition du fluide en certains de ses éléments légers qui sont contenus dans le fluide (le noyau n’a probablement pas la composition eutectique), cela mène à des différences de densité, donc à une force d’Archimède, on parle alors de convection solutale.

Nous n’étudierons ni les effets de la précession, ni la convection solutale, et

nous nous concentrerons sur les différents chauffages possibles et leurs conséquences.

Il existe divers modes de propagation de la chaleur

- Par rayonnement : tout corps émet par sa surface des radiations (visibles ou non). Les métaux étant opaques aux radiations, ce mode ne peut servir à l'intérieur du noyau (car le libre parcours moyen des photons y est très faible).
- Par conduction : c'est-à-dire par transport direct de la chaleur à travers un milieu au repos et sans intervention de rayonnement.
- Par convection : c'est-à-dire par mouvements (dans un fluide).

Nous retiendrons la conduction et la convection. On peut dériver un profil conductif qui servira d'état de base pour la convection, et qui dépend du chauffage envisagé. C'est au dessus de cet état de base que se développera la convection. L'hypothèse la plus discutée que nous ferons pour étudier la convection est sans doute celle de Boussinesq, qui consiste à supposer que le fluide est incompressible (sauf pour la densité du fluide dans la force d'Archimède). En se référant au modèle PREM on obtient une compressibilité de 20% .

Apparaît alors une notion importante pour le noyau : le gradient thermique adiabatique. Si l'on déplace une particule de fluide radialement, elle subit une variation de pression, entraînant une variation de volume et de température. Si on la déplace sans échange de chaleur avec l'extérieur, elle décrit le gradient thermique que l'on nomme "adiabatique". Ce gradient de température est donc tel que la variation de température d'une particule fluide ainsi déplacée la laisse en équilibre thermique avec le milieu qui l'entoure.

On le définit comme

$$(1.4) \quad \frac{\partial T}{\partial r} = \frac{g\alpha T}{c_p},$$

où α est le coefficient de dilatation thermique, et c_p la chaleur spécifique à pression constante, et $g = \vec{g} \cdot \vec{e}_r$ est compté négativement.

On observe expérimentalement qu'un gradient adiabatique s'établit quand le fluide est bien brassé. On espère donc que ce modèle incompressible est significatif pour la convection développée, il ne permet toutefois pas de rendre compte de la convection au seuil dans le noyau.

La notion de gradient adiabatique n'a bien sûr de sens que si l'on tient compte de la compressibilité du fluide. Elle n'a pas de sens pour un modèle Boussinesq. Le gradient moteur de la convection dans un fluide compressible est le gradient sur-adiabatique. Pour tenter de comparer les simulations Boussinesq avec la terre, il faut donc considérer, comme paramètre pour la simulation, la température à l'intérieur de la Terre, une fois soustrait le gradient adiabatique. Ceci est un problème, car si le gradient de température de la terre est assez bien connu, le gradient sur-adiabatique est quant à lui très mal connu.

Nous définissons dans la section suivante les équations que nous considérerons.

1.1 Les équations du problème

Ces équations ne sont pas nouvelles, elles remontent pour la partie mécanique des fluides à Leonhard Euler et Jean d'Alembert (XVIII^e siècle) pour un fluide “parfait”, puis à Louis Navier (XIX^e siècle). Pour la partie magnétisme les équations fondamentales sont celles de Maxwell (XIX^e siècle), et l'équation d'induction est déjà sous cette forme dans l'article de 1946 de Walter Elsasser. Nous insisterons surtout ici sur les hypothèses sous-jacentes à ce modèle. Elle seront énoncées pour plus de clarté au début de chaque sous-section.

1.1.1 Equation du mouvement

H: Nous allons utiliser l'approximation d'un fluide newtonien et Boussinesq, c'est-à-dire que nous supposons que le fluide étudié est homogène et incompressible, sauf pour le terme de force d'Archimède, où nous tiendrons compte au premier ordre des variations spatiales de masse volumique.

Cela implique entre autres que la viscosité du fluide ne varie pas avec les variations de température.

Nous supposons de plus que la rotation $\vec{\Omega}$ de la terre est invariante au cours du temps (ce qui revient à supposer que le moment d'inertie du manteau est infini devant celui du noyau).

On va redériver l'équation de Navier-Stokes pour un fluide conducteur en rotation. Si l'on suppose le fluide incompressible, on a

$$(1.5) \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0.$$

Où \vec{u} est le champ de vitesse. Ecrivons la conservation de la masse, soit ρ la densité

$$(1.6) \quad \frac{d\rho}{dt} + \rho(\vec{\nabla} \cdot \vec{u}) = 0,$$

$$(1.7) \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{u} \cdot \vec{\nabla} \rho + \rho(\vec{\nabla} \cdot \vec{u}) = 0,$$

L'hypothèse d'homogénéité du fluide implique l'invariance de ρ en espace, et (1.5) avec (1.7) implique alors son invariance en temps

$$(1.8) \quad \rho = \rho_0.$$

puis la conservation de la quantité de mouvement (on utilise ici la convention de sommation sur les indices répétés)

$$(1.9) \quad \frac{d\rho u_i}{dt} = \frac{\partial \rho u_i}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_i}{\partial j} u_j = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial j} + f_i,$$

où σ_{ij} est le tenseur des contraintes et f_i représente les termes de forces volumiques.

On va supposer le fluide newtonien, c'est-à-dire que le tenseur des contraintes est une fonction linéaire du gradient de vitesse. On peut alors écrire la loi de comportement d'un fluide newtonien sous la forme

$$(1.10) \quad \sigma_{ij} = -p \delta_{ij} + \lambda \cdot \varepsilon_{\ell\ell}(u) \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij}(u),$$

elle fait intervenir les coefficients de viscosité λ , et μ (μ est appelé viscosité dynamique), et le tenseur des vitesses de déformation ε_{ij} défini par

$$(1.11) \quad \varepsilon_{ij}(u) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial j} + \frac{\partial u_j}{\partial i} \right).$$

Comme le fluide est incompressible ($\varepsilon_{\ell\ell} = \sum_{\ell} \frac{\partial u_{\ell}}{\partial \ell} = 0$), cette loi se simplifie en

$$(1.12) \quad \sigma_{ij} = -p \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij}(u).$$

Il vient alors, en réécrivant (1.9)

$$(1.13) \quad \rho_0 \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial u_i}{\partial j} u_j \right) = -\frac{\partial}{\partial j} p \delta_{ij} + 2\frac{\partial}{\partial j} \mu \varepsilon_{ij}(u) + f_i,$$

$$(1.14) \quad \rho_0 \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial u_i}{\partial j} u_j \right) = -\frac{\partial p}{\partial i} + \frac{\partial}{\partial j} \mu \frac{\partial u_i}{\partial j} + \frac{\partial}{\partial j} \mu \frac{\partial u_j}{\partial i} + f_i,$$

En utilisant l'homogénéité du fluide (pour $\frac{\partial \mu}{\partial j} = 0$), puis son incompressibilité

$$(1.15) \quad \rho_0 \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial u_i}{\partial j} u_j \right) = -\frac{\partial p}{\partial i} + \mu \sum_j \frac{\partial^2 u_i}{\partial j^2} + \underbrace{\mu \frac{\partial}{\partial i} \sum_j \frac{\partial u_j}{\partial j}}_{=0} + f_i,$$

$$(1.16) \quad \rho_0 \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial u_i}{\partial j} u_j \right) = -\frac{\partial p}{\partial i} + \mu \Delta u_i + f_i,$$

Soit sous forme tensorielle (Navier-Stokes)

$$(1.17) \quad \rho_0 \left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \vec{u} \underline{\nabla} \vec{u} \right) = -\vec{\nabla} p + \rho_0 \nu \Delta \vec{u} + \vec{f},$$

On a introduit ici la viscosité cinématique ν , définie comme $\nu = \mu / \rho_0$. Le tableau suivant donne, pour fixer les idées, quelques ordres de grandeurs de viscosité

(d'après Chassaing 1997, C.R.C. 1994, Padet 1991, et Poirier 1991 1994) :

	Viscosité dynamique		Viscosité cinématique	
Mercure ⁽¹⁾	$1,43 \cdot 10^{-5}$	$kg \cdot (m \cdot s)^{-1}$	$1,1 \cdot 10^{-7}$	$m^2 \cdot s^{-1}$
Gallium ⁽¹⁾	$1,02 \cdot 10^{-3}$	$kg \cdot (m \cdot s)^{-1}$	$1,7 \cdot 10^{-7}$	$m^2 \cdot s^{-1}$
Sodium ⁽¹⁾	$7,4 \cdot 10^{-4}$	$kg \cdot (m \cdot s)^{-1}$	$7,4 \cdot 10^{-7}$	$m^2 \cdot s^{-1}$
→ Noyau liq.	10^{-2}	$kg \cdot (m \cdot s)^{-1}$	10^{-6}	$m^2 \cdot s^{-1}$
Eau ⁽²⁾	10^{-3}	$kg \cdot (m \cdot s)^{-1}$	10^{-6}	$m^2 \cdot s^{-1}$
Air ⁽²⁾	$1,85 \cdot 10^{-5}$	$kg \cdot (m \cdot s)^{-1}$	$1,43 \cdot 10^{-5}$	$m^2 \cdot s^{-1}$
Huiles ⁽²⁾	$1,8 \cdot 10^{-1}$	$kg \cdot (m \cdot s)^{-1}$	$2,0 \cdot 10^{-4}$	$m^2 \cdot s^{-1}$
Glycérine ⁽²⁾	$8,0 \cdot 10^{-1}$	$kg \cdot (m \cdot s)^{-1}$	$6,3 \cdot 10^{-4}$	$m^2 \cdot s^{-1}$
Verre ⁽³⁾	10^{+6}	$kg \cdot (m \cdot s)^{-1}$	$3,9 \cdot 10^2$	$m^2 \cdot s^{-1}$

(1) à température expérimentale (i.e. supérieure à la valeur de fusion).

(2) aux conditions de températures et de pressions usuelles.

(3) à température de soufflage.

Rappelons au passage que si la viscosité cinématique est bien celle qui est significative pour nos équations, ce n'est pas celle dont on a l'intuition. Ainsi, lorsque l'on parle de viscosité cinématique, l'air est près de 15 fois plus visqueux que l'eau (à cause de sa faible densité). La viscosité dynamique du noyau liquide est comme on l'imagine plus élevée que celle de l'eau, mais la densité du noyau étant dix fois supérieure, les viscosités cinématiques sont identiques.

Le terme f dans (1.17) regroupe l'ensemble des densité de forces¹ en volume, ainsi qu'une "pseudo-force" (Coriolis) :

- la force d'*Archimède*, on utilise l'approximation dite de *Boussinesq*.

Alors que pour tout ce qui précède on a supposé le fluide homogène (cette hypothèse a été introduite pour établir l'équation (1.8)), on ne négligera pas ici la variation spatiale de ρ . La force d'*Archimède*, s'écrit

$$(1.18) \quad \delta\rho \vec{g},$$

où le vecteur \vec{g} est supposé parfaitement radial, et tel que $\vec{g} = g \vec{r} = g r \vec{e}_r$, donc non uniforme.

On utilise l'expansion thermique (variation de la masse volumique en fonction de la température) sous sa forme linéarisée

$$(1.19) \quad \rho = \rho_0 + \delta\rho = \rho_0 (1 - \alpha \Theta),$$

où $\Theta = T - T_s$. La force d'*Archimède*, s'écrit alors

$$(1.20) \quad -\rho_0 \alpha \Theta \vec{g} = \rho_0 \alpha \Theta g \vec{r}.$$

1. On parlera souvent de "forces" par abus de langage, il s'agit en fait de densité de forces (c.f. Appendice A.3)

- l'accélération de Coriolis, le fluide est en rotation rapide, nous nous plaçons dans un repère également en rotation. Le fluide subit alors une accélération d'inertie. Il ne s'agit pas à proprement parler d'une force.

Si on indice "a" les calculs effectués dans le repère absolu, et "r" ceux effectués dans le repère relatif (en rotation), on note que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial_a \rho \vec{u}_a}{\partial t} &= \frac{\partial_a}{\partial t} \rho \frac{\partial_a \vec{x}_a}{\partial t} \\
&= \left(\frac{\partial_r}{\partial t} + \vec{\Omega} \wedge \right) \rho \left(\frac{\partial_r}{\partial t} + \vec{\Omega} \wedge \right) \vec{x}_a \\
&= \left(\frac{\partial_r}{\partial t} + \vec{\Omega} \wedge \right) \left(\rho \vec{u}_r + \rho \vec{\Omega} \wedge \vec{x}_a \right) \\
&= \frac{\partial_r \rho \vec{u}_r}{\partial t} + \frac{\partial_r \rho}{\partial t} (\vec{\Omega} \wedge \vec{x}_a) + 2\rho \vec{\Omega} \wedge \vec{u}_r + \frac{\partial_r \vec{\Omega}}{\partial t} \wedge \rho \vec{x}_a + \vec{\Omega} \wedge (\rho \vec{\Omega} \wedge \vec{x}_a) \\
&= \frac{\partial_r \rho \vec{u}_r}{\partial t} + \frac{\partial_r \rho}{\partial t} (\vec{\Omega} \wedge \vec{x}_a) + 2\rho \vec{\Omega} \wedge \vec{u}_r + \rho \frac{\partial_r \vec{\Omega}}{\partial t} \wedge \vec{r} + \rho \vec{\Omega} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \vec{r}) .
\end{aligned}$$

En faisant l'hypothèse que les variations temporelles de $\vec{\Omega}$ (terme de Poincaré), comme celles de ρ , sont négligeables, il reste les deux termes

$$(1.21) \quad -2\rho \vec{\Omega} \wedge \vec{u}_r - \rho \vec{\Omega} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \vec{r}) .$$

Le terme d'inertie centrifuge $-\vec{\Omega} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \vec{r})$, peut s'écrire sous la forme

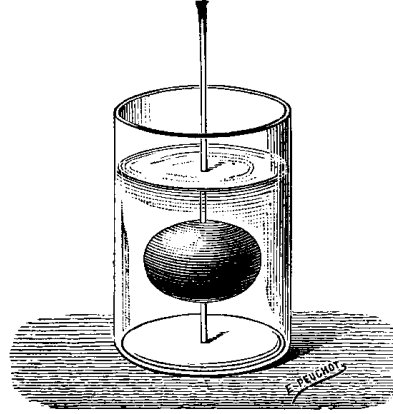
$$(1.22) \quad -\vec{\Omega} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \vec{s}) ,$$

où \vec{s} est le rayon cylindrique (précédemment défini), soit

$$(1.23) \quad -\vec{\Omega} \wedge (s\Omega \vec{e}_\phi) = -s\Omega (\vec{\Omega} \wedge \vec{e}_\phi) = s\Omega^2 \vec{e}_s = \frac{1}{2} \vec{\nabla}(\Omega^2 s^2) .$$

On peut donc écrire le terme d'accélération centrifuge sous la forme d'un gradient, et le regrouper avec le gradient de pression (cette opération utilise $\rho = \rho_0$). Plus généralement ce terme reviendrait à une modification de la pesanteur, modification que l'on négligera en supposant que la pesanteur reste radiale, et que son intensité est peu modifiée par ce terme. En fait, le problème complet suppose un équilibre entre trois forces, la gravité, la pression, et la force centrifuge; la géométrie du problème est alors un ellipsoïde (figure d'équilibre hydrostatique en rotation, *c.f.* Figure 1.2). Le détail de cet équilibre ne nous intéresse pas, puisqu'on veut en réalité étudier des perturbations de celui-ci. Pour notre modèle, nous ramenons donc cet ellipsoïde à une sphère, et cet équilibre à celui de deux forces. De ce fait, nous pouvons interpréter ce terme comme une modification de la pesanteur, dont nous ne tiendrons pas compte.

FIG. 1.2 – Une masse d’huile au sein d’un mélange d’eau et d’alcool se rassemble et prend la forme d’une sphère (les effets de la gravité étant simulés par la tension de surface). Lorsqu’on lui imprime un mouvement de rotation, au moyen d’un petit disque traversé par une aiguille, cette sphère se transforme et prend la forme d’un ellipsoïde de révolution aplati, dont le petit axe coïncide avec l’axe de révolution. Cette expérience est due au physicien belge Plateau (1873) [I.1].



— Expérience de Plateau.

On peut donc écrire l’accélération de *Coriolis* dans le référentiel relatif ($\vec{u} = \vec{u}_r$) sous la forme

$$(1.24) \quad -2\rho\vec{\Omega} \wedge \vec{u},$$

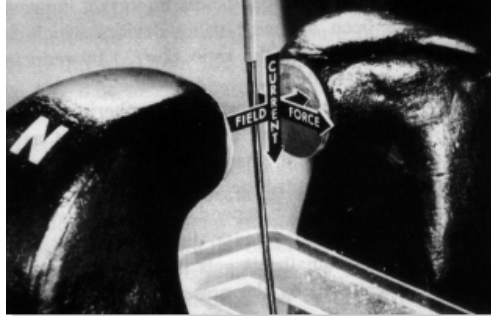
que l’on notera encore en introduisant le pseudo-scalaire Ω

$$(1.25) \quad -2\rho\Omega(\vec{e}_z \wedge \vec{u}).$$

Une autre façon de comprendre l’accélération de Coriolis (directement à partir de la vitesse) consiste à décomposer en perturbation : $u = U + u'$, où U correspond à la rotation en bloc Ω . On s’intéresse alors à l’évolution de u' , et on utilise le terme non-linéaire d’advection pour rendre compte du transport associé à l’écoulement principal en rotation en bloc. Il faut cependant prendre garde de bien écrire les variations temporelles de u' dans le nouveau repère (c’est-à-dire un repère lié à l’écoulement principal de rotation en bloc). Ainsi

$$(1.26) \quad \begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_a \vec{u}_a &= \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{u}_a^t(\phi) - \vec{u}_a^{t-\delta t}(\phi)}{\delta t}, \\ &= \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{u}_r^t(\phi) - \vec{u}_r^{t-\delta t}(\phi + \delta\phi)}{\delta t}, \\ &= \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{u}_r^t(\phi) - \vec{u}_r^{t-\delta t}(\phi)}{\delta t} + \frac{\vec{u}_r^{t-\delta t}(\phi) - \vec{u}_r^{t-\delta t}(\phi + \delta\phi)}{\delta t}, \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_r \vec{u}_r - \Omega \frac{\partial \vec{u}_r}{\partial \phi}. \end{aligned}$$

FIG. 1.3 – Un jet de mercure vertical parcouru par un courant électrique, dans un champ magnétique horizontal est dévié par la force de Laplace (Shercliff, 1972).



On a donc

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{d}{dt}\right)_a \vec{u}_a &= \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_a \vec{u}_a + \vec{u}_a \underline{\nabla} \vec{u}_a, \\
 &= \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_r \vec{u}' - \Omega \frac{\partial \vec{u}'}{\partial \phi} + (\vec{U} + \vec{u}') \underline{\nabla} (\vec{U} + \vec{u}'), \\
 (1.27) \quad &= \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_r \vec{u}' - \underbrace{\Omega \frac{\partial \vec{u}'}{\partial \phi}}_{(a)} + \underbrace{\vec{u}' \underline{\nabla} \vec{u}'}_{(b)} + \underbrace{\vec{U} \underline{\nabla} \vec{u}'}_{(c)} + \underbrace{\vec{u}' \underline{\nabla} \vec{U}}_{(d)} + \underbrace{\vec{U} \underline{\nabla} \vec{U}}_{(d)},
 \end{aligned}$$

où (a)+(b)+(c) correspond au terme d'accélération de Coriolis et (d) correspond à l'accélération centrifuge.

- la force de Laplace (de *Lorentz* dans la littérature anglo-saxonne) qui s'exerce sur la matière parcourue par un courant (*c.f.* figure 1.3),

$$(1.28) \quad \vec{j} \wedge \vec{B}.$$

En utilisant la loi d'*Ampère*², sous la forme $\mu_0 \vec{j} = \vec{\nabla} \wedge \vec{B}$, elle s'écrit

$$(1.29) \quad \frac{1}{\mu_0} (\vec{\nabla} \wedge \vec{B}) \wedge \vec{B}.$$

L'équation (1.17) s'écrit donc, dans le repère en rotation

$$\begin{aligned}
 \underbrace{\rho_0 \left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \vec{u} \underline{\nabla} \vec{u}\right)}_{\text{inertie}} &= - \underbrace{\vec{\nabla} \pi}_{\text{potentiel}} + \underbrace{\rho_0 \nu \Delta \vec{u}}_{\text{diffusion visqueuse}} + \underbrace{\rho_0 \alpha \Theta g \vec{r}}_{\text{Archimède}} \\
 &\quad - \underbrace{2\rho_0 (\vec{\Omega} \wedge \vec{u})}_{\text{Coriolis}} + \underbrace{\frac{1}{\mu_0} (\vec{\nabla} \wedge \vec{B}) \wedge \vec{B}}_{\text{Laplace}},
 \end{aligned}$$

² Les hypothèses nécessaires à son écriture seront détaillées section 2.3: Equation de l'induction.

$$(1.30) \quad \boxed{\begin{aligned} \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} &= -\vec{u} \cdot \underline{\nabla} \vec{u} - \frac{1}{\rho_0} \vec{\nabla} \pi + \nu \Delta \vec{u} - 2\Omega (\vec{e}_z \wedge \vec{u}) \\ &+ \frac{1}{\mu_0 \rho_0} (\vec{\nabla} \wedge \vec{B}) \wedge \vec{B} + \alpha \Theta g \vec{r}. \end{aligned}}$$

1.1.2 Equation d'énergie

H: Nous supposons, dans cette partie, le fluide isotrope, et parfait.

Nous supposons le fluide incompressible, la conservation de la masse tient lieu d'équation d'état.

L'équation de conservation de l'énergie s'écrit (Dautray et Lions 1984)

$$(1.31) \quad \frac{d\rho e}{dt} = \frac{\partial \rho e}{\partial t} + \vec{u} \cdot \vec{\nabla} \rho e = \sigma_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial j} - \frac{\partial q_i}{\partial i} + S,$$

où l'on note q le flux de chaleur, e l'énergie interne par unité de masse et S l'ensemble des termes sources en volume.

Puisque le fluide est newtonien et incompressible ($\lambda = 0$ dans la loi de comportement)

$$(1.32) \quad \rho_0 \left(\frac{\partial e}{\partial t} + \vec{u} \cdot \vec{\nabla} e \right) = -p \underbrace{\delta_{ij}}_{=0} \frac{\partial u_i}{\partial j} + 2\mu \varepsilon_{ij}(u) \frac{\partial u_i}{\partial j} - \frac{\partial q_i}{\partial i} + S.$$

De plus, nous nous placerons ici dans le cas d'un fluide parfait ($\mu = 0$), c'est-à-dire que nous négligerons les effets thermiques associés à la viscosité

$$(1.33) \quad \rho_0 \left(\frac{\partial e}{\partial t} + \vec{u} \cdot \vec{\nabla} e \right) = -\frac{\partial q_i}{\partial i} + S.$$

Le terme de dissipation thermique est approché par la loi de *Fourier*, (relation phénoménologique) faisant apparaître le coefficient de proportionnalité K_{ij} (tenseur de conduction thermique) entre le flux de chaleur et le gradient de température

$$(1.34) \quad q_i = -K_{ij} \frac{\partial T}{\partial j},$$

si le fluide est supposé isotrope, cette relation devient (avec $K_{ij} = k \delta_{ij}$).

$$(1.35) \quad \vec{q} = -k \vec{\nabla} T.$$

L'équation d'énergie s'écrit alors

$$(1.36) \quad \rho_0 \left(\frac{\partial e}{\partial t} + \vec{u} \cdot \vec{\nabla} e \right) = \frac{\partial}{\partial i} k \frac{\partial T}{\partial i} + S.$$

Si l'on suppose à présent que le fluide est à chaleur spécifique constante c (ce qui revient à supposer que l'énergie ne varie en temps qu'à travers les variations temporelles de la température), on a $e(T)$ sous la forme

$$(1.37) \quad e = c T,$$

et

$$(1.38) \quad \rho_0 c \left(\frac{\partial T}{\partial t} + \vec{u} \cdot \vec{\nabla} T \right) = \vec{\nabla} \cdot (k \vec{\nabla} T) + S.$$

En utilisant l'homogénéité du fluide pour la conductivité thermique k , on l'écrit

$$(1.39) \quad \frac{\partial T}{\partial t} = -\vec{u} \cdot \vec{\nabla} T + \frac{k}{\rho_0 c} \Delta T + \frac{S}{\rho_0 c},$$

posons

$$(1.40) \quad \kappa = \frac{k}{\rho_0 c},$$

$$(1.41) \quad \frac{\partial T}{\partial t} = -\vec{u} \cdot \vec{\nabla} T + \kappa \Delta T + \frac{S}{\rho_0 c}.$$

Il est intéressant de noter qu'à ce modèle de transport de l'énergie correspond, en l'absence d'advection, une équation parabolique. Une étude mathématique de ce type d'équation montre que les caractéristiques³ sont horizontales, c'est-à-dire que l'information se propage à vitesse infinie⁴. Une modification ponctuelle de la température entraîne donc une modification immédiate (mais infinitésimale) de la température en tout point du modèle⁵. Lors d'une résolution numérique de cette équation, l'information se propagera à la "vitesse numérique" du schéma ($\delta x / \delta t$).

Le tableau suivant donne, pour fixer les idées, quelques valeurs de la diffusivité thermique⁶ (d'après Le Mouël et al. 1994, Fabry 1942, C.R.C. 1994 et Chassaing 1997):

Eau	$1,0 \cdot 10^{-7}$	$m^2 \cdot s^{-1}$
Verre (moyenne)	$4,0 \cdot 10^{-7}$	$m^2 \cdot s^{-1}$
Sol (moyenne)	$7,5 \cdot 10^{-7}$	$m^2 \cdot s^{-1}$
Pierre calcaire	$1,0 \cdot 10^{-6}$	$m^2 \cdot s^{-1}$
Mercure	$4,4 \cdot 10^{-6}$	$m^2 \cdot s^{-1}$
→ Noyau	$8,0 \cdot 10^{-6}$	$m^2 \cdot s^{-1}$
Gallium	$1,8 \cdot 10^{-5}$	$m^2 \cdot s^{-1}$
Air	$2,2 \cdot 10^{-5}$	$m^2 \cdot s^{-1}$
Plomb	$2,4 \cdot 10^{-5}$	$m^2 \cdot s^{-1}$
Cuivre	$1,1 \cdot 10^{-4}$	$m^2 \cdot s^{-1}$
Sodium	$1,2 \cdot 10^{-4}$	$m^2 \cdot s^{-1}$

3. C'est-à-dire les courbes qui définissent dans un diagramme espace-temps le domaine influencé par une perturbation ponctuelle de l'espace et du temps.

4. par opposition aux équations hyperboliques, où elle se propage à vitesse finie.

5. sous forme d'une décroissance exponentielle

6. ces valeurs très faibles pour l'air comme pour l'eau surprennent l'intuition. C'est que le transport thermique s'y effectue largement par convection.

Comme la température n'entre dans notre modèle que via la force d'Archimède, on décompose la température comme précédemment en un champ statique T_s , et une variation Θ

$$(1.42) \quad T = T_s + \Theta,$$

le champ de température statique vérifiant l'équation (1.41) pour $\vec{u} = \vec{0}$, il satisfait

$$(1.43) \quad \kappa \Delta T_s = -\frac{S}{\rho_0 c},$$

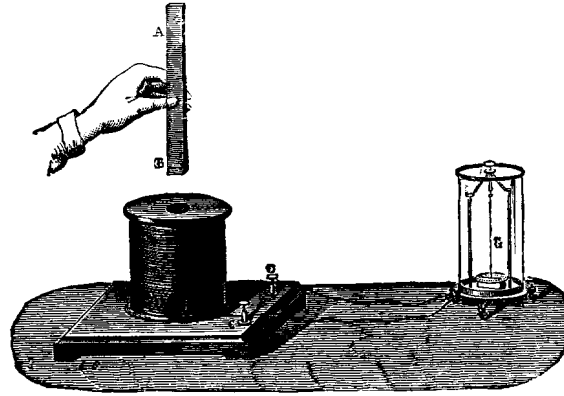
Le terme de sources volumiques S peut avoir des origines diverses par exemple la chaleur conduite le long de l'adiabat (terme source ou puit), le chauffage radioactif (considéré comme peu important dans le noyau). Nous discuterons plus en détail les différents chauffages envisageables pour les études numériques au chapitre 3.

L'équation (1.41) s'écrit alors

$$(1.44) \quad \underbrace{\frac{\partial T_s}{\partial t}}_{\stackrel{\text{def}}{=} 0} + \frac{\partial \Theta}{\partial t} = -\vec{u} \cdot \vec{\nabla} T_s - \vec{u} \cdot \vec{\nabla} \Theta + \kappa \Delta \Theta + \underbrace{\kappa \Delta T_s + \frac{S}{\rho_0 c}}_{\stackrel{\text{def}}{=} 0}.$$

$$(1.45) \quad \boxed{\frac{\partial \Theta}{\partial t} = -\vec{u} \cdot \vec{\nabla} T_s - \vec{u} \cdot \vec{\nabla} \Theta + \kappa \Delta \Theta.}$$

FIG. 1.4 – Le déplacement d'un aimant (AB) dans une bobine conductrice reliée à un galvanomètre (G) crée un courant induit mesuré par l'aiguille du galvanomètre pendant tout le temps que dure le mouvement de l'aimant [I.2].



— Induction par les aimants.

1.1.3 Equation de l'induction

H: On suppose le conducteur linéaire isotrope et homogène.

On se place dans l'approximation des états quasi-stationnaires ($\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \vec{0}$).

On néglige les phénomènes d'aimantation ($\vec{M} = \vec{0}$, ou encore $\mu = \mu_0$) car la température du noyau terrestre est largement supérieure à la température de Curie du fer.

Les équations de *Maxwell* dans la matière s'écrivent (voir Pérez et al. 1996)

$$(1.46) \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho_q,$$

$$(1.47) \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0,$$

$$(1.48) \quad \vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t},$$

$$(1.49) \quad \vec{\nabla} \wedge \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}.$$

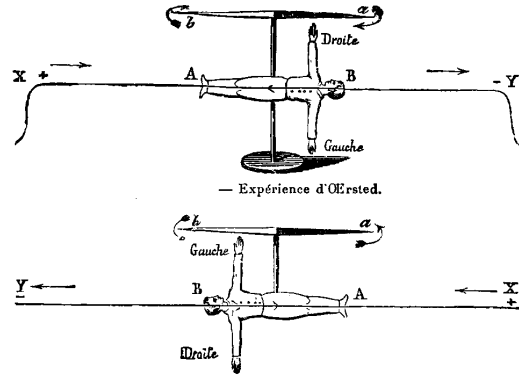
La première équation de ce système exprime (à l'aide de la formule de *Green*) que l'induction électrique créée par une charge ponctuelle décroît avec le carré de la distance, et qu'en l'absence de charge sa divergence est nulle (ρ_q représente la distribution de charge).

La deuxième est l'équivalent magnétique de la première, en cela qu'elle traduit l'absence de charges magnétiques.⁷

La troisième équation exprime la création d'un champ électrique induit par les variations d'induction magnétique (expérience de la spire soumise à un champ magnétique variant avec le temps, cf. figure 1.4).

7. au moins, qu'on n'en rencontre pas lors des expériences usuelles.

FIG. 1.5 – Oersted, physicien danois, proposa en 1820 une expérience qui met en évidence les lignes de force de l'induction magnétique associées à un courant électrique à l'aide d'une boussole. On montre que lorsqu'on fait agir un courant sur un aimant, l'aimant se met "en croix" avec le courant, et que son orientation dépend de la direction du courant. La direction est indiquée ici par le "petit bonhomme d'Ampère" [I.2].



La quatrième enfin exprime l'induction de champ magnétique par un courant (cf. figure 1.5 expérience d'Oersted).

Pour fermer ce système d'équations il faut introduire des équations constitutives (phénoménologiques) liant \vec{H} à \vec{B} , \vec{D} à \vec{E} , et \vec{j} à \vec{E} .

Si l'on pose que le comportement du milieu est linéaire, on peut écrire pour un milieu au repos⁸

$$(1.50) \quad \vec{D} = \underline{\underline{\varepsilon}} \vec{E},$$

$$(1.51) \quad \vec{B} = \underline{\underline{\mu}} \vec{H},$$

$$(1.52) \quad \vec{j} = \underline{\underline{\sigma}} \vec{E}.$$

Si l'on pose à présent que le milieu est isotrope, les tenseurs $\underline{\underline{\mu}}$, $\underline{\underline{\varepsilon}}$, $\underline{\underline{\sigma}}$ peuvent être remplacés par leurs homologues scalaires

$$(1.53) \quad \vec{D} = \varepsilon \vec{E},$$

$$(1.54) \quad \vec{B} = \mu \vec{H},$$

$$(1.55) \quad \vec{j} = \sigma \vec{E}.$$

Aux échelles de temps qui seront les nôtres, on peut négliger les phénomènes propagatifs ($\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \vec{0}$). Notre système d'équations est donc

$$(1.56) \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0,$$

$$(1.57) \quad \vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t},$$

$$(1.58) \quad \vec{\nabla} \wedge \vec{H} = \vec{j},$$

$$(1.59) \quad \vec{B} = \mu \vec{H},$$

$$(1.60) \quad \vec{j} = \sigma \vec{E}.$$

8. plus généralement : pour un milieu en mouvement, dans le référentiel lié au mouvement.

Il faut à présent exprimer ces relations pour un milieu animé d'une vitesse \vec{u} , dans un référentiel au repos⁹

$$(1.61) \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0,$$

$$(1.62) \quad \vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t},$$

$$(1.63) \quad \vec{\nabla} \wedge \vec{H} = \vec{j},$$

$$(1.64) \quad \vec{B} = \mu \vec{H},$$

$$(1.65) \quad \vec{j} = \sigma (\vec{E} + \vec{u} \wedge \vec{B}).$$

Sans la justifier parfaitement (une démonstration rigoureuse fait appel à la relativité), cette modification se comprend si l'on revient à l'expérience de variation de l'induction magnétique à travers une spire. Supposons un champ magnétique qui ne varie pas avec le temps, mais seulement avec l'espace, et déplaçons une spire avec une vitesse \vec{u} , le flux à travers la spire va néanmoins varier avec le temps, entraînant l'apparition d'un courant induit. Dans le référentiel de la spire les équations sont celles du système (1.56) à (1.60) et l'équation (1.57) rend compte de ce phénomène. Dans un référentiel au repos, il faut également rendre compte de ce phénomène; comme les équations de Maxwell sont valables dans n'importe quel référentiel, ce sont les relations constitutives (la loi d'Ohm) qui sont modifiées en posant

$$(1.66) \quad \vec{E}' = \vec{E} + \vec{u} \wedge \vec{B},$$

on comprend alors la modification de (1.60) en (1.65).

Le noyau liquide terrestre étant au dessus de la température de Curie¹⁰ du fer, les phénomènes d'aimantation se limitent à l'aimantation diamagnétique, que l'on peut négliger. Négliger l'aimantation d'un matériau linéaire isotrope, c'est approcher μ par μ_0 , perméabilité magnétique du vide.

Partant de la loi d'Ohm (1.65), et en utilisant l'équation d'Ampère, $\mu_0 \vec{j} = \vec{\nabla} \wedge \vec{B}$, qui découle de (1.63) et (1.64), on peut écrire

$$(1.67) \quad \frac{1}{\mu_0} (\vec{\nabla} \wedge \vec{B}) = \sigma (\vec{E} + \vec{u} \wedge \vec{B}).$$

En prenant le rotationnel de cette équation, et en utilisant l'homogénéité du fluide (pour $\vec{\nabla} \cdot \mu_0 = \vec{0}$), ainsi que la loi de Gauss (1.61), on obtient

$$(1.68) \quad -\frac{1}{\mu_0} (\Delta \vec{B}) = \sigma (\vec{\nabla} \wedge \vec{E} + \vec{\nabla} \wedge (\vec{u} \wedge \vec{B})).$$

9. On se place dans le cadre de la mécanique classique, puisque $\|\vec{u}\| \ll c^2$.

10. température au delà de laquelle l'aimantation ferromagnétique disparaît, i.e. l'aimantation du milieu disparaît quand on coupe l'induction magnétique.

L'équation de *Faraday* (1.62), donne alors

$$(1.69) \quad -\frac{1}{\sigma\mu_0} (\Delta\vec{B}) = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} + \vec{\nabla} \wedge (\vec{u} \wedge \vec{B}),$$

d'où l'équation d'induction, en posant $\eta = \frac{1}{\sigma\mu_0}$,

$$(1.70) \quad \boxed{\begin{cases} \frac{\partial\vec{B}}{\partial t} &= \vec{\nabla} \wedge (\vec{u} \wedge \vec{B}) + \eta\Delta\vec{B} \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0. \end{cases}}$$

On donne ici, comme pour les coefficients de diffusivité des équations précédentes un tableau pour se fixer les idées. Il est important de noter toutefois que si les valeurs de conductivité ont un sens en elles mêmes, celles de la “diffusivité magnétique” ne sont données qu'à titre de comparaison avec le noyau (C.R.C. 1994):¹¹

	conductivité		diffusivité magnétique	
Cuivre	$5,9 \cdot 10^7$	$\Omega^{-1} \cdot m^{-1}$	$1,3 \cdot 10^{-2}$	$m^2 \cdot s^{-1}$
Aluminium	$3,5 \cdot 10^7$	$\Omega^{-1} \cdot m^{-1}$	$2,3 \cdot 10^{-2}$	$m^2 \cdot s^{-1}$
Fer ⁽¹⁾	$1,1 \cdot 10^7$	$\Omega^{-1} \cdot m^{-1}$	$7,2 \cdot 10^{-2}$	$m^2 \cdot s^{-1}$
Etain	$8,7 \cdot 10^6$	$\Omega^{-1} \cdot m^{-1}$	$9,1 \cdot 10^{-2}$	$m^2 \cdot s^{-1}$
Sodium ⁽²⁾	$7,9 \cdot 10^6$	$\Omega^{-1} \cdot m^{-1}$	0,1	$m^2 \cdot s^{-1}$
Plomb	$5 \cdot 10^6$	$\Omega^{-1} \cdot m^{-1}$	0,2	$m^2 \cdot s^{-1}$
Gallium ⁽²⁾	$2,6 \cdot 10^6$	$\Omega^{-1} \cdot m^{-1}$	0,3	$m^2 \cdot s^{-1}$
Mercure ⁽²⁾	$1 \cdot 10^6$	$\Omega^{-1} \cdot m^{-1}$	0,8	$m^2 \cdot s^{-1}$
→Noyau	$7 \cdot 10^5$	$\Omega^{-1} \cdot m^{-1}$	1,1	$m^2 \cdot s^{-1}$
Germanium	0,5	$\Omega^{-1} \cdot m^{-1}$	$1,6 \cdot 10^6$	$m^2 \cdot s^{-1}$
Carbone (graphite)	$5 \cdot 10^{-5}$	$\Omega^{-1} \cdot m^{-1}$	$1,6 \cdot 10^{10}$	$m^2 \cdot s^{-1}$

(1) à 0°C.

(2) à température expérimentale (i.e. supérieure à la valeur de fusion).

Notons que, bien que le noyau soit assez bon conducteur électrique, les effets de résistivité entraînent une diffusivité magnétique importante (de l'ordre de 10^6 fois la viscosité cinématique et 10^5 fois la diffusivité thermique). C'est la raison pour laquelle on pense que le champ magnétique de la terre est de grande échelle même à la surface du noyau, alors que l'écoulement qui le crée peut inclure de petites échelles (à titre indicatif, la couche d'Ekman dans le noyau aurait environ un mètre d'épaisseur).

11. L'approximation $\mu = \mu_0$ étant justifié par la température élevée.

1.2 Conditions aux limites

Le système d'équations obtenu s'écrit donc

$$(1.71) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = -\vec{u} \cdot \nabla \vec{u} - \frac{1}{\rho_0} \vec{\nabla} \pi + \nu \Delta \vec{u} - 2\Omega (\vec{e}_z \wedge \vec{u}) \\ \quad + \frac{1}{\mu_0 \rho_0} (\vec{\nabla} \wedge \vec{B}) \wedge \vec{B} + \alpha \theta g \vec{r}, \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0, \\ \frac{\partial \Theta}{\partial t} = -\vec{u} \cdot \vec{\nabla} T_s - \vec{u} \cdot \vec{\nabla} \Theta + \kappa \Delta \Theta, \\ \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \vec{\nabla} \wedge (\vec{u} \wedge \vec{B}) + \eta \Delta \vec{B}, \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0. \end{array} \right.$$

Il convient d'y ajouter des conditions aux limites pour pouvoir en proposer une solution.

1.2.1 Conditions cinématiques

Pour l'équation de vitesse, la condition naturelle est d'imposer le déplacement nul aux limites (condition de Dirichlet). On pose donc

$$(1.72) \quad \begin{array}{l} \vec{u}(r_i, \theta, \phi) = \vec{0} \quad \forall \theta, \phi, \\ \vec{u}(r_e, \theta, \phi) = \vec{0} \quad \forall \theta, \phi. \end{array}$$

Certains auteurs préfèrent utiliser une condition de contrainte nulle, ou sans frottements, aux frontières du système. Ce choix n'a pas de justification physique dans le cas de l'étude du noyau terrestre, mais a pour effet de supprimer les couches d'Ekman. Ce qui rend la résolution numérique beaucoup plus facile. La justification généralement invoquée (Zhang et Busse 1987, Kuang et Bloxham 1997, ...) est que dans la limite des petites viscosités (significative pour le noyau) la solution dans l'écoulement principal (i.e. hors couches limites) serait la même dans les deux cas. Cette proposition n'a jamais été démontrée de manière générale, il n'existe qu'une démonstration linéaire pour un mode de convection non réalisé, qui serait confiné près de l'axe de rotation (Roberts, 1965). Peut-être s'applique-t-elle plus généralement.

On pose alors la non-pénétration et la contrainte horizontale nulle

$$(1.73) \quad \left\{ \begin{array}{l} u_r = 0, \\ \sigma_{r\theta} = 0, \\ \sigma_{r\phi} = 0, \end{array} \right.$$

qui est équivalent pour un fluide newtonien à

$$(1.74) \quad \begin{cases} u_r = 0, \\ \varepsilon_{r\theta} = 0, \\ \varepsilon_{r\phi} = 0, \end{cases}$$

ou encore

$$(1.75) \quad \begin{cases} u_r = 0, \\ \frac{r}{2} \frac{\partial}{\partial r} \frac{u_\theta}{r} + \frac{1}{2r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} = 0, \\ \frac{r}{2} \frac{\partial}{\partial r} \frac{u_\phi}{r} + \frac{1}{2r \sin \theta} \frac{\partial u_r}{\partial \phi} = 0. \end{cases}$$

1.2.2 Conditions thermiques

Les conditions aux limites pour la température peuvent consister à maintenir la température des parois constante, ce qui s'écrit pour la perturbation Θ

$$(1.76) \quad \Theta = 0.$$

Ou bien à imposer un flux de chaleur, ce qui en vertu de la loi de Fourier, implique pour Θ

$$(1.77) \quad \frac{\partial \Theta}{\partial r} = 0.$$

1.2.3 Conditions magnétiques

L'induction magnétique diffuse dans la graine, qui est un conducteur. Celle-ci ne constitue donc pas une limite pour l'induction. L'équation d'induction devra être intégrée jusqu'au centre du modèle. A la frontière avec le manteau, en revanche, le milieu est supposé isolant électriquement,

$$(1.78) \quad \vec{j}(r > r_e, \theta, \phi) = \vec{\nabla} \wedge \vec{B}(r > r_e, \theta, \phi) = \vec{0}.$$

Cela implique que le champ magnétique à l'extérieur du noyau (volume simplement connecté) dérive d'un potentiel scalaire

$$(1.79) \quad \begin{cases} \vec{B} = -\vec{\nabla} \Phi, \\ \Delta \Phi = 0. \end{cases}$$

Bibliographie

- Stanislas **Braginsky** et Paul Roberts, 1995
Equations governing core convection and the geodynamo
Geophysical and Astrophysical Fluid Dynamics, **79**, p. 1–97.
- Philippe **Cardin** et Peter Olson, 1992
*An experimental approach to thermochemical convection
in the Earth's core*
Geophysical Research Letters, **19**, 20, 1995–1998.
- Patrick **Chassaing**, 1997
Mécanique des fluides
Cépaduès-Éditions.
- C.R.C., Hand Book of Chemistry and Physics, 1974, 1994
Ed. David Lide
C.R.C. Press.
- Jacques **Dautray** et Jacques-Louis Lions, 1984
Analyse mathématique et calcul numérique, vol. 1
Masson.
- Charles **Fabry**, 1942
Propagation de la Chaleur
Librairie Armand Colin.
- John **Jacobs**, 1987
Geomagnetism, vol. 2
Academic Press, London.
- Weijia **Kuang** et Jeremy Bloxham, 1997
An Earth-like numerical dynamo model
Nature, **389**, p. 371–374.
- Jean-Louis **Le Mouél**, Jean-Paul Poirier, et M. Assoumani, 1994
Sur le refroidissement du noyau terrestre
C.R.Acad.Sci. Paris, **319**, 1497-1501.
- Stéphane **Labrosse**, 1997
Contribution à l'étude du refroidissement de la Terre
Thèse, Université Paris 7.
- Jean-Louis **Le Mouél**, 1976
L'origine du champ magnétique terrestre
dans *Traité de Géophysique Interne, tome II*

Jean Coulomb et Georges Jobert
Masson, Paris.

W. Malkus, 1994
Energy Sources for Planetary Dynamos
dans *Lectures on Solar and Planetary Dynamos*
(M. Proctor et A. Gilbert)
Publications of the Newton Institute
Cambridge University Press.

Jacques Padet, 1991
Fluides en écoulement
Masson, Paris.

Jean-Paul Poirier, 1991
Les profondeurs de la terre
Masson, Paris.

Jean-Paul Poirier, 1994
Physical properties of the Earth's core
C.R.Acad.Sci. Paris, **318**, 341–350.

José-Philippe Pérez, Robert Carles et Robert Fleckinger, 1990, 1996
Electromagnétisme
Masson, Paris.

Joseph Plateau, 1873
*Statique expérimentale et théorique des liquides
soumis aux seules forces moléculaires.*
Gauthier-Villars, Paris.

Paul Roberts, 1965
On the thermal instability of a highly rotating fluid sphere
Astrophys. Journal, **141**, 240-250.

John Shercliff, 1972
*Illustrated Experiments in Fluid Mechanics,
Magnetohydrodynamics,*
MIT Press, Cambridge, U.S.A.

John Verhoogen, 1980
Energetics of the Earth,
National Academy of Science, Washington.

Keke Zhang et Friedrich Busse, 1987
On the onset of convection in rotating spherical shells
Geophysical and Astrophysical Fluid Dynamics, **39**, p. 119–147.

Illustrations

- [I.1] COURS DE COSMOGRAPHIE pour la classe de mathématiques,
par une réunion de professeurs,
Librairie Générale (Paris), 1927.
- [I.2] NOUVEAU DICTIONNAIRE DES SCIENCES ET DE LEURS APPLICATIONS,
par Paul Poiré,
Librairie Delagrave (Paris), 1900.

Summary

The set of vectorial equations are transformed into scalar ones to prepare the numerical computation. Vector fields are decomposed into poloidal and toroidal parts (§2.1). The corresponding scalar equations are discretized in the radial direction using a classical Finite Difference scheme on a nonuniform grid, stretched in the vicinity of the boundaries following geometric progressions (§2.2). On each of the concentric spheres, variables are expanded on a Spherical Harmonic base. All linear relations, including the Coriolis term (following Roberts 1968), are explicitly expressed on this functional basis (§2.3). The quadratic non-linearity in Navier-Stokes equation, as well as heat advection, the Lorentz force and the induction term are computed in the physical space on Gauss collocation points, and are re-integrated in the spectral space. The formulas needed to compute the curl of a non-solenoidal vector field developed on a poloidal, toroidal, spheroidal basis are derived using generalized spherical harmonic functions (§2.4). Time integration is performed using a classical semi-implicit scheme, Crank-Nicholson, for diffusion, and Adams-Bashford for other terms (§2.5). This approach is not original. It departs from the classical polynomial expansion in radius by the use of Finite Differences (also recently used by Kuang et al. 1997), and from the Galerkin method for non-linear terms by the use of a collocation approach (as in Tilgner et al. 1997, and Kuang et al. 1997).

Chapitre 2

Approximation numérique



Nous présentons dans cette section les méthodes utilisées pour approcher numériquement les solutions des équations introduites au chapitre précédent. Elles sont classiques, et ont déjà été utilisées pour ces équations. Le schéma radial aux différences finies diffère de l'expansion spectrale généralement introduite, mais a été récemment utilisé par Kuang et Bloxham (1997). Le calcul des non-linéarités par collocation dans l'espace physique diffère des intégrales de couplage de la méthode de Galerkin généralement utilisées, mais cette méthode est également utilisée par Glatzmaier et Roberts 1995, Tilgner et Busse 1997 et Kuang et Bloxham 1997.

Les équations vectorielles sont d'abord projetées sur une base de deux potentiels scalaires. On élimine à cette occasion le gradient de pression du système, et l'on n'a plus à se soucier de garantir le caractère solénoïdal de nos champs. On discrétise alors la coquille sous forme de sphères concentriques, reliées par un schéma aux différences. Enfin nous décomposons, sur chaque sphère, les champs scalaires sur une base de fonctions harmoniques. Notons que nous écrivons cette décomposition, non seulement pour la diffusion, mais également pour l'accélération de Coriolis, afin de la calculer avec précision. Il reste les termes non-linéaires, qui seront calculés dans l'espace physique, via une méthode de collocation (Canuto et al. 1988, Gottlieb et al. 1977).

2.1 Décomposition Poloïdale-Toroïdale

2.1.1 Définition et propriétés

Tout champ de vecteur solénoïdal¹ peut s'écrire sous la forme

$$(2.1) \quad \vec{V} = \underbrace{\vec{\nabla} \wedge \vec{\nabla} \wedge (\vec{r} V_p)}_{\text{composante poloïdale}} + \underbrace{\vec{\nabla} \wedge (\vec{r} V_t)}_{\text{composante toroïdale}}.$$

Cette décomposition est appelée “décomposition de Mie”, ou “décomposition Poloïdale-Toroïdale”. Elle nous intéresse particulièrement, car la vitesse et l'induction magnétique sont toutes deux solénoïdales.²

Preuve :

Il est immédiat que tout vecteur s'écrivant sous cette forme est bien solénoïdal, en effet :

$$(2.2) \quad \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \wedge \vec{V}) = 0, \quad \forall \vec{V}.$$

De plus, on vérifie facilement que tout vecteur de \mathbb{R}^3 peut s'écrire

$$(2.3) \quad \vec{V} = \alpha \vec{r} + \vec{\nabla} \wedge \beta \vec{r} + \vec{\nabla} \wedge \vec{\nabla} \wedge \gamma \vec{r},$$

où α, β, γ sont fonctions de r, θ, ϕ .

Si le vecteur \vec{V} est solénoïdal, cela implique

$$(2.4) \quad \vec{\nabla} \cdot (\alpha \vec{r}) = 0,$$

$$(2.5) \quad \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \alpha r) = 0.$$

D'où

$$(2.6) \quad \alpha = \frac{\hat{\alpha}}{r^3},$$

où $\hat{\alpha}$ n'est plus fonction que de θ, ϕ , et peut être décomposé comme

$$(2.7) \quad \hat{\alpha}(\theta, \phi) = \hat{\alpha}_1 + L_2(\hat{\alpha}_2(\theta, \phi)),$$

où L_2 est le laplacien Beltrami, c'est-à-dire le laplacien réduit aux composantes horizontales (ou angulaires), défini par

$$(2.8) \quad \begin{aligned} L_2 &= \frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial}{\partial r} - r^2 \Delta \\ &= -\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} - \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2}. \end{aligned}$$

1. i.e. à divergence nulle

2. Lorsque l'on décompose le vecteur vitesse de cette façon, u_t est un pseudo-scalaire, et u_p un scalaire. Lorsque l'on décompose le pseudo-vecteur induction magnétique, en revanche, ce sera B_p qui sera le pseudo-scalaire, et B_t le scalaire.

D'où

$$(2.9) \quad \vec{V} \cdot \vec{r} = \frac{1}{r^2} (\hat{\alpha}_1 + L_2(\hat{\alpha}_2)) + \underbrace{(\vec{\nabla} \wedge \beta \vec{r}) \cdot \vec{r}}_{=0} + \underbrace{(\vec{\nabla} \wedge \vec{\nabla} \wedge \gamma \vec{r}) \cdot \vec{r}}_{=L_2(\gamma)}.$$

En notant $\langle \cdot \rangle_r$ la moyenne sur la sphère de rayon r

$$(2.10) \quad \langle \vec{V} \cdot \vec{r} \rangle_r = \frac{1}{r^2} \langle \hat{\alpha}_1 \rangle_r + \frac{1}{r^2} \underbrace{\langle L_2(\hat{\alpha}_2) \rangle_r}_{=0} + \underbrace{\langle L_2(\gamma) \rangle_r}_{=0}.$$

Or, comme $\vec{\nabla} \cdot \vec{V} = 0$, on a par la formule de Green

$$(2.11) \quad \langle \vec{V} \cdot \vec{r} \rangle_r = 0,$$

et donc

$$(2.12) \quad \hat{\alpha}_1 = 0.$$

Le terme α peut s'écrire

$$(2.13) \quad \alpha = \frac{1}{r^3} L_2(\hat{\alpha}_2(\theta, \phi)) = \vec{\nabla} \wedge \vec{\nabla} \wedge \gamma' \vec{r},$$

et peut donc être regroupé avec la composante poloïdale.

Tout champ de vecteur solénoïdal peut donc s'écrire

$$(2.14) \quad \vec{V} = \vec{\nabla} \wedge \beta \vec{r} + \vec{\nabla} \wedge \vec{\nabla} \wedge \gamma \vec{r},$$

reste à étudier l'unicité de cette décomposition. On peut poser sans perdre de généralité

$$(2.15) \quad \langle \beta \rangle_r = \langle \gamma \rangle_r = 0,$$

en effet, une modification de β et γ par une fonction purement radiale ne modifierait pas \vec{V} .

Vérifions qu'avec cette hypothèse supplémentaire, la décomposition (2.1) est unique. Soit

$$(2.16) \quad \vec{\nabla} \wedge \beta_1 \vec{r} + \vec{\nabla} \wedge \vec{\nabla} \wedge \gamma_1 \vec{r} = \vec{V} = \vec{\nabla} \wedge \beta_2 \vec{r} + \vec{\nabla} \wedge \vec{\nabla} \wedge \gamma_2 \vec{r},$$

par linéarité, on a

$$(2.17) \quad \vec{\nabla} \wedge (\beta_1 - \beta_2) \vec{r} + \vec{\nabla} \wedge \vec{\nabla} \wedge (\gamma_1 - \gamma_2) \vec{r} = \vec{0}.$$

En prenant la composante radiale de cette équation, il vient

$$(2.18) \quad \underbrace{(\vec{\nabla} \wedge (\beta_1 - \beta_2) \vec{r}) \cdot \vec{r}}_{=0} + \underbrace{(\vec{\nabla} \wedge \vec{\nabla} \wedge (\gamma_1 - \gamma_2) \vec{r}) \cdot \vec{r}}_{=L_2(\gamma_1 - \gamma_2)} = 0,$$

$$(2.19) \quad L_2(\gamma_1 - \gamma_2) = 0.$$

$\gamma_1 - \gamma_2$ est donc une fonction dépendant exclusivement de r , et comme

$$(2.20) \quad \langle \gamma_1 - \gamma_2 \rangle_r = \langle \gamma_1 \rangle_r - \langle \gamma_2 \rangle_r = 0,$$

on a

$$(2.21) \quad \gamma_1 \equiv \gamma_2 .$$

Pour la composante toroïdale, on procède de même, mais avec la composante radiale du rotationnel de \vec{V} ,

$$(2.22) \quad \underbrace{-\left(\vec{\nabla} \wedge \Delta(\gamma_1 - \gamma_2) \vec{r}\right) \cdot \vec{r}}_{=0} + \underbrace{\left(\vec{\nabla} \wedge \vec{\nabla} \wedge (\beta_1 - \beta_2) \vec{r}\right) \cdot \vec{r}}_{=L_2(\beta_1 - \beta_2)} = 0 ,$$

$$(2.23) \quad L_2(\beta_1 - \beta_2) = 0 ,$$

et par le même raisonnement

$$(2.24) \quad \beta_1 \equiv \beta_2 .$$

Explicitement, cette décomposition permet d'écrire

$$(2.25) \quad \vec{V} = \begin{cases} \frac{1}{r} L_2(V_p) \\ \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r V_p) \right) \\ \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r V_p) \right) \end{cases} + \begin{cases} \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial V_t}{\partial \phi} \\ - \frac{\partial V_t}{\partial \theta} \end{cases}$$

On montre que cette décomposition a les propriétés suivantes

$$(2.26) \quad \vec{\nabla} \wedge \vec{V} = -\vec{\nabla} \wedge (\vec{r} \Delta V_p) + \vec{\nabla} \wedge \vec{\nabla} \wedge (\vec{r} V_t) ,$$

$$(2.27) \quad \vec{\nabla} \wedge \vec{\nabla} \wedge \vec{V} = -\vec{\nabla} \wedge \vec{\nabla} \wedge (\vec{r} \Delta V_p) - \vec{\nabla} \wedge (\vec{r} \Delta V_t) ,$$

d'où

$$(2.28) \quad \Delta \vec{V} = \vec{\nabla} \wedge \vec{\nabla} \wedge (\vec{r} \Delta V_p) + \vec{\nabla} \wedge (\vec{r} \Delta V_t) .$$

On montre que l'on a aussi

$$(2.29) \quad \vec{V} \cdot \vec{r} = L_2 V_p , \quad \left(\vec{\nabla} \wedge \vec{V} \right) \cdot \vec{r} = L_2 V_t .$$

2.1.2 Champ de vecteur non-solénoïdal

On peut étendre cette décomposition à un champ de vecteur de divergence non nulle. Cela nous sera utile, par exemple, pour calculer le terme $\vec{\nabla} \wedge (\vec{u} \wedge \vec{B})$. Ce terme est bien évidemment de divergence nulle, en revanche $\vec{u} \wedge \vec{B}$ n'a aucune raison de l'être. Nous pouvons utiliser un formalisme proche du précédent en introduisant un troisième scalaire que nous allons appeler sphéroïdal, et noté V_s

$$(2.30) \quad \vec{V} = \begin{cases} \frac{1}{r} L_2(V_p) \\ \frac{\partial V_s}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial V_t}{\partial \phi} \\ \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial V_s}{\partial \phi} - \frac{\partial V_t}{\partial \theta} \end{cases}$$

Si la divergence de \vec{V} est nulle nous avons une relation simple entre V_s et V_p

$$(2.31) \quad V_s = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r V_p),$$

qui ramène cette écriture à la décomposition précédemment introduite pour les champs à divergence nulle.

2.1.3 Application aux équations

Nous allons projeter la première et la quatrième équation du système (1.71) sur cette base. Le but de cette opération est d'écrire explicitement tous les termes linéaires sur cette base (pour en avoir une expression matricielle, et pouvoir les traiter implicitement en temps). Commençons par l'équation d'induction (1.71.4). En prenant le produit scalaire de cette équation par \vec{r} et en utilisant (2.29.1) et la commutativité de L_2 et Δ , on a

$$(2.32) \quad \frac{\partial}{\partial t} L_2 B_p = \eta \Delta L_2 B_p + \vec{r} \cdot (\vec{\nabla} \wedge (\vec{u} \wedge \vec{B})) .$$

En prenant le produit scalaire par \vec{r} de son rotationnel, et en utilisant (2.29.b), on a

$$(2.33) \quad \frac{\partial}{\partial t} L_2 B_t = \eta \Delta L_2 B_t + \vec{r} \cdot (\vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla} \wedge (\vec{u} \wedge \vec{B}))) .$$

La projection de l'équation en vitesse est moins triviale, d'abord à cause du gradient de pression, que l'on souhaite faire disparaître, ensuite à cause du terme de Coriolis. Comme pour la composante toroïdale du champ magnétique, prenons le produit scalaire par \vec{r} du rotationnel de (1.71.a),

$$(2.34) \quad \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} L_2 u_t = & -\vec{r} \cdot \vec{\nabla} \wedge (\vec{u} \underline{\nabla} \vec{u}) + \nu \Delta L_2 u_t - 2\Omega \vec{r} \cdot \vec{\nabla} \wedge (\vec{e}_z \wedge \vec{u}) \\ & + \vec{r} \cdot \vec{\nabla} \wedge \left(\frac{1}{\mu_0 \rho_0} (\vec{\nabla} \wedge \vec{B}) \wedge \vec{B} \right) + \underbrace{\vec{r} \cdot \vec{\nabla} \wedge (\alpha \Theta g \vec{r})}_{=0} \end{aligned}$$

Comme les champs \vec{u} et \vec{B} sont à divergence nulle, on a

$$(2.35) \quad \vec{u} \underline{\nabla} \vec{u} = (\vec{\nabla} \wedge \vec{u}) \wedge \vec{u} = -\vec{u} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{u}),$$

$$(2.36) \quad \underline{\underline{\vec{B}\nabla\vec{B}}} = (\underline{\underline{\vec{\nabla}} \wedge \underline{\underline{\vec{B}}}) \wedge \underline{\underline{\vec{B}}} = -\underline{\underline{\vec{B}}} \wedge (\underline{\underline{\vec{\nabla}} \wedge \underline{\underline{\vec{B}}}).$$

L'équation (2.34) s'écrit

$$(2.37) \quad \frac{\partial}{\partial t} L_2 u_t = \nu \Delta L_2 u_t - 2\Omega \underbrace{\vec{r} \cdot \underline{\underline{\vec{\nabla}}} \wedge (\underline{\underline{\vec{e}_z}} \wedge \underline{\underline{\vec{u}}})}_{(*)} \\ - \vec{r} \cdot \underline{\underline{\vec{\nabla}}} \wedge (\underline{\underline{\vec{u}}} \underline{\underline{\nabla}} \underline{\underline{\vec{u}}} - \frac{1}{\mu_0 \rho_0} \underline{\underline{\vec{B}\nabla\vec{B}}}).$$

Etudions la projection du terme de Coriolis, marqué (*).

$$(2.38) \quad \begin{aligned} \vec{r} \cdot \underline{\underline{\vec{\nabla}}} \wedge (\underline{\underline{\vec{e}_z}} \wedge \underline{\underline{\vec{u}}}) &= \vec{r} \cdot \underline{\underline{\vec{\nabla}}} \wedge \left(\underline{\underline{\vec{e}_z}} \wedge \left(\underline{\underline{\vec{\nabla}}} \wedge \underline{\underline{\vec{\nabla}}} \wedge (\vec{r} u_p) + \underline{\underline{\vec{\nabla}}} \wedge (\vec{r} u_t) \right) \right) \\ &= \vec{r} \cdot \underline{\underline{\vec{\nabla}}} \wedge \left(\underline{\underline{\vec{e}_z}} \wedge \left(\underline{\underline{\vec{\nabla}}} \wedge \underline{\underline{\vec{\nabla}}} \wedge (\vec{r} u_p) \right) \right) \\ &+ \vec{r} \cdot \underline{\underline{\vec{\nabla}}} \wedge \left(\underline{\underline{\vec{e}_z}} \wedge \left(\underline{\underline{\vec{\nabla}}} \wedge (\vec{r} u_t) \right) \right) \end{aligned}$$

Commençons par la composante toroïdale, en utilisant (B.27)³,

$$(2.39) \quad \begin{aligned} \vec{r} \cdot \underline{\underline{\vec{\nabla}}} \wedge \left(\underline{\underline{\vec{e}_z}} \wedge \left(\underline{\underline{\vec{\nabla}}} \wedge (\vec{r} u_t) \right) \right) &= \vec{r} \cdot \left(\underbrace{\underline{\underline{\vec{e}_z}} \operatorname{div}(\underline{\underline{\vec{\nabla}}} \wedge \vec{r} u_t)}_{\operatorname{div}(rot)=0} - \underbrace{(\underline{\underline{\vec{\nabla}}} \wedge \vec{r} u_t) \operatorname{div} \underline{\underline{\vec{e}_z}}}_{\operatorname{div}(\underline{\underline{\vec{e}_z}})=0} \right. \\ &\quad \left. + \underbrace{((\underline{\underline{\vec{\nabla}}} \wedge \vec{r} u_t) \cdot \underline{\underline{\vec{\nabla}}}) \cdot \underline{\underline{\vec{e}_z}}}_{=0} - (\underline{\underline{\vec{e}_z}} \cdot \underline{\underline{\vec{\nabla}}})(\underline{\underline{\vec{\nabla}}} \wedge \vec{r} u_t) \right) \end{aligned}$$

On vérifie que

$$(2.40) \quad \begin{aligned} \vec{r} \cdot \underline{\underline{\vec{\nabla}}} \wedge \left(\underline{\underline{\vec{e}_z}} \wedge \left(\underline{\underline{\vec{\nabla}}} \wedge (\vec{r} u_t) \right) \right) &= -(\underline{\underline{\vec{e}_z}} \cdot \underline{\underline{\vec{\nabla}}})(\underline{\underline{\vec{\nabla}}} \wedge \vec{r} u_t) \cdot \vec{r} \\ &= -\frac{\partial}{\partial \phi} u_t. \end{aligned}$$

$$(2.41) \quad \text{Or } (\underline{\underline{\vec{e}_z}} \wedge \vec{r}) = r \sin \theta \underline{\underline{\vec{e}_\phi}}, \text{ et } (\underline{\underline{\vec{e}_\phi}} \cdot \underline{\underline{\vec{\nabla}}}) = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi},$$

$$(2.42) \quad \text{donc } \frac{\partial}{\partial \phi} = (\underline{\underline{\vec{e}_z}} \wedge \vec{r}) \cdot \underline{\underline{\vec{\nabla}}},$$

$$(2.43) \quad \text{et } \vec{r} \cdot \underline{\underline{\vec{\nabla}}} \wedge \left(\underline{\underline{\vec{e}_z}} \wedge \left(\underline{\underline{\vec{\nabla}}} \wedge (\vec{r} u_t) \right) \right) = -(\underline{\underline{\vec{e}_z}} \wedge \vec{r}) \cdot \underline{\underline{\vec{\nabla}}} u_t.$$

3. Voir annexe B.

Pour la partie poloïdale, on a

$$\begin{aligned}
& \vec{r} \cdot \vec{\nabla} \wedge \left(\vec{e}_z \wedge \left(\vec{\nabla} \wedge \vec{\nabla} \wedge (\vec{r} u_p) \right) \right) \\
&= \left(\frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} L_2 + \frac{\cos \theta}{r} L_2 - \cos \theta L_2 \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} - \sin \theta \frac{\partial^2}{\partial r \partial \theta} \right) u_p \\
(2.44) \quad &= \left(\frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(L_2 - 1 - r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \cos \theta L_2 \left(\frac{1}{r} - \frac{\partial}{\partial r} \right) \right) u_p \\
&= \left(r \cos \theta \Delta - \left(L_2 + r \frac{\partial}{\partial r} \right) \left(\cos \theta \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \right) u_p
\end{aligned}$$

En ajoutant ces deux dernières expressions

$$\begin{aligned}
(2.45) \quad & \vec{r} \cdot \vec{\nabla} \wedge \left(\vec{e}_z \wedge \left(\vec{\nabla} \wedge \vec{\nabla} \wedge (\vec{r} u_p) \right) \right) \\
&= \left(\vec{e}_z \cdot \vec{\nabla} - \frac{1}{2} \left(L_2 \vec{e}_z \cdot \vec{\nabla} + \vec{e}_z \cdot \vec{\nabla} L_2 \right) \right) u_p.
\end{aligned}$$

On définit alors l'opérateur Q_3 (introduit dans Roberts, 1968) comme

$$(2.46) \quad Q_3 = \vec{e}_z \cdot \vec{\nabla} - \frac{1}{2} \left(L_2 \vec{e}_z \cdot \vec{\nabla} + \vec{e}_z \cdot \vec{\nabla} L_2 \right).$$

L'équation (2.37) s'écrit donc

$$\begin{aligned}
(2.47) \quad & \frac{\partial}{\partial t} L_2 u_t = \nu \Delta L_2 u_t + 2\Omega (\vec{e}_z \wedge \vec{r}) \cdot \vec{\nabla} u_t - 2\Omega Q_3 u_p \\
& - \vec{r} \cdot \vec{\nabla} \wedge \left(\vec{u} \underline{\nabla} \vec{u} - \frac{1}{\mu_0 \rho_0} \vec{B} \underline{\nabla} \vec{B} \right).
\end{aligned}$$

Pour dériver l'équation du scalaire poloïdal, on prend le produit scalaire par $-\vec{r}$ du double rotationnel de (1.71.4). Le passage de u_t à u_p s'effectue par l'équation (2.27), en remarquant que

$$\begin{aligned}
(2.48) \quad & \vec{\nabla} \wedge \vec{\nabla} \wedge [\vec{e}_z \wedge \vec{u}] = \vec{\nabla} \wedge \left[-\frac{\partial u}{\partial z} \right] \\
&= -\frac{\partial}{\partial z} \vec{\nabla} \wedge \vec{u} \\
&= \vec{\nabla} \wedge \left[\vec{e}_z \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{u}) \right].
\end{aligned}$$

De plus, il faut tenir compte de la force d'Archimède, qui cette fois ne s'annule pas. On obtient

$$\begin{aligned}
(2.49) \quad & \frac{\partial}{\partial t} L_2 \Delta u_p = \nu \Delta L_2 \Delta u_p + 2\Omega (\vec{e}_z \wedge \vec{r}) \cdot \vec{\nabla} (\Delta u_p) + 2\Omega Q_3 u_t \\
& - \alpha g L_2 \Theta + \vec{r} \cdot \vec{\nabla} \wedge \left(\vec{\nabla} \wedge \left(\vec{u} \underline{\nabla} \vec{u} - \frac{1}{\mu_0 \rho_0} \vec{B} \underline{\nabla} \vec{B} \right) \right)
\end{aligned}$$

On a donc le système d'équations scalaires (Roberts, 1968 ; Cuong et Busse, 1981)

$$(2.50) \left\{ \begin{array}{l} \left(\nu \Delta - \frac{\partial}{\partial t} \right) L_2 \Delta u_p + 2\Omega (\vec{e}_z \wedge \vec{r}) \cdot \vec{\nabla} (\Delta u_p) + 2\Omega Q_3 u_t - \alpha g L_2 \Theta \\ \qquad \qquad \qquad = -\vec{r} \cdot \vec{\nabla} \wedge \left(\vec{\nabla} \wedge \left(\vec{u} \underline{\nabla} \vec{u} - \frac{1}{\mu_0 \rho_0} \vec{B} \underline{\nabla} \vec{B} \right) \right) , \\ \left(\nu \Delta - \frac{\partial}{\partial t} \right) L_2 u_t + 2\Omega (\vec{e}_z \wedge \vec{r}) \cdot \vec{\nabla} u_t - 2\Omega Q_3 u_p \\ \qquad \qquad \qquad = +\vec{r} \cdot \left(\vec{\nabla} \wedge \left(\vec{u} \underline{\nabla} \vec{u} - \frac{1}{\mu_0 \rho_0} \vec{B} \underline{\nabla} \vec{B} \right) \right) , \\ \frac{\partial \Theta}{\partial t} = -\left(\frac{1}{r} \frac{\partial T_s}{\partial r} \right) \vec{u} \cdot \vec{r} + \kappa \Delta \Theta - \vec{u} \cdot \vec{\nabla} \Theta , \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} - \eta \Delta \right) L_2 B_p = \vec{r} \cdot \left(\vec{\nabla} \wedge (\vec{u} \wedge \vec{B}) \right) , \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} - \eta \Delta \right) L_2 B_t = \vec{r} \cdot \left(\vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla} \wedge (\vec{u} \wedge \vec{B})) \right) . \end{array} \right.$$

On rappelle que L_2 et Q_3 sont définis par

$$(2.51) \quad \begin{aligned} L_2 &= \frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial}{\partial r} - r^2 \Delta \\ &= -\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} - \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} , \end{aligned}$$

$$(2.52) \quad \begin{aligned} Q_3 &= \vec{e}_z \cdot \vec{\nabla} - \frac{1}{2} \left(L_2 \vec{e}_z \cdot \vec{\nabla} + \vec{e}_z \cdot \vec{\nabla} L_2 \right) \\ &= r \cos \theta \Delta - \left(L_2 + r \frac{\partial}{\partial r} \right) \left(\cos \theta \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) . \end{aligned}$$

2.1.4 Conditions aux limites pour cette décomposition

Il reste à établir les conditions aux limites cinématiques pour cette formulation. Dans le cas de déplacement nul (“no-slip”)

$$(2.53) \quad \vec{u} = \vec{0} = \begin{cases} \frac{1}{r} L_2(u_p) \\ \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r u_p) \right) + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial u_t}{\partial \phi} \\ \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r u_p) \right) - \frac{\partial u_t}{\partial \theta} . \end{cases}$$

De $u_r = 0$ on tire $u_p = 0$, et $\frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta (2.53.b) + \frac{\partial}{\partial \phi} (2.53.c)$ donne :

$$(2.54) \quad \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r u_p) \right) + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r u_p) \right) = 0 ,$$

$$(2.55) \quad \sin \theta L_2 \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r u_p) \right) = 0,$$

d'où $\frac{\partial u_p}{\partial r} = 0$.

De plus $\frac{\partial}{\partial \phi}(2.53.b) - \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta(2.53.c)$ donne :

$$(2.56) \quad \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial^2 u_t}{\partial \phi^2} + \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \frac{\partial u_t}{\partial \theta} = 0,$$

$$(2.57) \quad \sin \theta L_2 u_t = 0.$$

Soit

$$(2.58) \quad \boxed{\begin{array}{l} u_p = 0, \\ \frac{\partial u_p}{\partial r} = 0, \\ u_t = 0. \end{array}}$$

Dans le cas sans frottements, de contrainte horizontale nulle (“stress-free”), suivant une procédure semblable à celle suivie pour le cas rigide, nous obtenons à partir de 1.75,

$$(2.59) \quad \left\{ \begin{array}{l} u_p = 0, \\ \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r u_p) \right) = 0, \\ \frac{\partial}{\partial r} u_t / r = 0, \end{array} \right.$$

$$(2.60) \quad \boxed{\begin{array}{l} u_p = 0, \\ \frac{\partial^2 u_p}{\partial r^2} = 0, \\ \frac{\partial(u_t/r)}{\partial r} = 0. \end{array}}$$

On peut noter que dans les deux cas, ces conditions aux limites sont bien suffisantes pour contraindre l'opérateur bi-harmonique (du 4^e ordre) de l'équation d'évolution de u_p dans (2.50). En revanche, on ne peut pas simplifier le système en calculant directement l'évolution en temps de Δu_p , car on n'a pas de conditions aux limites sur celui-ci.

Pour le champ magnétique, à la frontière noyau-manteau et au delà ($r > r_e$),

$$(2.61) \quad \left\{ \begin{array}{l} \vec{B} = -\vec{\nabla} \Phi, \\ \Delta \Phi = 0. \end{array} \right.$$

Le champ magnétique (et donc la composante radiale de $\vec{\nabla} \wedge \vec{B}$) sont continus à la frontière noyau-manteau. Dans le manteau

$$(2.62) \quad \vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \vec{0},$$

dans le noyau on a donc, par continuité,

$$(2.63) \quad (\vec{\nabla} \wedge \vec{B}) \cdot \vec{e}_r = -\frac{1}{r} L_2 B_t = 0,$$

donc

$$(2.64) \quad B_t = 0, \quad \text{en } r = r_e.$$

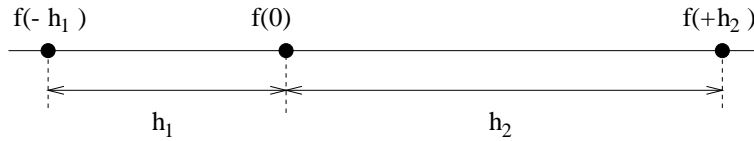
Pour le scalaire poloïdal, on a B_p et $\frac{\partial B_p}{\partial r}$ continus à l'interface et se raccordant au champ potentiel dans l'isolant. Nous verrons, une fois la décomposition en harmoniques sphériques introduite, comment le décrire.

2.2 Discrétisation Verticale

2.2.1 Schéma radial

Nous avons calculé les dérivés radiales par un schéma de différences finies. A cette approche, il est généralement préféré une méthode spectrale utilisant les polynômes de Chebyshev. Nous choisissons de discrétiser nos équations dans l'espace physique pour cette direction pour deux raisons. La première est de pouvoir facilement modifier les conditions aux limites de notre système, ce qui est beaucoup plus facile et moins coûteux dans l'espace physique. La seconde est de pouvoir à terme paralléliser notre approche.

On utilise un schéma consistant (au sens de l'erreur de troncature), aux différences finies centrées, écrit directement sur une grille irrégulière. Basé sur le développement de Taylor, ce schéma s'écrit en notation simplifiée



$$(2.65) \quad (\tilde{\delta}f)_0 = \frac{h_1}{h_1 + h_2} \left(\frac{f(h_2) - f(0)}{h_2} \right) + \frac{h_2}{h_1 + h_2} \left(\frac{f(0) - f(-h_1)}{h_1} \right),$$

$$(2.66) \quad \frac{\partial f}{\partial x}(0) = (\tilde{\delta}f)_0 + \tilde{\tau}_0$$

$$(2.67) \quad \tilde{\tau}_0 = -\frac{h_1 h_2}{6} \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(0) + \mathcal{O}(h^3),$$

et

$$(2.68) \quad (\tilde{\delta}^2 f)_0 = \frac{\tilde{\delta}f(\frac{h_2}{2}) - \tilde{\delta}f(-\frac{h_1}{2})}{(h_1 + h_2)/2},$$

$$(\tilde{\delta}^2 f)_0 = \frac{h_2 f(-h_1) - (h_1 + h_2) f(0) + h_1 f(h_2)}{(h_1 h_2 (h_1 + h_2))/2}.$$

$$(2.69) \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0) = (\tilde{\delta}^2 f)_0 + \tilde{\tau}'_0$$

$$(2.70) \quad \tilde{\tau}'_0 = \underbrace{-\frac{1}{3}(h_2 - h_1) \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(0)}_{(*)} - \frac{h_1^2 - h_1 h_2 + h_2^2}{12} \frac{\partial^4 f}{\partial x^4}(0) + (h_2 - h_1) \mathcal{O}(h^3).$$

Le terme marqué d'un astérisque est spécifique aux différences sur une grille irrégulière (il s'annule pour $h_1 = h_2$). C'est de ce terme que vient toute la difficulté à définir l'ordre d'un schéma sur une grille irrégulière. Il est particulièrement clair lorsqu'on considère ce terme qu'il est préférable d'utiliser une série géométrique pour construire la grille, plutôt qu'une série arithmétique (pour une série géométrique le terme $(h_2 - h_1)$ est proportionnel à h). Dans le cas particulier d'une grille régulière ($h_1 = h_2 = h$) ces schémas dégèrent en δ et δ^2 qui correspondent aux formules classiques centrées d'ordre deux,

$$(2.71) \quad (\delta f)_0 = \frac{f(h) - f(-h)}{2h},$$

$$(2.72) \quad (\delta^2 f)_0 = \frac{f(-h) - 2f(0) + f(h)}{h^2}.$$

On a alors

$$(2.73) \quad \frac{\partial f}{\partial x}(0) = (\delta f)_0 + \tau_0,$$

$$(2.74) \quad \tau_0 = -\frac{h^2}{6} \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(0) - \frac{h^4}{120} \frac{\partial^5 f}{\partial x^5}(0) + \mathcal{O}(h^6),$$

$$(2.75) \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0) = (\delta^2 f)_0 + \tau'_0,$$

$$(2.76) \quad \tau'_0 = -\frac{h^2}{12} \frac{\partial^4 f}{\partial x^4}(0) - \frac{h^4}{360} \frac{\partial^6 f}{\partial x^6}(0) + \mathcal{O}(h^6).$$

2.2.2 Prise en compte des Conditions aux limites

C'est dans cette dimension que l'on rencontrera tous les problèmes de conditions aux limites. On utilise une condition de symétrie sur un point pour contraindre les dérivées d'ordre un au bord.

Les conditions $u|_0 = 0$ et $\frac{\partial u}{\partial r}|_0 = 0$ permettent de calculer l'opérateur laplacien au bord du domaine sous la forme

$$(2.77) \quad \Delta u|_0 = \frac{u(-1) - 2u(0) + u(1)}{\delta^2},$$

sous la forme

$$(2.78) \quad \Delta u|_0 = \frac{2u(1)}{\delta^2}.$$

On obtient alors le même résultat qu'en utilisant un développement de Taylor au bord du domaine (voir Fletcher II, p.378, éq. 17.104).

2.3 Décomposition spectrale sur la sphère

2.3.1 Définition et propriétés

Les harmoniques sphériques sont un ensemble de fonctions complexes $Y_l^m(\theta, \phi)$ définies sur la sphère.

$$(2.79) \quad Y_l^m(\theta, \phi) = C_l^m P_l^m(\cos \theta) e^{im\phi} \quad \text{pour} \quad \begin{cases} l = 0, 1, 2, \dots, +\infty \\ m = 0, 1, \dots, l \end{cases}$$

où C_l^m est une constante de normalisation, et P_l^m est le polynôme de Legendre associé de degré l et d'ordre m (définis ci-après).

Les harmoniques sphériques ainsi définies sont orthogonales deux à deux. Pour les calculs numériques, on choisit généralement la constante de normalisation C_l^m de manière à ce qu'elles soient orthonormées ("fully normalized")

$$(2.80) \quad \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{\pi} Y_l^m(\theta, \phi)^* Y_{l'm'}(\theta, \phi) \sin \theta \, d\theta \, d\phi = 4\pi \delta_{ll'} \delta_{mm'}$$

où $Y_l^m^*$ désigne le conjugué de Y_l^m , et où δ_{ij} est le symbole de Kronecker défini par

$$(2.81) \quad \begin{aligned} \delta_{ii} &= 1, \quad \forall i, \\ \delta_{ij} &= 0, \quad \forall i, j, \quad i \neq j. \end{aligned}$$

Cette relation d'orthonormalisation définit C_l^m comme

$$(2.82) \quad C_l^m = \sqrt{(2 - \delta_{m0})(2l + 1) \frac{(l - m)!}{(l + m)!}}$$

La fonction associée de Legendre $P_l^m(x)$ est définie pour $|x| \leq 1$ par:

$$(2.83) \quad P_l^m(x) = (-1)^m (1 - x^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m}{dx^m} P_l(x), \quad \text{pour } m \geq 0,$$

où $P_l(x)$ est le polynôme de Legendre⁴ de degré l , défini par

$$(2.84) \quad \begin{cases} P_0(x) = 1, \\ P_1(x) = x, \\ (n + 1) P_{n+1}(x) = (2n + 1) x P_n(x) - n P_{n-1}(x) \quad (n > 1). \end{cases}$$

4. Pour la définition numérique des polynomes de Legendre d'ordre élevé il convient de choisir soigneusement la relation de récurrence utilisée. Certaines relations (par exemple Press et al.) sont peu précises pour les grands m , voir à ce sujet Koop et al. 1989.

Nous rappelons ci-dessous les expressions des premières harmoniques sphériques

Y_0^0	1	Y_1^1	$-\sqrt{3} \sin \theta e^{i\phi}$	Y_2^2	$\frac{\sqrt{15}}{2} \sin^2 \theta e^{2i\phi}$
Y_1^0	$\sqrt{3} \cos \theta$	Y_2^1	$-\sqrt{15} \cos \theta \sin \theta e^{i\phi}$		
Y_2^0	$\frac{\sqrt{5}}{2} (3 \cos^2 \theta - 1)$				

Les harmoniques sphériques sont les fonctions propres de l'opérateur L_2 , elles vérifient

$$(2.85) \quad L_2 Y_l^m = -\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial Y_l^m}{\partial \theta} \right) - \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 Y_l^m}{\partial \phi^2} = l(l+1) Y_l^m,$$

ce qui est particulièrement intéressant pour exprimer le laplacien d'une fonction mise sous la forme $F(r) Y_l^m(\theta, \phi)$,

$$(2.86) \quad \Delta [F(r) Y_l^m(\theta, \phi)] = Y_l^m(\theta, \phi) \frac{1}{r^2} \left[\frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d}{dr} F(r) \right) - l(l+1) F(r) \right].$$

Les harmoniques sphériques forment une base de l'ensemble des fonctions continues définies sur la sphère. C'est-à-dire qu'une fonction F vérifiant :

$$F : [0, \pi] \times [-\pi, \pi] \longrightarrow \mathbb{R},$$

avec

$$(2.87) \quad \begin{cases} F(\theta, -\pi) = F(\theta, \pi) & \forall \theta \in [0, \pi] \\ F(0, \phi_1) = F(0, \phi_2) & \forall (\phi_1, \phi_2) \in [-\pi, \pi]^2 \\ F(\pi, \phi_1) = F(\pi, \phi_2) & \forall (\phi_1, \phi_2) \in [-\pi, \pi]^2 \end{cases}$$

s'écrit comme limite d'une somme

$$(2.88) \quad F(\theta, \phi) = \sum_{l=0}^{+\infty} \sum_{m=0}^l f_l^m Y_l^m(\theta, \phi),$$

où les coefficients f_l^m sont donnés par

$$(2.89) \quad f_l^m = \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{\pi} Y_l^{m*}(\theta, \phi) F(\theta, \phi) \sin \theta d\theta d\phi.$$

Les décompositions en harmoniques sphériques sont l'équivalent, dans la géométrie sphérique, des transformées de Fourier dans le cas plan.

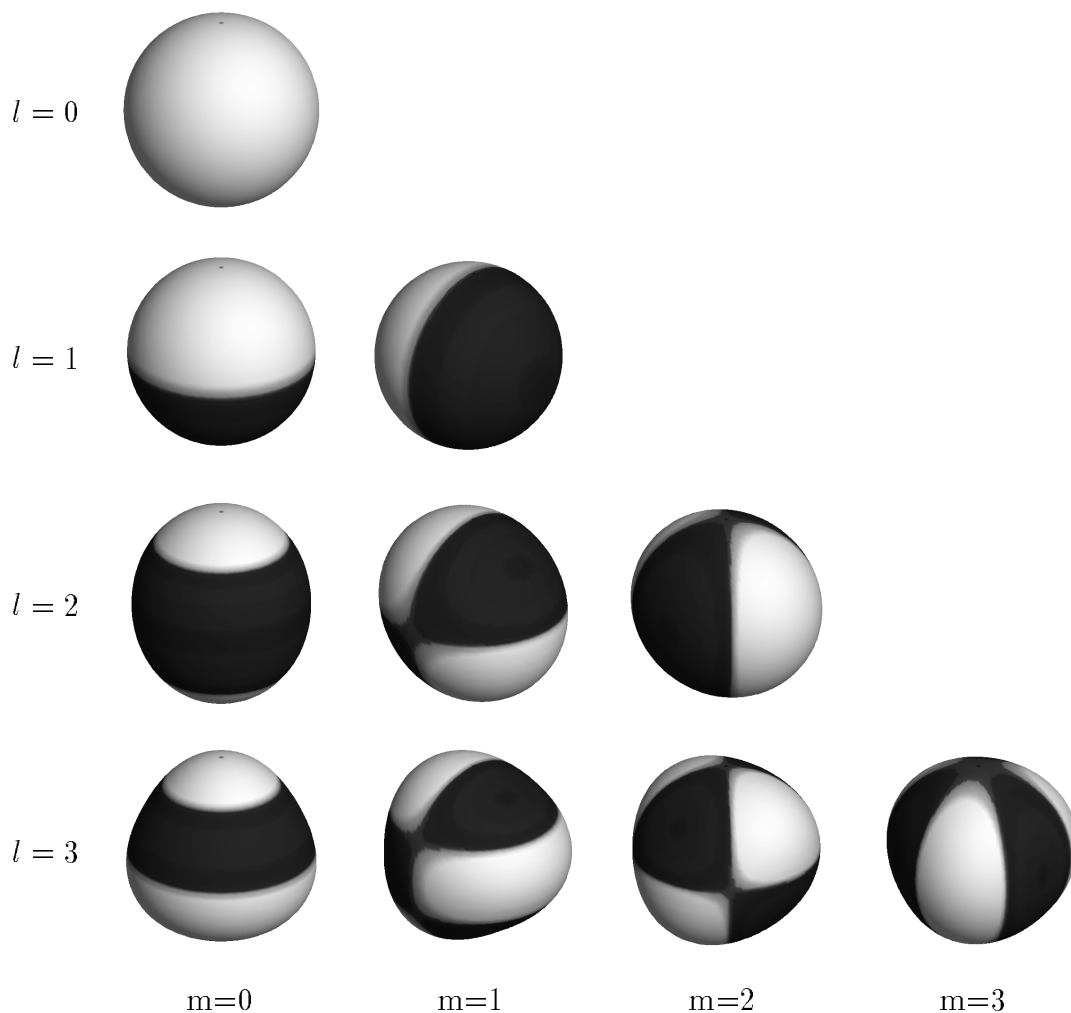


FIG. 2.1 – *Harmoniques sphériques (partie réelle) jusqu'à l'ordre et au degré 3.*

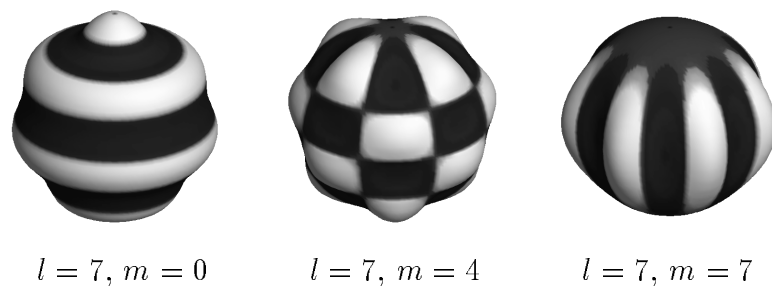


FIG. 2.2 – *Exemples d'harmoniques de degrés plus élevés. Une harmonique zonale ($l = 7, m = 0$), un cas général ($l = 7, m = 4$), et une harmonique sectorielle ($l = 7, m = 7$).*

2.3.2 Application à nos équations

Nous allons écrire explicitement les termes linéaires de nos équations sur cette base. Pour cela, nous utiliserons les relations suivantes sur les fonctions associées de Legendre. On a (Coulomb-Jobert),

$$(2.90) \quad P_{l+1}^{m+1}(x) = -(l+1+m) \sqrt{1-x^2} P_l^m(x) + x P_l^{m+1}(x),$$

$$(2.91) \quad P_{l-1}^{m+1}(x) = -(m-l) \sqrt{1-x^2} P_l^m(x) + x P_l^{m+1}(x),$$

et (Abramowitz-Stegun),

$$(2.92) \quad (x^2-1) \frac{d}{dx} P_l^m(x) = (l+m)(l-m+1) \sqrt{x^2-1} P_l^{m-1}(x) - m x P_l^m(x).$$

Et (2.90) - (2.91) donne (appliqué à $m-1$)

$$(2.93) \quad P_{l+1}^m(x) - P_{l-1}^m(x) = -\left((l+m) P_l^{m-1}(x) - (m-l-1) P_l^{m-1}(x)\right) \sqrt{1-x^2},$$

$$P_{l+1}^m(x) - P_{l-1}^m(x) = -(2l+1) \sqrt{1-x^2} P_l^{m-1}(x).$$

De même, $(m-l-1)$ (2.90) - $(l+m)$ (2.91) donne (appliqué à $m-1$)

$$(2.94) \quad (m-l-1) P_{l+1}^m(x) - (l+m) P_{l-1}^m(x) = x(-2l-1) P_l^m(x),$$

soit

$$(2.95) \quad x P_l^m(x) = \frac{l-m+1}{2l+1} P_{l+1}^m(x) + \frac{l+m}{2l+1} P_{l-1}^m(x).$$

En reportant (2.93) et (2.95) dans (2.92), il vient

$$(2.96) \quad (x^2-1) \frac{d}{dx} P_l^m = \frac{(l+m)(l-m+1)}{2l+1} (P_{l+1}^m - P_{l-1}^m) + \frac{m}{2l+1} \left((m-l-1) P_{l+1}^m - (l+m) P_{l-1}^m \right),$$

$$(x^2-1) \frac{d}{dx} P_l^m = \frac{l(l-m+1)}{2l+1} P_{l+1}^m - \frac{(l+m)(l+1)}{2l+1} P_{l-1}^m.$$

Commençons par quelques calculs préliminaires utilisant ces relations

- Calcul de : $\cos \theta Y_l^m$

Il vient directement de (2.95) avec $x = \cos \theta$

$$(2.97) \quad \cos \theta Y_l^m = \frac{\overbrace{l-m+1}^{\mathcal{A}_1(l,m)}}{2l+1} Y_{l+1}^m + \frac{\overbrace{l+m}^{\mathcal{A}_2(l,m)}}{2l+1} Y_{l-1}^m.$$

- Calcul de : $\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} Y_l^m$

Comme

$$\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} P_l^m(\cos \theta) = -\sin^2 \theta \frac{dP_l^m}{dx}(\cos \theta) = (\cos^2 \theta - 1) \frac{dP_l^m}{dx}(\cos \theta),$$

en utilisant (2.96) avec $x = \cos \theta$, il vient

$$(2.98) \quad \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} Y_l^m = \overbrace{l \mathcal{A}_1(l, m)}^{c_1(l, m)} Y_{l+1}^m - \overbrace{(l+1) \mathcal{A}_2(l, m)}^{c_2(l, m)} Y_{l-1}^m.$$

Nous pouvons en déduire l'expression des différents opérateurs linéaires intervenant dans le système d'équations 2.50.

– Calcul de : $L_2 f(r) Y_l^m$

Par construction même des Y_l^m :

$$(2.99) \quad L_2 f(r) Y_l^m = l(l+1) f(r) Y_l^m.$$

– Calcul de : $Q_3 f(r) Y_l^m$

Le calcul de $Q_3 f(r) Y_l^m$ demande l'expression préalable de $(\vec{e}_z \cdot \vec{\nabla}) f(r) Y_l^m$ (voir 2.52)

$$\begin{aligned} (\vec{e}_z \cdot \vec{\nabla}) f(r) Y_l^m &= \cos \theta \frac{\partial}{\partial r} (f(r) Y_l^m) - \frac{1}{r} \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} (f(r) Y_l^m) \\ &= \cos \theta \frac{df}{dr} Y_l^m - \frac{1}{r} \sin \theta f(r) \frac{\partial}{\partial \theta} Y_l^m, \end{aligned}$$

$$(2.100) \quad (\vec{e}_z \cdot \vec{\nabla}) f(r) Y_l^m = \cos \theta \frac{df}{dr} Y_l^m - \frac{f(r)}{r} \left(\mathcal{C}_1(l, m) Y_{l+1}^m + \mathcal{C}_2(l, m) Y_{l-1}^m \right).$$

D'où

$$\begin{aligned} Q_3 f(r) Y_l^m &= (\vec{e}_z \cdot \vec{\nabla}) f(r) Y_l^m - \frac{1}{2} \left(L_2 (\vec{e}_z \cdot \vec{\nabla}) + (\vec{e}_z \cdot \vec{\nabla}) L_2 \right) f(r) Y_l^m \\ &= \frac{f(r)}{r} \left(\mathcal{C}_1(l, m) \left[-1 + \frac{(l+1)(l+2)}{2} + \frac{l(l+1)}{2} \right] Y_{l+1}^m \right. \\ &\quad \left. + \mathcal{C}_2(l, m) \left[-1 + \frac{(l+1)l}{2} + \frac{l(l-1)}{2} \right] Y_{l-1}^m \right) \\ &\quad - l(l+1) \cos \theta \frac{df}{dr} Y_l^m \\ &= \frac{f(r)}{r} \left(\mathcal{C}_1(l, m) (l(l+2)) Y_{l+1}^m + \mathcal{C}_2(l, m) (l^2 - 1) Y_{l-1}^m \right) \\ &\quad - l(l+1) \cos \theta \frac{df}{dr} Y_l^m. \end{aligned}$$

Soit, en explicitant $\cos \theta Y_l^m$

$$(2.101) \quad Q_3 f(r) Y_l^m = Y_{l+1}^m \left[\frac{f(r)}{r} \frac{\overbrace{(l+2)l^2(l-m+1)}^{\kappa_{11}(l,m)}}{2l+1} + \frac{df}{dr} \frac{\overbrace{l(l+2)(m-l-1)}^{\kappa_{12}(l,m)}}{2l+1} \right] \\ + Y_{l-1}^m \left[\frac{f(r)}{r} \frac{\overbrace{(1-l^2)(l+m)(l+1)}^{\kappa_{21}(l,m)}}{2l+1} + \frac{df}{dr} \frac{\overbrace{(1-l^2)(l+m)}^{\kappa_{22}(l,m)}}{2l+1} \right]$$

On peut alors écrire le système (2.50) en décomposant u_p , u_t , et Θ sur cette base d'harmoniques sphériques

$$(2.102) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial t} \Delta u_{pl}^m = \nu \Delta^2 u_{pl}^m + i 2\Omega \frac{m}{l(l+1)} \Delta u_{pl}^m + 2\Omega \frac{1}{l(l+1)} Q_3 u_{tl}^m \\ \quad - \alpha g \Theta_l^m \\ \quad + \frac{1}{l(l+1)} \vec{r} \cdot \vec{\nabla} \wedge \left(\vec{\nabla} \wedge \left(\vec{u} \underline{\nabla} \vec{u} - \frac{1}{\mu_0 \rho_0} \vec{B} \underline{\nabla} \vec{B} \right) \right) \Big|_{Y_l^m}, \\ \frac{\partial}{\partial t} u_{tl}^m = \nu \Delta u_{tl}^m + i 2\Omega \frac{m}{l(l+1)} u_{tl}^m - 2\Omega \frac{1}{l(l+1)} Q_3 u_{pl}^m \\ \quad - \frac{1}{l(l+1)} \vec{r} \cdot \left(\vec{\nabla} \wedge \left(\vec{u} \underline{\nabla} \vec{u} - \frac{1}{\mu_0 \rho_0} \vec{B} \underline{\nabla} \vec{B} \right) \right) \Big|_{Y_l^m}, \\ \frac{\partial}{\partial t} \Theta_l^m = -\left(\frac{1}{r} \frac{\partial T_s}{\partial r} \right) l(l+1) u_{pl}^m + \kappa \Delta \Theta_l^m - (\vec{u} \cdot \vec{\nabla} \Theta) \Big|_{Y_l^m}, \\ \frac{\partial}{\partial t} B_{pl}^m = \eta \Delta B_{pl}^m + \frac{1}{l(l+1)} \vec{r} \cdot (\vec{\nabla} \wedge (\vec{u} \wedge \vec{B})) \Big|_{Y_l^m}, \\ \frac{\partial}{\partial t} B_{tl}^m = \eta \Delta B_{tl}^m + \frac{1}{l(l+1)} \vec{r} \cdot (\vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla} \wedge (\vec{u} \wedge \vec{B}))) \Big|_{Y_l^m}. \end{array} \right.$$

2.3.3 Conditions aux limites magnétiques

La composante poloïdale du champ se raccorde continuellement à la frontière externe à un champ dérivant d'un potentiel harmonique. Comme il est dérivable du côté de l'isolant, on peut écrire

$$(2.103) \quad (B_p)_l^m \propto \frac{1}{r^{(l+1)}}.$$

On peut alors écrire au bord

$$(2.104) \quad \frac{\partial}{\partial r}(B_p)_l^m + \frac{(l+1)}{r}(B_p)_l^m = 0,$$

car B_p et $\frac{\partial}{\partial r}B_p$ sont continus. Les conditions aux limites pour le champ s'écrivent alors

$$(2.105) \quad \begin{cases} \frac{\partial}{\partial r}(B_p)_l^m + \frac{(l+1)}{r}(B_p)_l^m = 0, \\ (B_t)_l^m = 0. \end{cases}$$

On note la force de la décomposition en harmoniques sphériques, qui nous permet de fermer le système sans avoir à calculer la diffusion du champ dans l'isolant.

2.4 Calcul des termes non-linéaires

Reste le calcul des termes non-linéaires. Ils sont calculés dans l'espace physique, puis transférés dans l'espace spectral. En théorie, le calcul de la valeur d'un champ scalaire dans l'espace physique connaissant ses coefficients spectraux ne pose pas de difficultés. Tout comme l'intégration de ces valeurs pour recalculer les coefficients spectraux. La difficulté tient ici à la projection de champs vectoriels calculés dans l'espace physique sur les coefficients spectraux de leurs composantes poloïdales et toroïdales.

Une difficulté supplémentaire est engendrée par le terme d'induction. Ce terme s'écrit comme le rotationnel du produit de deux vecteurs. Il est donc bien solénoïdal, et en tant que tel se projette sur la décomposition de Mie. On pourrait donc envisager de le calculer dans l'espace physique, puis de calculer les coefficients correspondants à sa décomposition spectrale. Cette approche nécessiterait toutefois le calcul du rotationnel dans l'espace physique, ce qui serait d'une faible précision numérique. Il est préférable de ne calculer que le produit vectoriel $\vec{u} \wedge \vec{B}$ de la vitesse par l'induction dans l'espace physique, et de l'écrire dans l'espace spectral avant d'en prendre le rotationnel. Cela soulève une difficulté supplémentaire, car ce produit n'est pas à divergence nulle.

Nous allons utiliser pour dérivées les formules nécessaires à l'intégration des non-linéarités une note intitulée "Dynamo cinématique" rédigée par Philippe Cardin (1995).

2.4.1 Harmoniques sphériques généralisées

Nous allons utiliser les harmoniques sphériques généralisées pour dériver de façon concise les formules nécessaires à la manipulation des termes non-linéaires. Ces harmoniques permettent de décrire un champ de vecteurs sur la base des harmoniques sphériques et de leurs dérivées. Les familles de dérivées par rapport aux angles θ et ϕ des harmoniques sphériques usuelles ne forment pas des bases, mais une combinaison linéaire de ces dérivées en est une.

On notera les harmoniques sphériques généralisées $Y_{lm}^+, Y_{lm}^-, Y_{lm}^0$, elles sont définies comme (voir Gel'fand et Šapiro 1956 et Phinney et Burridge 1973, pour une présentation rigoureuse)

$$(2.106) \quad Y_{lm}^+ = \frac{1}{\sqrt{l(l+1)}} \left(\frac{\partial Y_l^m}{\partial \theta} - \mathbf{i} \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial Y_l^m}{\partial \phi} \right),$$

$$(2.107) \quad Y_{lm}^0 = Y_l^m,$$

$$(2.108) \quad Y_{lm}^- = \frac{1}{\sqrt{l(l+1)}} \left(-\frac{\partial Y_l^m}{\partial \theta} - \mathbf{i} \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial Y_l^m}{\partial \phi} \right).$$

A un vecteur $\vec{V} \in \mathbb{R}^3$ de composantes (V_r, V_θ, V_ϕ) dans la base sphérique réelle

$(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\phi)$, on peut associer les coordonnées (V^+, V^0, V^-) dans la base canonique des harmoniques sphériques généralisés $(\vec{e}^+, \vec{e}^0, \vec{e}^-)$.

Nous avons les relations suivantes

$$(2.109) \quad \begin{cases} V^+ = \frac{1}{\sqrt{2}}(-V_\theta + \mathbf{i}V_\phi), \\ V^0 = V_r, \\ V^- = \frac{1}{\sqrt{2}}(V_\theta + \mathbf{i}V_\phi), \end{cases}$$

et

$$(2.110) \quad \begin{cases} \vec{e}^{+} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\vec{e}_\theta - \mathbf{i}\vec{e}_\phi), \\ \vec{e}^0 = \vec{e}_r, \\ \vec{e}^{-} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{e}_\theta - \mathbf{i}\vec{e}_\phi). \end{cases}$$

On peut alors écrire le champ de vecteurs sous la forme

$$(2.111) \quad V^+(r, \theta, \phi) = \sum_{l=0}^{+\infty} \sum_{m=0}^l V_{lm}^+(r) Y_{lm}^+(\theta, \phi),$$

$$(2.112) \quad V^0(r, \theta, \phi) = \sum_{l=0}^{+\infty} \sum_{m=0}^l V_{lm}^0(r) Y_l^m(\theta, \phi),$$

$$(2.113) \quad V^-(r, \theta, \phi) = \sum_{l=0}^{+\infty} \sum_{m=0}^l V_{lm}^-(r) Y_{lm}^-(\theta, \phi),$$

la divergence s'exprime (Gel'fand et Šapiro, 1956 ; Phinney et Burridge, 1973) ,

$$(2.114) \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{V}(r, \theta, \phi) = \sum_{l=0}^{+\infty} \sum_{m=0}^l \left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 V_{lm}^0(r)) - \frac{\sqrt{l(l+1)}}{\sqrt{2}r} (V_{lm}^+(r) + V_{lm}^-(r)) \right] Y_l^m(\theta, \phi),$$

et le rotationnel

$$(2.115) \quad \begin{aligned} (\vec{\nabla} \wedge \vec{V})^+(r, \theta, \phi) &= \sum_{l=0}^{+\infty} \sum_{m=0}^l \mathbf{i} \left[-\frac{\sqrt{l(l+1)}}{\sqrt{2}r} V_{lm}^0(r) - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r V_{lm}^+(r)) \right] Y_{lm}^+(\theta, \phi) \\ (\vec{\nabla} \wedge \vec{V})^0(r, \theta, \phi) &= \sum_{l=0}^{+\infty} \sum_{m=0}^l \left[\frac{\mathbf{i}\sqrt{l(l+1)}}{\sqrt{2}r} (V_{lm}^+(r) - V_{lm}^-(r)) \right] Y_l^m(\theta, \phi) \\ (\vec{\nabla} \wedge \vec{V})^-(r, \theta, \phi) &= \sum_{l=0}^{+\infty} \sum_{m=0}^l \mathbf{i} \left[\frac{\sqrt{l(l+1)}}{\sqrt{2}r} V_{lm}^0(r) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r V_{lm}^-(r)) \right] Y_{lm}^-(\theta, \phi) \end{aligned}$$

Nous allons utiliser ce formalisme pour expliciter le calcul des composantes poloïdale V_p , toroïdale V_t et sphéroïdale V_s d'un champ de vecteurs.

Connaissant la composante radiale de \vec{V} , on peut écrire sa décomposition en harmoniques sphériques (2.89),

$$(2.116) \quad V_r^m(r) = \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{\pi} Y_l^{m*}(\theta, \phi) V_r(r, \theta, \phi) \sin \theta \, d\theta \, d\phi$$

d'où, avec (2.25)

$$(2.117) \quad \begin{aligned} V_r(r, \theta, \phi) &= \sum_{l=0}^{+\infty} \sum_{m=0}^l V_r^m(r) Y_l^m(\theta, \phi) \\ &= \frac{1}{r} L_2(P) \\ &= \sum_{l=0}^{+\infty} \sum_{m=0}^l \frac{l(l+1)}{r} V_p^m(r) Y_l^m(\theta, \phi). \end{aligned}$$

On exprime alors la composante poloïdale $V_p^m(r)$,

$$(2.118) \quad V_p^m(r) = \frac{r}{l(l+1)} V_r^m(r),$$

qui s'écrit encore

$$(2.119) \quad V_p^m(r) = \frac{r}{l(l+1)} V_{lm}^0(r).$$

Pour calculer la composante toroïdale, on peut écrire (équation 2.25),

$$(2.120) \quad \begin{aligned} V_\theta(r, \theta, \phi) &= \sum_{l=0}^{+\infty} \sum_{m=0}^l V_s^m(r) \frac{\partial Y_l^m}{\partial \theta}(\theta, \phi) + V_t^m(r) \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial Y_l^m}{\partial \phi}(\theta, \phi), \\ V_\phi(r, \theta, \phi) &= \sum_{l=0}^{+\infty} \sum_{m=0}^l V_s^m(r) \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial Y_l^m}{\partial \phi}(\theta, \phi) - V_t^m(r) \frac{\partial Y_l^m}{\partial \theta}(\theta, \phi). \end{aligned}$$

On a alors

$$(2.121) \quad \begin{aligned} V_\theta &= \vec{V} \cdot \vec{e}_\theta, \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \vec{V} \cdot (\vec{e}^- - \vec{e}^+), \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{l=0}^{+\infty} \sum_{m=0}^l V_{lm}^- Y_{lm}^- - V_{lm}^+ Y_{lm}^+, \\ &= \frac{1}{\sqrt{2l(l+1)}} \sum_{l=0}^{+\infty} \sum_{m=0}^l (-V_{lm}^- - V_{lm}^+) \frac{\partial Y_l^m}{\partial \theta} + \mathbf{i} (V_{lm}^+ - V_{lm}^-) \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial Y_l^m}{\partial \phi}. \end{aligned}$$

On obtient par identification,

$$(2.122) \quad V_s^m = \frac{-1}{\sqrt{2l(l+1)}} (V_{lm}^+ + V_{lm}^-),$$

$$(2.123) \quad V_t^m = \frac{\mathbf{i}}{\sqrt{2l(l+1)}} (V_{lm}^+ - V_{lm}^-).$$

On peut vérifier que dans le cas d'un champ de vecteurs à divergence nulle, on retrouve la relation entre déjà établie entre la composante sphéroïdale et la composante poloïdale. Il vient de l'équation (2.114)

$$(2.124) \quad \begin{aligned} 0 &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 V_{lm}^0) - \frac{\sqrt{l(l+1)}}{\sqrt{2} r} (V_{lm}^+ + V_{lm}^-), \\ \frac{l(l+1)}{r} V_{sl}^m &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \frac{l(l+1)}{r} V_{pl}^m) \\ V_{sl}^m &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r V_{pl}^m). \end{aligned}$$

Enfin, en explicitant (2.122) et (2.123), il vient

$$(2.125) \quad \begin{aligned} V_{tl}^m &= \frac{\mathbf{i}}{\sqrt{2l(l+1)}} (V_{lm}^+ - V_{lm}^-) \\ &= \frac{\mathbf{i}}{\sqrt{2l(l+1)}} \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{\pi} (V^+ Y_{lm}^{+*} - V^- Y_{lm}^{-*}) \sin \theta \, d\theta \, d\phi \\ &= \frac{\mathbf{i}}{2l(l+1)} \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{\pi} (-V_{\theta} + \mathbf{i} V_{\phi}) \left(\frac{\partial Y_l^{m*}}{\partial \theta} + \mathbf{i} \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial Y_l^{m*}}{\partial \phi} \right) \\ &\quad - (V_{\theta} + \mathbf{i} V_{\phi}) \left(-\frac{\partial Y_l^{m*}}{\partial \theta} + \mathbf{i} \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial Y_l^{m*}}{\partial \phi} \right) \sin \theta \, d\theta \, d\phi \\ &= \frac{1}{l(l+1)} \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{\pi} \left(V_{\theta} \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial Y_l^{m*}}{\partial \phi} - V_{\phi} \frac{\partial Y_l^{m*}}{\partial \theta} \right) \sin \theta \, d\theta \, d\phi, \end{aligned}$$

$$(2.126) \quad \boxed{V_{tl}^m = \frac{1}{l(l+1)} \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{\pi} \left(V_{\theta} \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial Y_l^{m*}}{\partial \phi} - V_{\phi} \frac{\partial Y_l^{m*}}{\partial \theta} \right) \sin \theta \, d\theta \, d\phi.}$$

et

$$(2.127) \quad \begin{aligned} V_{sl}^m &= \frac{-1}{\sqrt{2l(l+1)}} (V_{lm}^+ + V_{lm}^-) \\ &= \frac{-1}{l(l+1)} \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{\pi} \left(-V_{\theta} \frac{\partial Y_l^{m*}}{\partial \theta} - V_{\phi} \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial Y_l^{m*}}{\partial \phi} \right) \sin \theta \, d\theta \, d\phi, \end{aligned}$$

$$(2.128) \quad \boxed{V_{sl}^m = \frac{1}{l(l+1)} \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{\pi} \left(V_{\theta} \frac{\partial Y_l^{m*}}{\partial \theta} + V_{\phi} \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial Y_l^{m*}}{\partial \phi} \right) \sin \theta \, d\theta \, d\phi.}$$

On peut adopter la même approche pour déterminer les composantes poloïdales et toroïdales du rotationnel d'un champ de vecteur (également utile pour le calcul de l'induction). La composante poloïdale du rotationnel $(\text{rot}V)_p$ s'écrit

en utilisant (2.119),

$$\begin{aligned}
 (\text{rot}V)_{pl}^m &= \frac{r}{l(l+1)} (\vec{\nabla} \wedge \vec{V})_{lm}^0 \\
 (2.129) \quad &= \frac{r}{l(l+1)} \frac{\mathbf{i}\sqrt{l(l+1)}}{\sqrt{2}r} (V_{lm}^+ - V_{lm}^-) \\
 &= \frac{\mathbf{i}}{\sqrt{2l(l+1)}} (V_{lm}^+ - V_{lm}^-) \\
 &= V_{tl}^m.
 \end{aligned}$$

La composante toroïdale $(\text{rot}V)_t$ vient de (2.123),

$$\begin{aligned}
 (\text{rot}V)_{tl}^m &= \frac{\mathbf{i}}{\sqrt{2l(l+1)}} ((\vec{\nabla} \wedge \vec{V})_{lm}^+ - (\vec{\nabla} \wedge \vec{V})_{lm}^-) \\
 &= \frac{-1}{\sqrt{2l(l+1)}} \left[\left(-\frac{\sqrt{l(l+1)}}{\sqrt{2}r} V_{lm}^0 - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rV_{lm}^+) \right) - \left(\frac{\sqrt{l(l+1)}}{\sqrt{2}r} V_{lm}^0 + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rV_{lm}^-) \right) \right] \\
 &= \frac{1}{r} V_{lm}^0 + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{r}{\sqrt{2l(l+1)}} (V_{lm}^+ + V_{lm}^-) \right) \\
 (2.130) \quad &= \frac{1}{r} V_{lm}^0 - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rV_{sl}^m).
 \end{aligned}$$

2.4.2 Aliasing

La méthode de calcul des termes non-linéaires que nous utilisons, par calcul dans l'espace physique en des points de collocation et intégration dans l'espace spectral, pose le problème de l'aliasing. Le nombre \mathbf{M} de points de collocations est choisi de sorte qu'il contraigne le spectre jusqu'au degré maximum calculé. Une fonction connue dans l'espace spectral jusqu'au degré \mathbf{Lmax} peut alors être évaluée dans l'espace physique, puis intégrée dans l'espace spectral sans être altérée (aux erreurs d'arrondis près). Si l'on évalue deux fonctions de ce type dans l'espace physique, le spectre de leur produit a un contenu spectral allant jusqu'à $2 \times \mathbf{Lmax}$. Si le nombre de points dans l'espace physique n'a été fixé qu'en fonction du degré \mathbf{Lmax} , l'intégration dans l'espace spectral est sous échantillonnée et l'on risque un transfert d'énergie des petites échelles vers les grandes. C'est le phénomène d'aliasing.

Pour tous les calculs présentés dans ce travail, nous avons pris soin de vérifier que l'approximation spectrale converge largement (un rapport d'au moins 10^6 a été maintenu entre les haut et bas degrés). Pour cette raison, nous avons adopté une méthode de calcul conservant l'aliasing (dite "fully aliased").

Il est important de noter que dans des études en turbulence développée, une telle convergence ne pourra plus être garantie, et qu'il sera alors nécessaire d'introduire une méthode de dé-aliasing.

Il existe au moins deux approches pour réduire l'aliasing (*c.f.* Canuto et al. 1988). La première ("padding") consiste à utiliser un nombre plus élevé de points de collocation. On utilise généralement $3M/2$ points. La seconde ("phase shift") consiste à effectuer le calcul dans l'espace physique sur deux ensembles de points décalés.

2.5 Schéma d'intégration temporel

On intègre ces équations par un schéma aux différences finies de type semi-implicite *Crank-Nicholson* pour la diffusion, et *Adams-Bashford* pour les termes de forces (termes non-linéaires, Coriolis,...).

Les équations des systèmes précédents peuvent s'écrire de façon générique sous la forme

$$(2.131) \quad \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{A} f_l^m(t) = \mathcal{B} f_l^m(t) + g_l^m(t),$$

où les opérateurs linéaires \mathcal{A} et \mathcal{B} sont à une constante multiplicative près des laplaciens ou des bi-laplaciens. On discrétise ces opérateurs par le schéma de différences finies introduit précédemment pour les dérivées radiales, et en utilisant les propriétés des harmoniques sphériques, ce qui mène à un schéma approché :

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathcal{A}_h f_l^m(t) = \mathcal{B}_h f_l^m(t) + g_l^m(t).$$

Le schéma d'intégration temporel est alors le suivant

$$(2.132) \quad \frac{\mathcal{A}_h f_l^m(t + \delta t) - \mathcal{A}_h f_l^m(t)}{\delta t} = \frac{1}{2} \mathcal{B}_h f_l^m(t) + \frac{1}{2} \mathcal{B}_h f_l^m(t + \delta t) + \frac{3}{2} g_l^m(t) - \frac{1}{2} g_l^m(t - \delta t),$$

qui s'écrit

$$(2.133) \quad \left(\frac{1}{\delta t} \mathcal{A}_h - \frac{1}{2} \mathcal{B}_h \right) f_l^m(t + \delta t) = \left(\frac{1}{\delta t} \mathcal{A}_h + \frac{1}{2} \mathcal{B}_h \right) f_l^m(t) + \frac{3}{2} g_l^m(t) - \frac{1}{2} g_l^m(t - \delta t).$$

Pour chaque équation, le calcul d'un pas de temps nécessite donc un produit matrice vecteur, et une inversion de matrice. Ces matrices sont 5-bandes pour les deux premières équations (bi-laplacien)⁵ et tri-diagonales pour les suivantes. Elles sont résolues par une méthode de pivot de Gauss ($\mathcal{O}(N)$ pour une matrice tridiagonale) accompagnée d'une décomposition "LU" pour la matrice pentadiagonale.

La partie diffusive (*Crank-Nicholson*) est inconditionnellement stable (mais peut être oscillante pour les courtes longueurs d'ondes spatiales). Le terme d'*Adams-Bashford* est conditionnellement stable. Nous avons déterminé la stabilité empiriquement dans nos simulations.

Notre algorithme a été mis au point sur des machines vectorielles puissantes (Cray J-90 & C-90).

5. Comme nous l'avons vu précédemment, on ne peut pas calculer simplement par une matrice tri-diagonale l'évolution temporelle de Δu_p car on n'a pas de conditions aux limites sur celui-ci.

Bibliographie

- Milton Abramowitz, Irene Stegun, 1972
Handbook of Mathematical Functions
National Bureau of Standards.
- George Backus, Robert Parker et Catherine Constable, 1996
Foundations of Geomagnetism
Cambridge University Press.
- Claudio Canuto, Yousuff Hussaini, Affio Quateroni, et Thomas Zang, 1988
Spectral Methods in Fluid Dynamics
Springer Verlag.
- Philippe Cardin, 1995
Dynamo cinématique
Notes personnelles.
- Jean Coulomb, Georges Jobert, 1976
Traité de géophysique interne, tome I
Masson.
- P. Cuong, Fritz Busse, 1981
Generation of magnetic fields by convection in a rotating sphere. I
Physics of the Earth and Planetary Interiors, **24**, 272-283.
- Clive Fletcher, 1988, 1991
Computational techniques for Fluid Dynamics, volumes I & II
Springer.
- I. Gel'fand et Z. Šapiro, 1956
*Representations of the group of rotations of
3-dimensional space and their applications*
American Mathematical Society Translations, Serie 2, **2**, p. 207–316.
Traduit de: Uspehi Mat. Nauk (N.S.) **7**, no. 1(47), p. 3–117, (1952).
- Gary Glatzmaier et Paul Roberts, 1995
*A three-dimensional convective dynamo solution with rotating and finitely
conducting inner core and mantle*
Physics of the Earth and Planetary Interiors, **91**, p. 63–75.
- David Gottlieb et Steven Orzag, 1977
Numerical analysis of spectral methods: theory and applications
SIAM Publications.

- R. **Koop** et D. Stelpstra, 1989
On the computation of the gravitational potential and its first and second order derivatives.
Manuscripta Geodactica, **14**, 373-382.
- Weijia **Kuang** et Jeremy Bloxham, 1997
An Earth-like numerical dynamo model
Nature, **389**, p. 371–374.
- Robert **Phinney** et Robert Burridge, 1973
Representation of the Elastic-Gravitational Excitation of a Spherical Earth Model by Generalized Spherical Harmonics
Geophys. J. R. Astr. Soc., **34**, 451-487.
- William **Press**, Saul Teukolsky, William Vetterling, Brian Flannery, 1986, 1992
Numerical Recipes
Cambridge University Press.
- Paul **Roberts**, 1968
On the thermal instability of a rotating-fluid sphere containing heat sources
Philosophical Transaction A, **263**, p 93-117.
- Andreas **Tilgner** et Friedrich Busse, 1997
Finite Amplitude Convection in Rotating Spherical Fluid Shells
Journal of Fluid Mechanics, **332**, p. 359–376.

Summary

We study here a simplified problem (axisymmetric, and with no energy equation) where motions are generated by differentially rotating boundaries. We first study the fluid dynamic problem. After rapidly recalling the experimental and theoretical knowledge on Ekman layers (§3.1), we test our numerical resolution (fig 3.5 & 3.6). The asymptotic solution (Proudman, 1956) for this problem is explained in §3.2. The simplicity of this problem (as compared to the dynamo one) allows us to study a wide range of Ekman numbers (§3.3). It is found that the Ekman number has to be decreased below 10^{-6} to reproduce qualitative features of the asymptotic solution (see fig. 3.10 and 3.12).

We then study the MHD problem, in the presence of an imposed dipolar and force free magnetic field with sources at the inner core boundary (fig. 3.14). We compare (§3.4.2) the results with an insulating inner body with the numerical study of Hollerbach (1994) and the analytical development of Kleorin et al. (1997). We find a good agreement with both (fig. 3.19). Then we study in more details the case of a conducting inner core (§3.4.3, §3.4.4). In this case, when the magnetic field is strong enough, the solution is expected to be close to a state of solid rotation with the inner body. As the Elsasser number increases, the boundary layers are modified by magnetic effects. Ekman layers are progressively changed into Hartmann type layers (fig. 3.16 and 3.17). In the limit of large Elsasser numbers, the shear at the inner sphere boundary vanishes, as the flow tends to a bulk rotation together with the inner sphere. The first effects of the Lorentz forces on the main flow is, as expected, to smooth the change in angular velocity at the tangent cylinder (fig. 3.24). Unexpectedly, for increasing strength of the field, we observed a super rotation (the fluid's angular velocity reaches a maximum inside the fluid volume) localized in an equatorial torus limited by imposed field lines. It results from the spherical geometry (Hartmann and Ekman boundaries singularities) and the presence of a conducting inner core. At a given field strength, the amplitude of this phenomenon depends on the Ekman number and tends to vanish in the magnetostrophic limit. This demonstrates once again the decisive role played by the Ekman number on the solutions, even with important magnetic effects.

Main results and discussions presented in this chapter have been submitted to “Earth and Planetary Science Letters” in an article entitled “MHD flow in a slightly differentially rotating spherical shell, with conducting inner core, in a dipolar magnetic field”, co-authored with Philippe Cardin and Dominique Jault. It is included as a “pre-print” in appendix C.

Chapitre 3

Magnétohydrodynamique entre deux sphères en rotation différentielle



Le système d'équations introduit aux chapitres précédents est complexe et sa résolution numérique ardue. Il apparaît donc sensé d'en étudier pour commencer une version simplifiée. L'une des difficultés majeures que l'on rencontre lorsque l'on cherche à approcher numériquement une solution de ce système est liée à la rotation très rapide de la terre. Le nombre d'Ekman qui mesure le temps caractéristique associé à la rotation du système par rapport au temps caractéristique associé à la viscosité du fluide est très petit, environ 10^{-15} . La puissance de calcul nécessaire à la résolution du système (ou d'un système simplifié) croît très rapidement lorsque l'on diminue ce paramètre¹. Même en utilisant diverses astuces pour réduire les petites échelles (suppression des couches d'Ekman, usage d'hyperviscosité), ce nombre n'est jamais descendu en dessous de 10^{-6} et est en général choisi autour de 10^{-5} , ce qui reviendrait à allonger la longueur du jour d'un coefficient supérieur au million, ou encore, à surestimer d'autant la viscosité du fluide dans le noyau liquide.

Il paraît utile de chercher à mieux comprendre les difficultés numériques associées aux petits nombres d'Ekman via l'étude de problèmes simplifiés. Nous présentons ici l'étude de l'un de ces problèmes : axisymétrique, laminaire et où les mouvements sont générés par une rotation différentielle des sphères aux limites du problème (figure 3.1). On notera Ω la rotation de la sphère externe (à

1. Considérons la résolution de structures en $E^{1/2}$, pour trois dimensions d'espace et en tenant compte de la stabilité numérique, le temps de calcul croît comme E^{-2} .

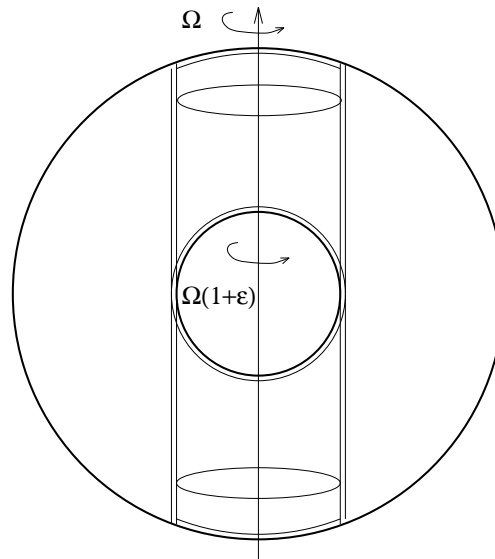


FIG. 3.1 – Nous étudions l'écoulement fluide, puis l'écoulement MHD entre deux sphères en rotation rapide et légèrement différentielle.

laquelle notre repère sera associé) et $(1 + \epsilon)\Omega$ celle de la sphère interne.

Nous étudions ce problème de mécanique des fluides, puis l'écoulement magnétohydrodynamique en présence d'un champ magnétique imposé. Nous cherchons à étudier une gamme aussi large que possible de paramètres et essaierons d'en tirer des conclusions sur le régime asymptotique des petits nombres d'Ekman. Par la nature de ce problème, l'usage d'une hyperviscosité ou la suppression des couches d'Ekman n'auraient pas de sens. Une motivation supplémentaire pour ce travail est de pouvoir tester le code 3D présenté au chapitre précédent sur un problème assez simple et dont la solution est bien comprise, afin de le valider. Ce travail nous permet également de tester les performances et les limitations de notre approche numérique.

Bien que nettement plus simple que la convection magnétohydrodynamique en trois dimensions, ce problème est très intéressant en lui même, puisqu'il présente, même en l'absence de champ magnétique imposé, une solution asymptotique non triviale. Enfin, l'annonce récente d'une possible observation de rotation différentielle de la graine par rapport au manteau terrestre (Song et al. 1996, Su et al. 1996) ajoutera, si cela était nécessaire, une motivation supplémentaire à l'étude de l'écoulement entre deux sphères concentriques en rotation différentielle et des effets d'un champ magnétique sur cet écoulement.

3.1 Système et forme adimensionnée

On peut simplifier le système (1.71) ; pour ce problème, l'équation d'énergie peut être oubliée,

$$(3.1) \quad \begin{cases} \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} &= -\vec{u} \cdot \nabla \vec{u} - \frac{1}{\rho_0} \vec{\nabla} \pi + \nu \Delta \vec{u} - 2\Omega (\vec{e}_z \wedge \vec{u}) \\ &+ \frac{1}{\mu_0 \rho_0} (\vec{\nabla} \wedge \vec{B}) \wedge \vec{B}, \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{u} &= 0, \\ \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} &= \vec{\nabla} \wedge (\vec{u} \wedge \vec{B}) + \eta \Delta \vec{B}, \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0. \end{cases}$$

On adimensionnalise le système d'équations (3.1), en choisissant respectivement comme unité de longueur de temps et d'induction

$$(3.2) \quad \mathcal{L} = r_e, \quad t = [\varepsilon \Omega]^{-1}, \quad \mathcal{B} = B_0 |_{r=r_e}.$$

On peut alors définir les grandeurs sans dimension

$$(3.3) \quad E = \frac{\nu}{\Omega r_e^2}, \quad \Lambda = \frac{B_0^2}{\Omega \rho \mu \eta}, \quad P_m = \frac{\nu}{\eta},$$

appelées respectivement nombre de *Ekman*, nombre d'*Elsasser* et nombre de *Prandtl magnétique*.

Le système (3.1) s'écrit alors sous forme adimensionnée

$$(3.4) \quad \begin{cases} \varepsilon \left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla \vec{u} \right) &= -\vec{\nabla} \pi + E \Delta \vec{u} \\ &- 2 \vec{e}_z \wedge \vec{u} + \Lambda \cdot P_m^{-1} \cdot E \cdot \varepsilon^{-1} (\vec{\nabla} \wedge \vec{B}) \wedge \vec{B}, \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{u} &= 0, \\ \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} &= \vec{\nabla} \wedge (\vec{u} \wedge \vec{B}) + P_m^{-1} \cdot E \cdot \varepsilon^{-1} \Delta \vec{B}, \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0. \end{cases}$$

On décompose le champ \vec{B} en un champ statique imposé à force nulle ($\vec{j} \wedge \vec{B} = \vec{0}$) plus une perturbation induite. On peut mettre la perturbation à l'échelle pour avoir

$$(3.5) \quad \vec{B} = \vec{B}_0 + (\varepsilon \cdot P_m \cdot E^{-1}) \vec{b}.$$

Quand $b \ll B_0$, le système (3.4) devient

$$(3.6) \quad \begin{cases} \varepsilon \left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \vec{u} \nabla \vec{u} \right) &= -\vec{\nabla} \pi + E \Delta \vec{u} \\ &\quad -2 \vec{e}_z \wedge \vec{u} + \Lambda (\vec{\nabla} \wedge \vec{b}) \wedge \vec{B}_0, \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{u} &= 0, \\ \varepsilon \cdot P_m \cdot E^{-1} \frac{\partial \vec{b}}{\partial t} &= \vec{\nabla} \wedge (\vec{u} \wedge \vec{B}_0) + \Delta \vec{b}, \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{b} &= 0. \end{cases}$$

Les équations scalaires dérivent alors simplement de (2.50) puis (2.102). Il est important de noter que s'il faut quatre nombres sans dimension, ε , E , Λ , P_m , pour décrire l'ensemble des paramètres, deux d'entre eux, E , Λ , suffisent lorsqu'on ne s'intéresse qu'à l'état stationnaire ($t \rightarrow \infty$). Nous n'avons pas étudié les états intermédiaires et avons constaté (pour une large gamme de paramètres E , Λ) qu'avec nos approximations (axisymétrie, $b \ll B_0$ et $\varepsilon \ll 1$), la solution se stabilisait toujours sur un état stationnaire.

3.2 Mécanique des fluides

Dans cette section nous aborderons le problème de mécanique des fluides classique, c'est-à-dire que nous restreignons le système précédent au cas $\vec{B}_0 = \vec{0}$ et donc $\vec{b} = \vec{0}$.

3.2.1 Couches d'Ekman

Les couches visqueuses représentent un problème central dans les études de mécanique des fluides. Aux limites, lorsqu'elles sont modifiées par l'effet d'une rotation rapide, ces couches, que l'on appelle alors couches d'Ekman, deviennent encore plus importantes, car elles induisent un écoulement secondaire dans le corps du fluide.

Un exemple classique est celui de la tasse de thé². Lorsque l'on agite le thé dans une tasse avec une cuillère en lui donnant un mouvement globalement circulaire, on constate que les feuilles tombées au fond se rassemblent invariablement au centre de la tasse³. Cela prend en général l'intuition à défaut, car on s'attendrait volontiers, à ce que des effets centrifuges les séparent et les entraînent à

2. A la demande de Philippe Cardin, je précise qu'il faut utiliser du thé vert pour obtenir de bons résultats.

3. Cette observation est bien entendu indépendante du sens de la rotation imposée au fluide. Pour obtenir l'effet opposé, il faut imposer un mouvement de rotation au conteneur (la tasse) alors que le liquide est au repos, les feuilles se dispersent alors en périphérie.

la périphérie. Plus denses que le liquide (puisqu'elles sont au fond), elles échantillonnent clairement une couche limite au fond de la tasse et cet effet met en évidence la complexité des couches d'Ekman. En conjonction avec la contrainte du théorème de Proudman-Taylor (en rotation rapide l'écoulement principal est verticalement invariant), l'effet de ces couches limites sur l'écoulement principal peut être très important et même primordial très loin des régions directement affectées par les effets visqueux.

Revenons à la tasse de thé. Edward Taylor réalise, en 1972, une expérience (qu'il baptise d'ailleurs "Teacup Experiment") visant à observer ce phénomène de manière plus rigoureuse. Il utilise un vase cylindrique (d'environ 50 cm de diamètre). Pour commencer, il place le conteneur en rotation et attend d'avoir atteint un régime stationnaire de rotation en bloc du fluide avec le conteneur. Il arrête alors la rotation du conteneur ; à l'exception des régions proches du bord, le fluide continue de tourner. Il visualise l'écoulement grâce à une ligne de bulles d'hydrogène produites par électrolyse à l'aide de brèves impulsions dans un fil placé verticalement (*c.f.* figure 3.2). On observe clairement sur ses photographies un mouvement radial vers le centre du conteneur confiné dans une couche limite en bas de la cuve (photographie 3.2.b à droite). On observe également que la vitesse angulaire non-nulle de l'écoulement principal croît à l'entrée de la couche limite avant de se raccorder à la vitesse angulaire nulle du conteneur.

Pour décrire ce phénomène, on peut commencer par considérer que l'écoulement consiste en une rotation en bloc à l'exception du fluide près de la paroi qui doit tourner moins vite, pour se raccorder au conteneur qui est à l'arrêt. On aurait alors affaire à une couche limite de type classique. Cet écoulement satisfait clairement les conditions aux limites, ainsi que l'équation de continuité. En ce qui concerne l'équation de la quantité de mouvement, on doit avoir :

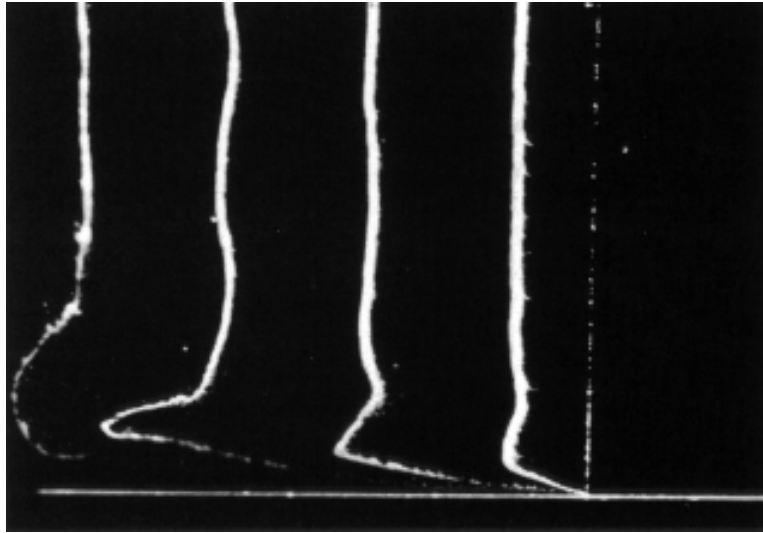
$$-\frac{1}{\rho_0} \vec{\nabla} p^0 + \frac{1}{2} \vec{\nabla} (u_\phi^0)^2 = 0,$$

dans l'écoulement principal et

$$-\frac{1}{\rho_0} \vec{\nabla} p + \frac{1}{2} \vec{\nabla} (u_\phi^2) + \nu \Delta u = 0,$$

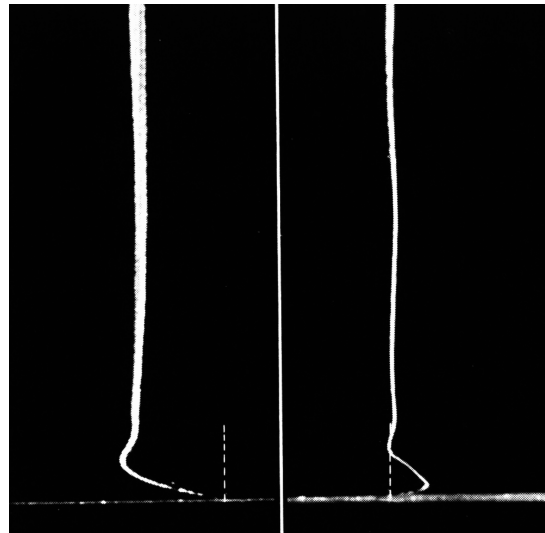
dans les couches visqueuses. On fait l'hypothèse que l'écoulement principal fixe le gradient de pression et que celui-ci ne varie pas dans la couche limite (ce qui est raisonnable si la couche limite est très fine). A gradient de pression constant, la diminution de la vitesse angulaire du fluide entraîne un déséquilibre associé au gradient centrifuge. Ce déséquilibre se caractérise par une force qui entraîne un écoulement vers le centre du conteneur (ce terme se trouve alors compensé par la viscosité).

Dans le cas en rotation, qui nous intéresse, les choses ne s'expriment pas tout à fait de la même façon (bien qu'en fait cela soit équivalent). L'équilibre dans



a.

FIG. 3.2 – L'écoulement dans une expérience en rotation (conteneur cylindrique), est ici visualisé en suivant les déformations d'une ligne de bulles d'hydrogène produites par électrolyse à partir d'un fil vertical (E.S. Taylor, 1972). Sur la première photographie (a), la vue est radiale (on regarde vers l'axe de rotation) on observe donc à travers les déformations de lignes créées par de très courtes impulsions de courant régulièrement espacées dans le temps la vitesse azimutale dans l'écoulement principal ainsi que dans la couche limite.



b.

Sur la deuxième photographie (b), on observe la déformation d'une ligne unique, l'emplacement du fil a été indiqué par des pointillés. A gauche, la vue est la même que sur la première photographie, à droite en revanche la vue est tangente et l'on visualise donc la vitesse radiale (le centre de la cuve est sur la droite). Ces résultats expérimentaux sont à comparer à la théorie analytique et aux simulations numériques (figures 3.3, 3.4 et 3.5).

l'écoulement principal s'écrit

$$-\vec{\nabla} p - 2\Omega \vec{e}_z \wedge \vec{u}^0 = 0,$$

et dans la couche limite s'écrit alors

$$-\vec{\nabla} p + \nu \Delta u - 2\Omega \vec{e}_z \wedge \vec{u} = 0,$$

la variation de vitesse angulaire intervient alors directement à travers le terme de Coriolis car c'est l'interaction avec Ω qui importe (l'interaction de u_ϕ sur lui-même étant négligeable). L'effet reste toutefois le même. Le terme de Coriolis est au premier ordre $-2\Omega \vec{e}_z \wedge \vec{u}_\phi$ et la variation de u_ϕ dans la couche limite entraîne, à nouveau, à gradient de pression constant, un déséquilibre des différents termes et un écoulement vers le centre.

L'effet visible sur la photographie 3.2.a de dépassement de la vitesse angulaire de l'écoulement principal est lié à ce mouvement secondaire parallèle à l'axe de rotation dans la couche limite, qui entraîne le fluide à son contact et l'accélère.

Une caractéristique essentielle des couches d'Ekman est la succion qui y est associée, souvent appelée pompage d'Ekman et directement liée à l'écoulement secondaire qui y a lieu (par la conservation de la masse).

Formellement, on a dans le cas plan⁴ (x, y) tournant⁵ autour d'un axe normal (z) pour l'écoulement principal (géostrophique) u^0

$$(3.7) \quad \begin{aligned} 2\Omega u_x^0 &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p^0}{\partial y}, \\ 0 &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p^0}{\partial x}. \end{aligned}$$

Dans la couche limite,

$$(3.8) \quad \begin{aligned} -2\Omega u_y &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2}, \\ 2\Omega u_x &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \frac{\partial^2 u_y}{\partial z^2}. \end{aligned}$$

En identifiant les gradients de pression horizontaux ($p = p_0$) par soustraction des équations précédentes, on a

$$(3.9) \quad \begin{aligned} -2\Omega u_y &= \nu \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2}, \\ 2\Omega (u_x - u_x^0) &= \nu \frac{\partial^2 u_y}{\partial z^2}. \end{aligned}$$

4. Tritton, 1988

5. Volume et frontières sont en rotation.

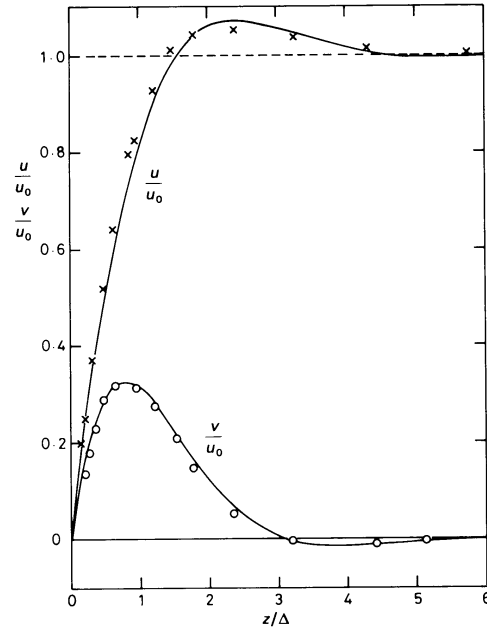


FIG. 3.3 – Comparaison entre les résultats expérimentaux et la description théorique des couches d’Ekman effectuée par D.J.Tritton (1988).

Equation dont la solution avec des conditions aux limites de vitesse nulle, est de la forme

$$(3.10) \quad \begin{aligned} u_x &= u_x^0 \left[1 - e^{-z/\delta} \cos(z/\delta) \right], \\ u_y &= u_x^0 e^{-z/\delta} \sin(z/\delta), \end{aligned}$$

la taille de la couche est donnée par $\delta = \left(\frac{\nu}{\Omega} \right)^{1/2}$.

Cette solution est représentée graphiquement figure 3.3 (où u correspond à u_x et v à u_y). Cette compréhension théorique est en excellent accord avec les observations expérimentales, comme on peut le vérifier figure 3.3.

Cependant, cette solution de couche limite ne satisfait pas la conservation de la masse ($\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0$),

$$(3.11) \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{u} = \frac{\partial}{\partial y} u_x^0 e^{-z/\delta} \sin(z/\delta),$$

Cela entraîne un écoulement secondaire u_z tel que

$$(3.12) \quad \frac{\partial}{\partial z} u_z = -\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = -\frac{\partial}{\partial y} u_x^0 e^{-z/\delta} \sin(z/\delta),$$

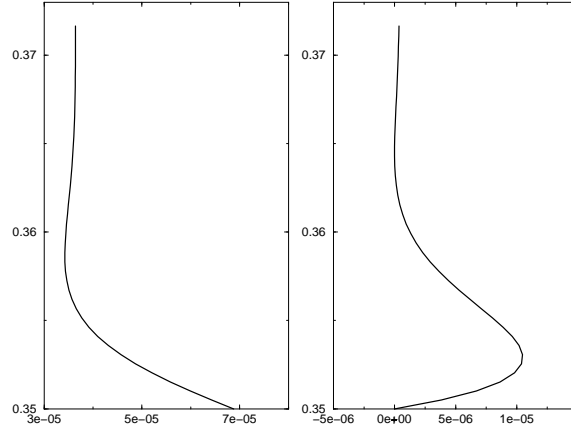
d’où

$$(3.13) \quad u_z = \frac{\partial}{\partial y} u_x^0 \left[\frac{\delta}{2} \cos(z/\delta) + \frac{\delta}{2} \sin(z/\delta) \right] e^{-z/\delta},$$

déterminé à une constante près pour que u_z s’annule au bord. D’où

$$u_z = -\frac{\delta}{2} \left(\frac{\partial u_x^0}{\partial y} \right),$$

FIG. 3.4 – *A gauche une coupe de u_ϕ et à droite une coupe de u_θ dans la couche limite près de la graine pour une de nos simulations ($E = 10^{-5}$). La comparaison avec l'expérience 3.2 est aussi bonne qu'avec la théorie 3.3.*



qui donne le mouvement rentrant dans la couche limite, c'est le "pompage d'Ekman". u_z est d'ordre δ ($E^{1/2}$), mais ne s'annule pas en dehors de la couche limite. Il entraîne un écoulement secondaire dans le volume.

Cette étude doit être modifiée dès lors que la frontière n'est plus normale à l'axe de rotation (voir Pedlosky 1979). Si $\vec{\Omega}$ fait un angle θ avec la normale, i.e.

$$\vec{\Omega} = \cos \theta \vec{e}_z + \sin \theta \vec{e}_y .$$

L'équation 3.7 (dans le volume) devient

$$(3.14) \quad \begin{aligned} 2\Omega \cos \theta u_x^o &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p^0}{\partial y} , \\ 0 &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p^0}{\partial x} . \end{aligned}$$

Le raisonnement qui suit est identique, mais la grandeur δ doit être remplacée par

$$(3.15) \quad \delta_\theta = \left(\frac{\nu}{\Omega \cos \theta} \right)^{1/2} = \delta \frac{1}{(\cos \theta)^{1/2}} .$$

Le pompage s'écrit alors

$$(3.16) \quad \vec{u} \cdot \vec{n} = -\frac{\delta_\theta}{2} \left(\frac{\partial u_x^o}{\partial y} \right) ,$$

où \vec{n} est la normale à la paroi. L'amplitude et le signe du flux de matière dans la couche limite sont donc contrôlés par le saut de vorticité à travers la couche limite, ainsi que par un coefficient géométrique dépendant de la pente locale au bord du domaine.

Ces couches limites sont donc très différentes des couches limites visqueuses classiques. Leur structure compliquée peut être résumée graphiquement sous la forme d'une spirale (appelée spirale d'Ekman) si l'on représente une section de la

vitesse azimutale par rapport à la vitesse méridionale (voir à nouveau Greenspan, 1969, Chapitre 2).

Nous verrons dans la section suivante que le pompage des couches d'Ekman peut dans certains cas contrôler l'ensemble de l'écoulement.

Du point de vue numérique, ces couches limites posent des problèmes ardu. Tout d'abord, leur petite taille (en $E^{1/2}$) qui nécessite l'usage de grilles déformées aux abords des limites du domaine. Même avec des grilles déformées, leur résolution accroît considérablement le nombre de points de calcul et il est essentiel de déterminer soigneusement combien de points sont nécessaires pour assurer leur résolution. Une autre difficulté est liée au fort gradient de la solution dans ces couches limites. Des oscillations parasites "polluent" souvent la résolution numérique de telles couches. Il est décisif de s'assurer qu'elles restent petites et qu'elles ne détériorent pas la solution (qu'elles ne s'étendent pas au cours de la résolution) et qu'elles s'amortissent, pour disparaître, dans l'état stationnaire.

A cause de leur structure compliquée et de l'écoulement secondaire qui s'y produit, la couche d'Ekman est plus difficile à résoudre qu'une couche limite classique. Nous avons étudié cette question numériquement en variant le nombre de points utilisés. Nous concluons qu'environ dix points (régulièrement espacés) à l'intérieur de la couche sont nécessaires à sa résolution numérique. Si l'on utilise moins de points, l'écoulement secondaire n'est pas correctement résolu, le pompage d'Ekman s'en trouve faussé et la solution dans l'ensemble de l'écoulement est alors erronée (voir figures 3.5 et 3.6).

3.2.2 Etat asymptotique

Le système étant en rotation rapide, dans la limite des faibles viscosités, le terme de Coriolis domine largement les autres forces dans l'écoulement principal, et il ne peut être équilibré en régime stationnaire que par le gradient de pression. C'est ce que l'on appelle l'équilibre géostrophique

$$(3.17) \quad 2\rho \vec{\Omega} \wedge \vec{u} = -\vec{\nabla} \pi .$$

En prenant le rotationnel de (3.17), on dérive la contrainte de Proudman-Taylor

$$(3.18) \quad \vec{\nabla} \wedge (\vec{e}_z \wedge \vec{u}) = \vec{0} ,$$

$$(3.19) \quad (\vec{e}_z \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} - \underbrace{(\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{z}}_{=\vec{0}} + \underbrace{\vec{u} (\vec{\nabla} \cdot \vec{e}_z)}_{=\vec{0}} - \underbrace{\vec{e}_z (\vec{\nabla} \cdot \vec{u})}_{=\vec{0}} = \vec{0} ,$$

$$(3.20) \quad (\vec{e}_z \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} = \vec{0} ,$$

$$(3.21) \quad \boxed{\frac{\partial \vec{u}}{\partial z} = \vec{0} .}$$

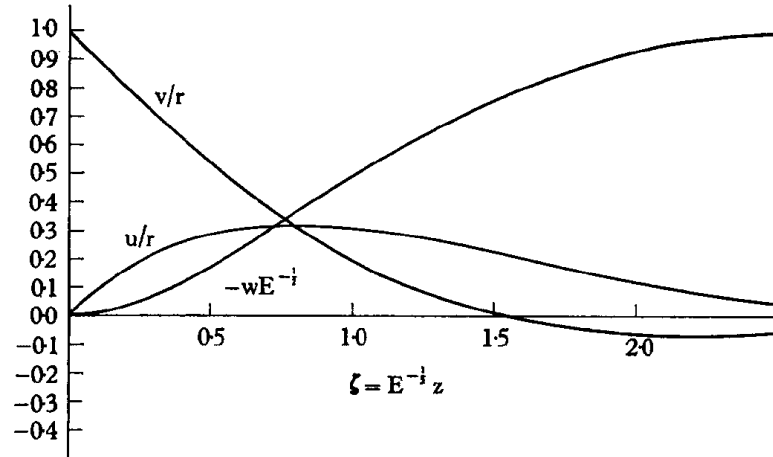


Fig. 2.1. Velocity profiles in the steady Ekman layer.

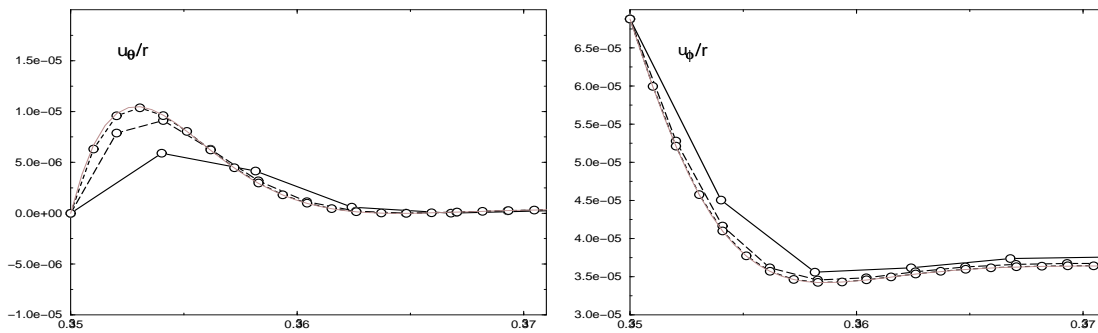


FIG. 3.5 – En haut, la couche d'Ekman théorique dans le cas plan extraite de Greenspan (1969), en bas la convergence de notre résolution numérique avec l'augmentation du nombre de points dans la couche limite (pour $E = 10^{-5}$). La composante v de Greenspan correspond à notre u_x et u à notre u_y .

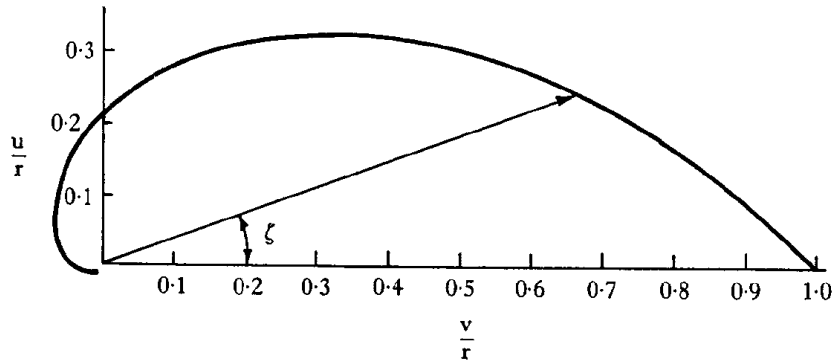


Fig. 2.2. The Ekman spiral. The boundary layer co-ordinate is plotted as a polar angle.

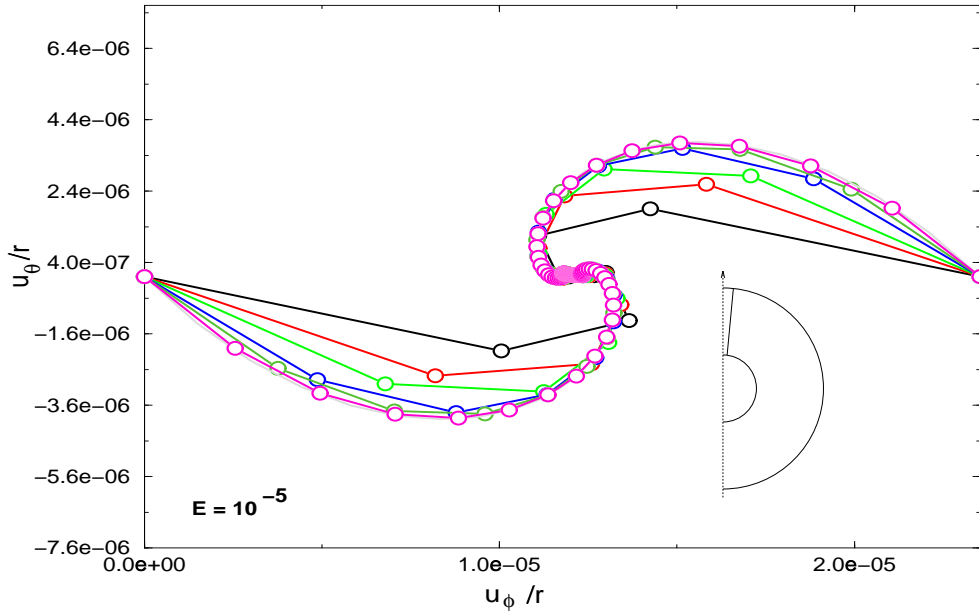


FIG. 3.6 – En haut, une représentation paramétrique de la vitesse dans la couche d'Ekman théorique (à partir des deux profils de vitesse de la figure 3.5) sous la forme d'une spirale (Greenspan, 1969). En bas, une coupe monodimensionnelle adoptant la même représentation à travers toute la coquille pour un de nos calculs ($E = 10^{-5}$ et pour un angle θ petit). La vitesse angulaire variant peu le long de cette coupe dans le corps du fluide et la vitesse méridienne étant négligeable devant celle des couches limites, cette représentation donne énormément d'importance aux couches limites (l'écoulement principal étant concentré entre les deux spirales). L'accord qualitatif avec la spirale théorique constitue une validation supplémentaire de notre résolution de la couche d'Ekman.

Un écoulement géostrophique est donc invariant verticalement. Dans une sphère parfaite (comme dans une coquille sphérique), cela implique que le mouvement s'organise en cylindres concentriques, co-axiaux avec l'axe de rotation (que l'on appelle "contours géostrophiques"). Tout mouvement selon \vec{e}_s entraînerait en raison de l'inclinaison des conditions aux limites, un étirement ou une contraction de la colonne de fluide et donc une violation de (3.21). L'écoulement principal s'écrit alors

$$(3.22) \quad \vec{u} = \vec{\nabla} \wedge [\vec{r} u_t(s)]$$

où

$$(3.23) \quad u_t(s) = s^2 \Omega_g(s).$$

Après ces rappels généraux, revenons maintenant au problème entre deux sphères en rotation différentielle. Proudman a montré qu'il existe une solution stationnaire à symétrie de révolution. Dans le corps du volume, les forces visqueuses sont négligées, la contrainte de Proudman-Taylor s'applique donc. On en déduit $u_s = 0$, par l'équation de conservation de la masse (on rejette la solution singulière à l'axe). La solution comprend donc deux termes, la vitesse géostrophique et une vitesse parallèle à l'axe $u_z(s)$.

Remarquons le rôle particulier joué par le "cylindre tangent". Il s'appuie sur l'équateur de la sphère interne (son rayon s est égal au rayon r_i de la sphère interne)⁶. Tous les cylindres dont le rayon s est supérieur à r_i touchent la sphère externe aux deux extrémités. Puisque $\vec{\Omega}_g = \vec{\Omega}$, il n'y a pas de pompage dans les couches limites. Leur état stationnaire consiste donc en une rotation à la vitesse angulaire de la sphère externe, et la vitesse axiale est nulle. A l'extérieur du cylindre tangent, la solution asymptotique sera donc une rotation en bloc avec la sphère externe. A l'intérieur du cylindre tangent la situation est différente, les cylindres géostrophiques "touchent" d'une extrémité la sphère externe, de l'autre la sphère interne. On peut donc s'attendre à ce que leurs vitesses angulaires se trouvent comprises entre celles des deux conditions aux limites. Proudman a démontré, en 1956, que la vitesse angulaire de ces cylindres est contrainte par le pompage d'Ekman. Comme le fluide est supposé incompressible et que l'écoulement à symétrie de révolution est invariant verticalement, le fluide entrant dans la couche d'Ekman à une extrémité d'un cylindre géostrophique doit nécessairement correspondre au fluide sortant de la couche limite à l'autre extrémité. Comme nous l'avons rappelé dans la section précédente, le pompage d'Ekman ne dépend pas seulement du saut de vorticité à travers la couche limite, mais également de la pente de la frontière. Dans le cas sphérique (d'après 3.16),

$$(3.24) \quad u_r = \vec{u} \cdot \vec{n} = -\frac{\delta_\theta}{2} \left(\frac{\partial u_x^0}{\partial y} \right),$$

6. Il est représenté sur la figure 3.1.

où

$$\delta_\theta = \frac{E^{1/2} r_e}{(\cos \theta)^{1/2}}.$$

Avec

$$u_x^0 = r \sin \theta \Omega(s),$$

il vient

$$(3.25) \quad u_r = -\frac{1}{2} E^{1/2} \frac{r_e}{(\cos \theta)^{1/2}} \cos \theta \Omega(s).$$

Le même raisonnement s'applique à la sphère externe (le saut de vitesse angulaire valant alors $\Omega(s) - \varepsilon \Omega$).

En utilisant $u_r = u_z \cos \theta$ (car $u_s = 0$) dans le volume, u_z s'écrit

$$(3.26) \quad u_z = -\frac{1}{2} E^{1/2} \frac{r_e}{(\cos \theta)^{1/2}} \Omega(s)$$

à l'entrée de la couche limite externe, et

$$(3.27) \quad u_z = \frac{1}{2} E^{1/2} \frac{r_e}{(\cos \theta)^{1/2}} (\Omega(s) - \varepsilon \Omega)$$

à l'entrée de la couche limite interne. En égalant les deux quantités, on détermine la vitesse angulaire d'un cylindre géostrophique de rayon $s < r_i$

$$(3.28) \quad \Omega_g(s) = \Omega + \Omega \varepsilon \frac{(1 - s^2)^{1/4}}{(1 - s^2)^{1/4} + (1 - (s/r_i)^2)^{1/4}},$$

exprimée dans le repère au repos (voir figure 3.7).

On peut vérifier que près de l'axe, les deux sphères présentant des frontières presque horizontales, le pompage est proportionnel au saut de vitesse angulaire et la vitesse angulaire des cylindres est donc proche de la moyenne de celles des deux sphères ($\Omega_g(0) = (1 + \varepsilon/2) \Omega$). Près du cylindre tangent (mais à l'intérieur de celui-ci), en revanche, le facteur géométrique est très important. L'efficacité du pompage d'Ekman augmente avec la pente de la condition aux limites, qui croît beaucoup plus vite pour la sphère interne. Le saut de vorticité entre le cylindre géostrophique et la sphère interne se doit donc d'être petit pour que le pompage, rendu important par le coefficient géométrique, puisse être compensé à l'autre extrémité ($\Omega_g(r_i) = (1 + \varepsilon) \Omega$). La solution asymptotique se caractérise donc par une synchronisation progressive de la vitesse angulaire des cylindres géostrophiques avec la sphère interne lorsque la distance à l'axe croît, puis une chute brutale à la vitesse angulaire de la sphère externe au passage du cylindre tangent.

Nous ne décrivons pas ici la couche de Stewartson (Stewartson, 1957), qui est la couche visqueuse associée à ce changement violent de vitesse géostrophique

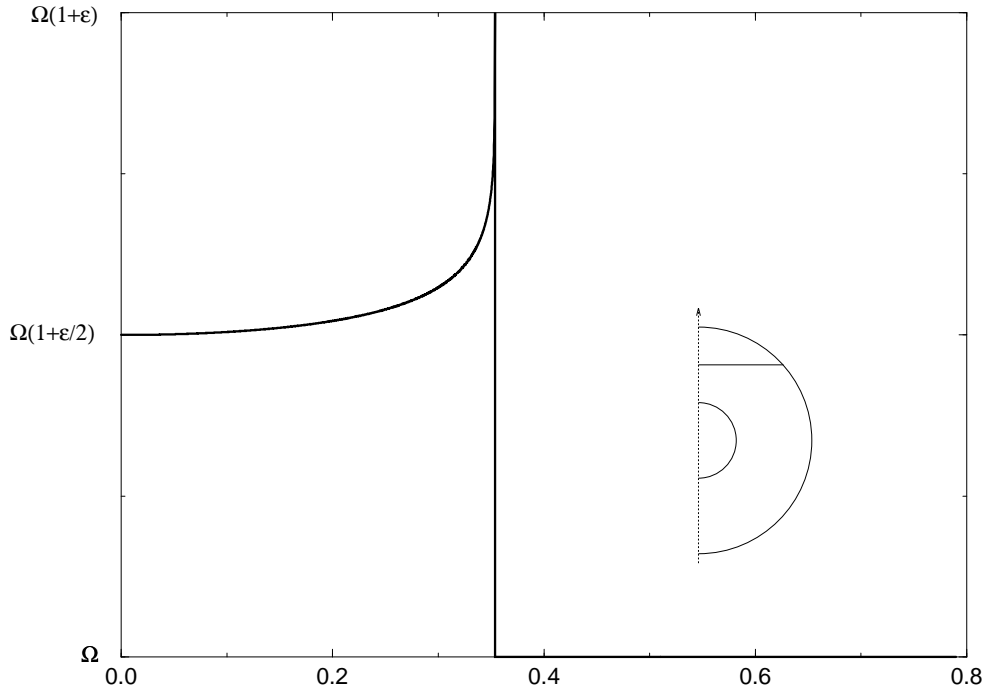


FIG. 3.7 – La vitesse angulaire en fonction de la distance à l'axe en régime stationnaire pour $E \rightarrow 0$ (d'après l'étude de Proudman, 1956).

entre $s < r_i$ et $s > r_i$. Cette structure de re-circulation très fine ($E^{1/3}$) demanderait des nombres d'Ekman très petits pour être convenablement étudiée. Même avec nos plus petits nombres d'Ekman, la viscosité modifie encore fortement l'écoulement hors des couches limites.

Pour des rotations différentielles assez petites ($\varepsilon \ll E^{1/3}$), le terme non-linéaire ne modifie pas significativement la solution. Pour des ε assez grand, on attend des instabilités 3D (voir Dumas 1994, ou Quartapelle 1995). Nous n'avons pas cherché à étudier ces régimes. Nous avons vérifié que la non-linéarité quadratique ne modifiait pas la solution.

3.2.3 Résultats numériques

Les équations sont intégrées en temps jusqu'à atteindre un régime stationnaire, pour différents nombres d'Ekman. Nous reproduisons les résultats publiés par Rainer Hollerbach (1994), pour des nombres d'Ekman $E \geq 10^{-5}$ (voir figures 3.10 et 3.11). Nous avons ensuite fait décroître le nombre d'Ekman jusqu'à 10^{-8} . Nous montrons alors que le comportement asymptotique de synchronisation de l'écoulement principal avec la sphère interne au voisinage du cylindre tangent ne peut être observé qualitativement que pour des nombres d'Ekman $E \leq 10^{-6}$ (voir Figures 3.10 et 3.12). La figure 3.12 montre clairement que les solutions obtenues pour $E > 10^{-6}$ ne possèdent pas cette caractéristique.

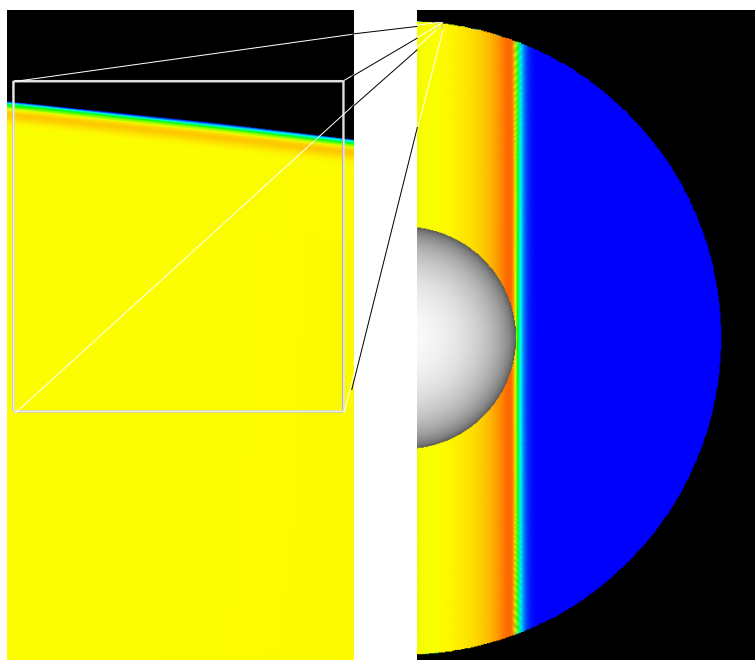


FIG. 3.8 – Les représentations en code de couleur dans le plan méridien ne permettent de voir la couche limite que pour des nombres d’Ekman de 10^{-3} et 10^{-4} . A droite la solution pour $E = 10^{-7}$ dans le plan méridien. Un tout petit carré (à peine visible) est sélectionné et agrandi à gauche, la couche limite d’Ekman est alors visible en dégradé bleu-vert très près du bord. C’est dans cette couche très fine que nous devons maintenir 10 points de calculs. Ce calcul a nécessité 1000 coquilles radiales, densifiées aux bords.

En faisant décroître le nombre d’Ekman, on fait diminuer la taille des couches limites et en même temps on laisse se développer la singularité au cylindre tangent.

On donne, à titre indicatif, le nombre de coquilles concentriques (NR) et le nombre d’harmoniques (Lmax) utilisés pour quelques valeurs du nombre d’Ekman

E	NR	Lmax
10^{-5}	300	100
10^{-6}	320	200
10^{-7}	1000	300
10^{-8}	2800	800

Le nombre minimum de coquilles croît comme $E^{1/2}$ pour assurer la résolution des couches d’Ekman. Pour des nombres d’Ekman aussi petits que 10^{-8} , la couche limite est vraiment très fine. Il aurait été impossible (avec les ressources actuelles) d’assurer la résolution de telles couches sans utiliser une grille déformée. Il aurait fallu plus de 27000 points régulièrement espacés pour assurer la même résolution

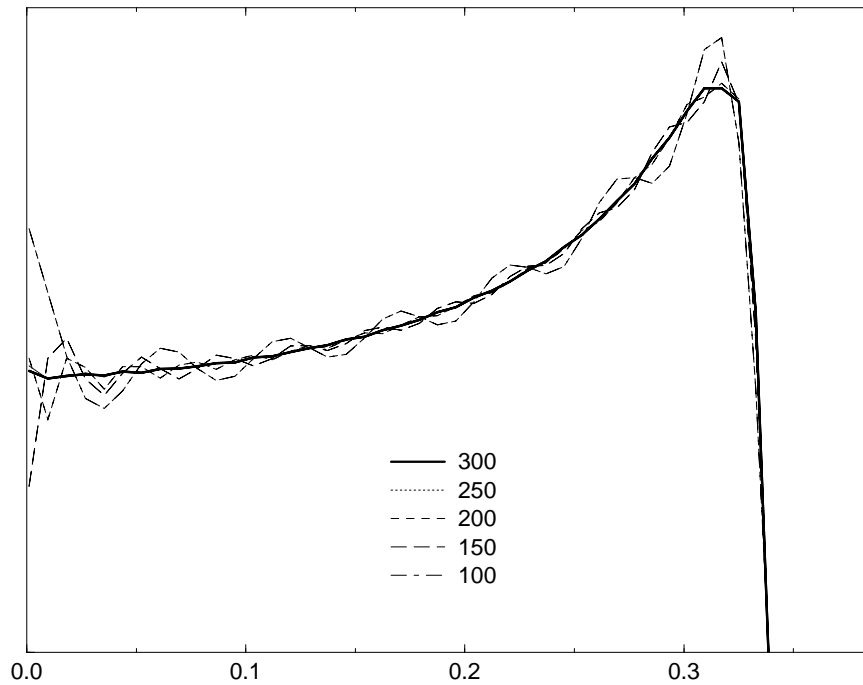


FIG. 3.9 – Les oscillations sur la solution obtenue avec moins d’harmoniques ne sont pas liées à un problème d’instabilité numérique, mais tout simplement à un problème de convergence, car le spectre de la solution a été tronqué trop tôt. Nous représentons ici dans une représentation identique à celle de la figure 3.7 une partie de la solution calculée pour $E = 10^{-7}$ avec 300 harmoniques, puis la même solution en annulant les degrés supérieurs à 250, 200, ...

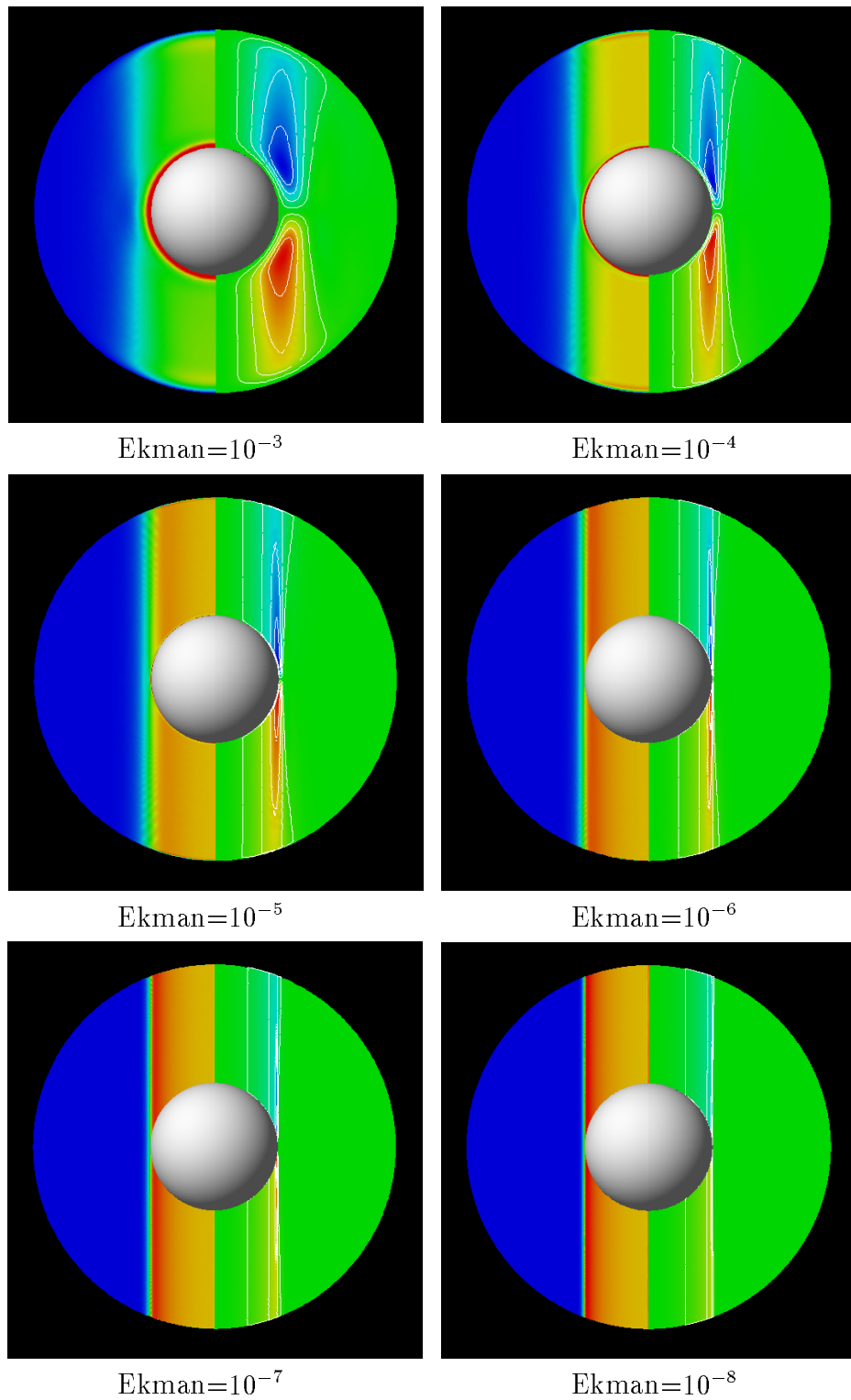


FIG. 3.10 – Vitesse angulaire (à gauche) et lignes de courants (à droite) dans un plan méridien pour différents nombres d'Ekman.

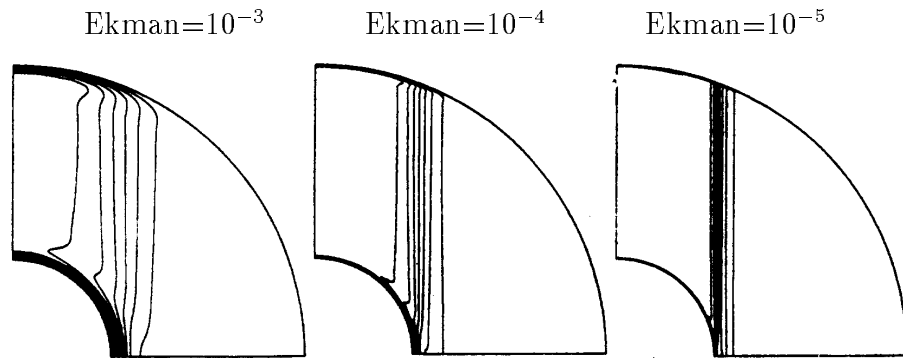


FIG. 3.11 – *Vitesse angulaire dans un demi-plan méridional. Résultats publiés par R.Hollerbach pour le même problème dans Proc. R. Soc. Lond. A en 1994. On peut comparer ces résultats avec ceux de la figure précédente. On n’observe pas pour ces valeurs du nombre d’Ekman le comportement qualitatif décrit par l’analyse asymptotique.*

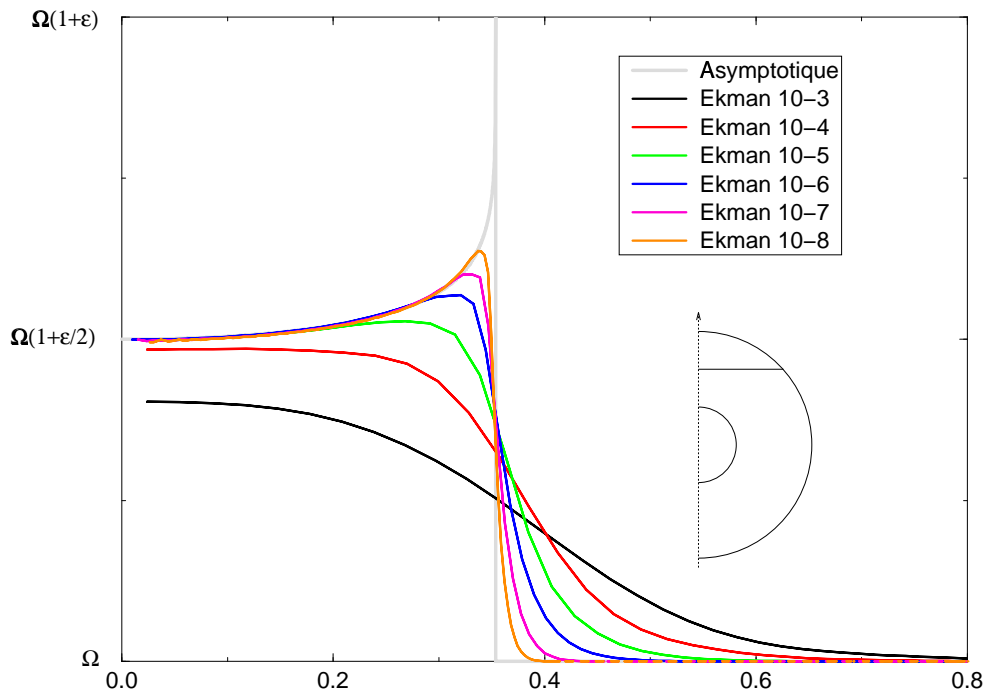


FIG. 3.12 – *Représentation de la vitesse angulaire en fonction de la distance à l’axe de rotation. Cette représentation montre clairement que la solution pour des E décroissants converge vers la limite asymptotique. Il est clair que le résultat qualitatif de synchronisation avec la sphère interne au voisinage interne du cylindre tangent ne commence à être visible que pour $E \leq 10^{-6}$.*

dans les couches limites (contre 2800 ici). Avec les grilles que nous avons utilisées, le plus petit pas de grille (c'est-à-dire par exemple l'espace entre la sphère externe et le premier point de calcul dans le domaine) vaut à peu près $0,36 \cdot E^{1/2}$ et le plus grand pas de grille vaut environs 12 fois cette valeur. Pour $E = 10^{-8}$, si l'on met le modèle à l'échelle du noyau, cela signifie que le premier point de calcul est à 130 mètres de la frontière... Pour atteindre des nombres d'Ekman comme 10^{-15} avec la même résolution, il faudrait ne laisser que 40 cm entre la frontière et le premier point de calcul.

Le nombre d'harmoniques utilisées est également ajusté pour garantir la résolution du problème. Non pour des raisons de stabilité de l'algorithme, mais simplement parce que le spectre de la solution se prolonge de manière non négligeable jusqu'à ces degrés. Pour preuve, on a représenté figure 3.9 une coupe de la solution calculée pour $E = 10^{-7}$ avec 300 harmoniques et les représentations obtenues en tronquant le spectre à différents degrés. On observe des oscillations sur la solution, comparables au phénomène de Gibbs (voir par exemple Morse et Feshbach, 1953).

3.3 Magnétohydrodynamique

Nous allons à présent étudier l'effet d'un champ magnétique imposé sur cet écoulement. L'une des motivations pour cette étude est de déterminer s'il est aussi important avec que sans champ magnétique de décroître très bas le nombre d'Ekman pour avoir une description approchée correcte du comportement asymptotique⁷.

La conductivité de la graine est un paramètre très important de ce problème. Nous avons principalement étudié pour sa pertinence géophysique le cas où graine et noyau fluide ont la même conductivité. Nous évoquerons néanmoins le cas d'une graine isolante, problème de référence qui a fait l'objet de plusieurs études (Hollerbach 1994, Kleeorin et al. 1997).

Si les lignes de champ sont cisailées par l'écoulement, cela crée un champ induit toroïdal. La génération de champ toroïdal par cisaillement du champ poloïdal imposé correspond à l'effet "omega" (noté Ω ou ω selon les références) présenté figure 3.13. En revanche la génération de champ poloïdal à partir de ce champ toroïdal n'a rien à voir avec l'effet α . Au contraire, on sait qu'il ne peut pas venir renforcer le B_p imposé, sinon on pourrait avoir une dynamo axisymétrique (ce qui s'oppose au Théorème de Cowling).

A ce champ induit sont associés des courants, dont les premiers effets seront de s'opposer au cisaillement leur ayant donné naissance (loi de Lenz). On s'attend donc à ce que les premiers effets du champ magnétique mènent à une réduction du cisaillement au cylindre tangent. En présence d'un champ magnétique fort, on peut attendre, à cause de la rotation rapide, un équilibre magnétostrophique, c'est-à-dire de la forme

$$(3.29) \quad 2\rho \vec{\Omega} \wedge \vec{u} - \vec{j} \wedge \vec{B} = -\vec{\nabla}\pi,$$

il correspond à un équilibre entre le terme de Coriolis et la force de Laplace dans lequel les forces visqueuses n'interviennent pas (toujours dans l'écoulement principal bien sûr).

Nous n'avons étudié que des champs imposés dont le rotationnel est nul (ce qui impose $\vec{J} = \vec{0}$ dans le liquide). Nous avons principalement étudié le cas où les sources du champ sont internes. Le champ imposé s'écrit alors

$$(3.30) \quad B_r = \frac{1}{r^3} \cos \theta, \quad B_\theta = \frac{1}{2r^3} \sin \theta.$$

7. Un raisonnement simpliste pouvant laisser penser que l'effet du champ magnétique étant "comparable" à celui de la viscosité (par l'atténuation des petites échelles de mouvement), une surestimation de la viscosité est moins importante en présence d'un champ magnétique fort.

FIG. 3.13 – Cette figure résume ce que l'on entend par "effet Omega". Si l'écoulement (a) cisaille un champ poloïdal (b), il courbe les lignes de force du champ (c et d). Par diffusion ohmique, ces lignes de champ peuvent se refermer sous la forme de lignes de champ toroïdales (e). L'effet Omega explique donc la génération du champ toroïdal à partir de champ poloïdal. Il permet de rendre compte dans l'expérience que nous présentons de la génération de champ toroïdal à partir du cisaillement du champ poloïdal imposé (figure d'après J.Wicht 1995, figure originale J.Love).

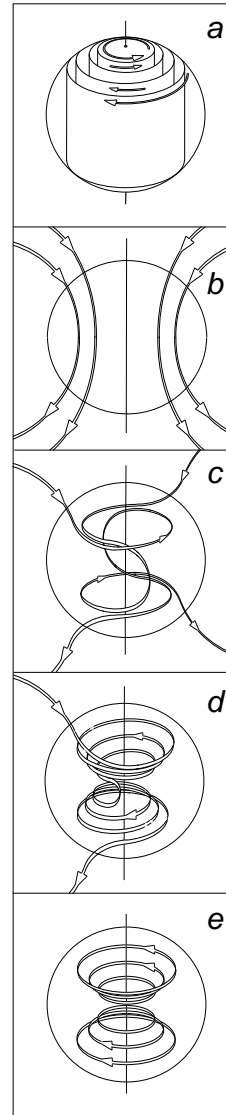
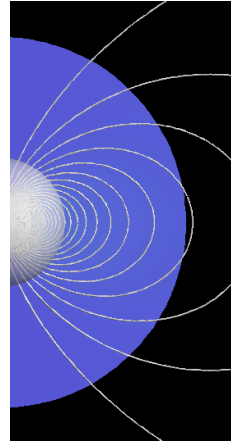


FIG. 3.14 – *Le champ magnétique imposé est à force nulle, dipolaire axial et correspond à des sources internes.*



Dans ce cas le champ magnétique n'est pas aligné avec l'axe de rotation et les lignes de force du champ (figure 3.14) coupent le cylindre tangent. Il est important de noter la variation radiale de l'intensité du champ imposé. Son amplitude varie comme r^{-3} et est donc beaucoup plus forte (un coefficient 23) à la frontière de la sphère interne, qu'aux limites externes du domaine. Comme nous mettons le champ à l'échelle par rapport au champ externe, cela signifie que le nombre d'Elsasser local près de la graine est près de 544 fois supérieur à celui que nous reportons (les effets les plus intéressants se produisent dans la limite des grands nombres d'Elsasser).

3.3.1 Couches de Hartmann et d'Ekman-Hartmann

Couches de Hartmann

En l'absence de rotation, on peut bien décrire les couches limites de Hartmann contre un isolant. Elles apparaissent par exemple dans l'écoulement de Poiseuille plan avec un champ normal. Considérons l'écoulement entre deux plans fixes, infinis, parallèles et isolants $(x, y, z = 0)$ et $(x, y, z = d)$ créé par un gradient de pression horizontal selon x et soumis à un champ magnétique uniforme \vec{B}^* perpendiculaire aux plans limites, c'est-à-dire parallèle à z (figure 3.15.a). En faisant l'hypothèse que le champ induit \vec{b} est petit devant le champ imposé, on écrit en utilisant d comme unité de longueur, d^2/ν comme unité de temps et B^* comme unité d'induction magnétique,

$$(3.31) \quad \begin{cases} \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = -\vec{\nabla} \pi + \Delta \vec{u} + M (\vec{\nabla} \wedge \vec{b}) \wedge \vec{B}^*, \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0, \\ Pm \frac{\partial \vec{b}}{\partial t} = \Delta \vec{b} + M \vec{\nabla} \wedge (\vec{u} \wedge \vec{B}^*), \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{b} = 0. \end{cases}$$

L'intensité du champ magnétique par rapport aux diffusions visqueuse et magnétique est mesurée par le nombre de Hartmann :

$$M = \frac{d B_0}{\sqrt{\mu_0 \rho_0 \nu \eta}}$$

et le nombre de Prandtl magnétique, déjà défini, s'écrit

$$Pm = \frac{\nu}{\eta}.$$

Le champ induit \vec{b} a été mis à l'échelle de sorte que

$$(3.32) \quad \vec{B} = \vec{B}^* + (M/Pm) \vec{b}.$$

Les conditions aux limites cinématiques et magnétiques s'écrivent respectivement

$$\vec{u} = \vec{0}$$

et

$$\vec{b} \cdot \vec{e}_x = \vec{b} \cdot \vec{e}_y = 0.$$

Si l'on fait l'hypothèse que le mouvement est permanent (stationnaire en temps), rectiligne, parallèle aux plans et bidimensionnel, la solution sans champ magnétique ($M = 0$) correspond au profil parabolique de Poiseuille (figure 3.15.b).

Lorsque le nombre de Hartmann est très grand en revanche, les effets visqueux sont négligeables dans l'écoulement principal et les équilibres y sont décrits, sous les mêmes hypothèses, par

$$(3.33) \quad \begin{cases} -\vec{\nabla} \pi + M (\vec{\nabla} \wedge \vec{b}^0) \wedge \vec{B}^* = \vec{0}, \\ \Delta \vec{b}^0 + M \vec{\nabla} \wedge (\vec{u}^0 \wedge \vec{B}^*) = \vec{0}. \end{cases}$$

Le champ induit \vec{b}^0 est donc dirigé, comme l'écoulement, selon \vec{e}_x , et que l'écoulement principal est invariant selon \vec{e}_z . Le fluide a tendance à entraîner les lignes de forces du champ dans la direction de son mouvement. Il crée alors un champ b_x induit parallèle au mouvement, auquel sont associés des courants électrique \vec{j} dirigés selon y . L'interaction de ces courants avec \vec{B}^* s'oppose aux cisaillements dans le fluide. Quand le nombre de Hartmann devient grand ($M \gg 1$),

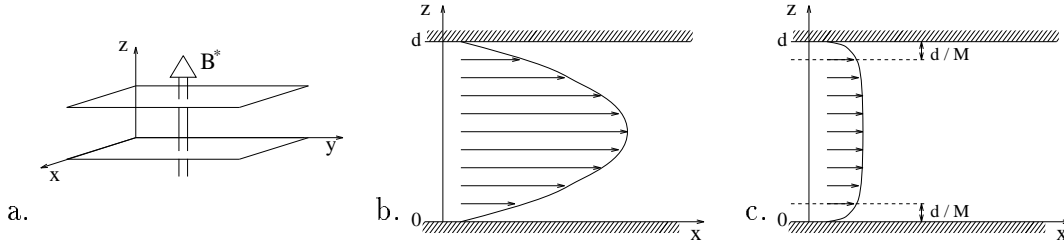


FIG. 3.15 – *Couches de Hartmann dans le cas d'un écoulement plan (a). Si le champ est faible, on obtient la solution de Poiseuille (b). Quand le champ est fort, il s'oppose aux cisaillements dans le corps de l'écoulement, où la vitesse devient quasi constante et les repousse contre l'isolant (c). Les couches limites de Hartmann correspondantes sont d'ordre M^{-1} .*

l'écoulement est donc rigidifié par les effets magnétiques. La viscosité est cependant importante au voisinage des plans limites. On écrit alors en introduisant la coordonnée ξ normale à la paroi,

$$(3.34) \quad \begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + M \frac{\partial b}{\partial \xi} = 0, \\ \frac{\partial^2 b}{\partial \xi^2} + M \frac{\partial u}{\partial \xi} = 0, \end{cases}$$

dont la solution satisfaisant les conditions aux limites est

$$(3.35) \quad \begin{cases} u = u_0 (1 - e^{-M\xi}), \\ b = b_0 (1 - e^{-M\xi}). \end{cases}$$

L'épaisseur de ces couches limites (de Hartmann) varie donc comme M^{-1} (voir figure 3.15.c). Une couche de Hartmann correspond à un équilibre entre la force de Laplace (qui entraîne le fluide avec l'écoulement principal) et les effets visqueux. Le profil de vitesse à travers l'ensemble de la section s'écrit dans la limite des grands nombres de Hartmann (Jackson 1962, Moreau 1990)

$$(3.36) \quad u_x \propto \frac{1}{M} \left[1 - e^{-Mz/d} - e^{-M(d-z)/d} \right].$$

Dans le cas où le champ n'est pas selon la normale aux bords mais forme un angle θ avec celle-ci, l'invariance par translation entraîne que seule la composante normale du champ intervient dans la définition de la couche de Hartmann. Il convient alors de remplacer B^* dans les formules précédentes par $B^* \cos \theta$. La couche devient donc singulière lorsque $\theta \rightarrow \pi/2$.

Notons enfin que si l'écoulement n'était pas invariant horizontalement, les courants associés au champ induit auraient également une composante selon \vec{e}_z à l'entrée de la couche limite.

Géométrie sphérique

Dans cette section, nous étudions la limite des grands nombres de Hartmann dans le cas sphérique. Le champ \vec{B} s'écrit alors

$$(3.37) \quad \vec{B} = \begin{pmatrix} \frac{2 \cos \theta}{r^3} \\ \frac{\sin \theta}{r^3} \\ b \end{pmatrix}$$

L'écoulement principal est proche d'une rotation en bloc et une couche de Hartmann apparaît à la frontière avec l'isolant (la sphère externe) à travers laquelle la vitesse azimutale de l'écoulement décroît de $r_0 \sin \theta (1 + \varepsilon) \Omega$ à $r_0 \sin \theta \Omega$.

En tenant compte de la géométrie du champ imposé et en introduisant comme précédemment la coordonnée radiale de couche limite ξ , on a alors :

$$(3.38) \quad \begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2M \cos \theta \frac{\partial b}{\partial \xi} = 0, \\ \frac{\partial^2 b}{\partial \xi^2} + 2M \cos \theta \frac{\partial u}{\partial \xi} = 0, \end{cases}$$

dont la solution est (Roberts, 1967)

$$(3.39) \quad u = b = \varepsilon \sin \theta (1 - e^{-2M \cos \theta \xi}).$$

Pour que cet écoulement soit compatible avec la rotation en bloc attendue dans le corps du volume, il faut encore que

$$(3.40) \quad \vec{j} \wedge \vec{B} = \vec{0}.$$

En écrivant la projection sur \vec{e}_ϕ de cette équation

$$(3.41) \quad \frac{1}{r^4} \frac{\partial}{\partial \theta} (b \sin \theta) + \frac{2 \cos \theta}{r^4} \frac{\partial}{\partial r} (r b) = 0$$

dont la solution s'écrit

$$(3.42) \quad b = \frac{1}{r \sin \theta} f\left(\frac{\sin^2 \theta}{r}\right) \quad \forall f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}.$$

On vérifie que

$$(3.43) \quad b = \varepsilon \frac{\sin \theta}{r^2},$$

mène bien alors à une solution globale.

Ces équations sont cependant singulières à l'équateur, où les lignes du champ imposé sont parallèles au bord du domaine. Cette singularité a d'importantes conséquences sur la solution asymptotique, car les courants électriques qui y rentrent ne s'annulent pas lorsque $M \rightarrow 0$ (voir Roberts, 1967).

Couches mixtes Ekman-Hartmann

La théorie des couches limites intermédiaires, influencées à la fois par la rotation et les forces magnétiques, est reprise dans Acheson et Hide⁸ (1973). Ils donnent (voir leur § 5.2) une dérivation locale de l'effet de la couche limite sur l'écoulement et sur le champ dans le corps du domaine. Pour $\Lambda = 0$, l'effet sur l'écoulement se réduit évidemment à la succion d'Ekman (décrite précédemment). Dans la limite de Hartmann, en revanche, la composante normale de \vec{u} s'annule à l'entrée des couches limites. Dans le cas d'une couche mixte, Ekman-Hartmann, des courants radiaux non nuls entrent dans la couche limite. En éliminant la vorticité de l'écoulement principal dans les expressions de u_r et j_r à l'entrée de la couche limite, on obtient (Acheson et Hide, 1973)

$$(3.44) \quad \frac{[j_r]}{[u_r]} = Pm \cdot E^{-1} \cdot ((1 + \Lambda_\Omega)^{1/2} + \Lambda_\Omega) \times (\vec{r} \cdot \vec{n}) \times \text{signe}(\vec{B} \cdot \vec{n}),$$

où Λ_Ω est défini comme

$$(3.45) \quad \Lambda_\Omega = \frac{\Omega}{\vec{\Omega} \cdot \vec{n}} \Lambda_\perp,$$

avec

$$(3.46) \quad \Lambda_\perp = \frac{(\vec{B}_0 \cdot \vec{n})^2}{\Omega \rho \mu \eta}.$$

La figure 3.16 montre comment, dans nos simulations, la spirale d'Ekman aux deux extrémités est modifiée par les effets magnétiques. L'écoulement méridional u_θ dans la couche limite (caractéristique de l'écoulement secondaire dans la couche d'Ekman) diminue, puis disparaît lorsque le nombre d'Elsasser local atteint l'ordre de l'unité.

La figure 3.17 montre l'évolution de la composante radiale de la vitesse et des courants électriques. La couche limite pour les courants électriques n'est bien définie que pour $\Lambda = 0.1, 1.0, 10.0$. La figure 3.18 donne une comparaison entre la formule théorique (3.44) et nos résultats numériques (pour $E = 10^{-5}$, $\Lambda \in [0.1, 10.0]$ et $\theta = \pi/12$).

Insistons enfin sur la complexité de la région équatoriale. Outre la singularité de la couche de Hartmann (décrite précédemment), la rotation seule (couche d'Ekman) rend cette région singulière, car le vecteur $\vec{\Omega}$ y est également parallèle au bord (voir Kleorin et al., 1997 pour une étude détaillée de ce problème en géométrie sphérique). Les études numériques apparaissent donc comme nécessaires pour décrire l'effet de la rotation sur la solution de Hartmann.

8. Il y a une erreur de typographie pour la formule liant $[j_z]$ à $[\hat{w}]$ (juste après 5.34), il faut lire $(\rho V^2 / \mu \eta^2)$ et non $(\rho V^2 / \mu \eta)$.

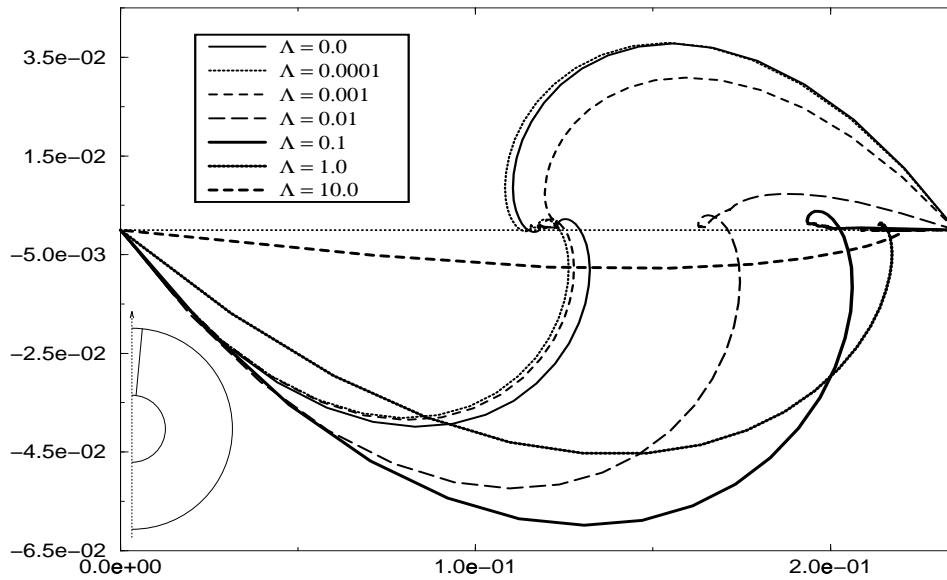


FIG. 3.16 – Représentation de u_θ/r versus u_ϕ/r dans une section monodimensionnelle de l'écoulement pour $\theta = \pi/12$ (toujours à $E = 10^{-5}$ et pour diverses valeurs du nombre d'Elsasser). Cette représentation donne beaucoup d'importance aux couches limites, car u_θ/r comme u_ϕ/r varient très peu dans l'écoulement principal le long de cette direction. Pour $\Lambda = 0.0$ cette coupe montre le raccordement des deux spirales d'Ekman aux extrémités du domaine. Lorsque l'on fait croître le nombre d'Elsasser, la vitesse angulaire de l'écoulement principal se rapproche de celle de la sphère interne. La transition d'une couche de type Ekman en une couche de type Hartmann s'accompagne d'une diminution de la composante θ de la vitesse.

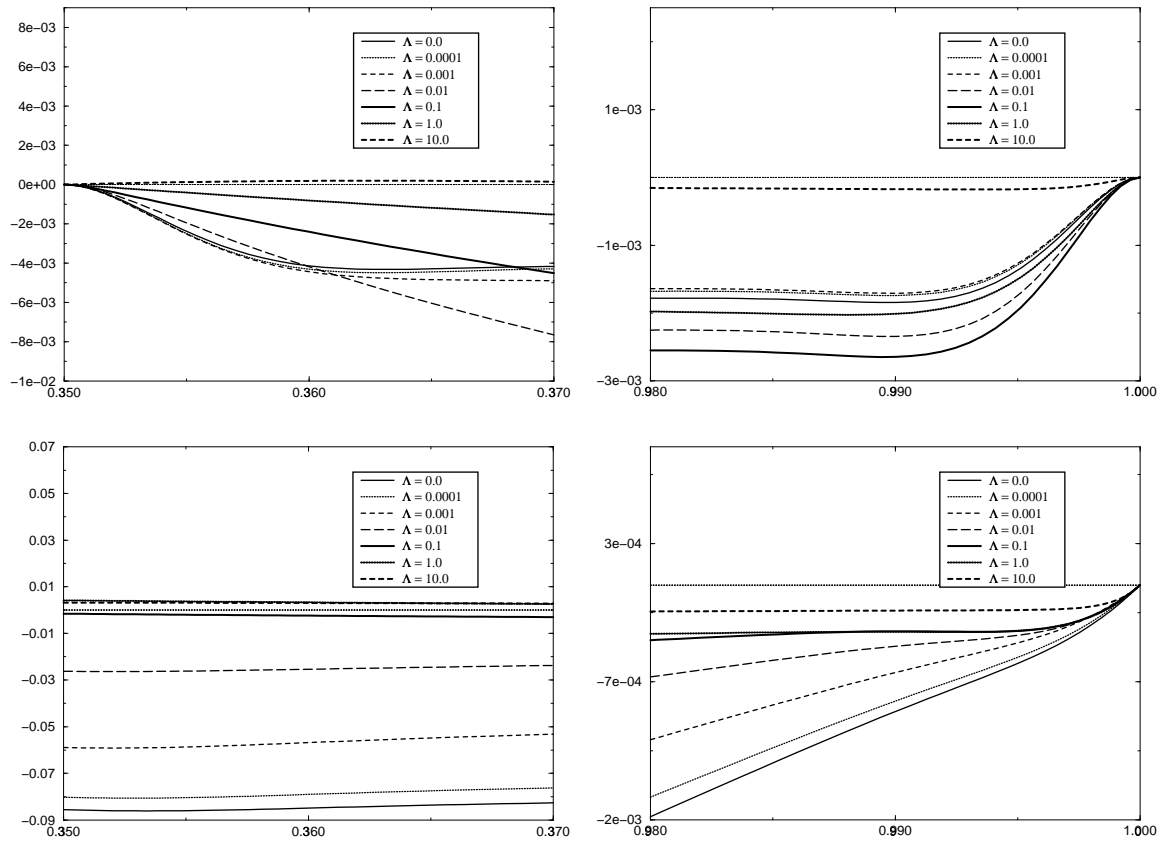


FIG. 3.17 – Composante radiale de la vitesse (en haut) et des courants électriques (en bas) près de la frontière interne (à gauche) pour $\theta = \pi/4$ et externe (à droite) pour $\theta = \pi/12$ pour $E = 10^{-5}$ et différents nombres d'Elsasser.

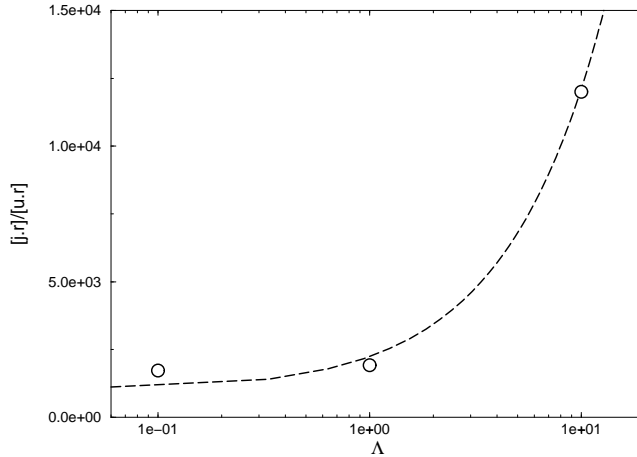


FIG. 3.18 – *Comparaison de nos résultats numériques avec la transition Ekman-Hartmann prédite théoriquement (Acheson et al. 1973). Nous représentons $[j_r]/[u_r]$ pour $\Lambda = 0.1, 1.0, 10.0$ avec $E = 10^{-5}$.*

3.3.2 Etude numérique

Validation, Comparaison avec les études antérieures

Nous présentons d’abord ici des résultats obtenus avec une graine isolante, dans le but de comparer nos résultats avec ceux de Hollerbach (1994) et avec la récente étude analytique de Kleorin, Rogachevskii, Ruzmaikin, Soward et Starchenko (1997). Le premier effet des forces magnétiques est bien de réduire le cisaillement au cylindre tangent. En augmentant le nombre d’Elsasser et donc l’effet des forces magnétiques, le mouvement s’approche d’une rotation en bloc. Comme les deux frontières sont isolantes, seul le couple visqueux est à considérer, c’est le facteur géométrique qui rend le couple externe plus efficace et le fluide est presque en rotation solidaire avec le manteau. La figure (3.19) montre comment la solution varie en fonction de Λ pour $E = 10^{-5}$. Une comparaison avec Hollerbach (1994) permet de valider nos calculs. Kleorin, Rogachevskii, Ruzmaikin, Soward et Starchenko ont réalisé récemment une étude analytique détaillée du problème équivalent avec une graine isolante. Cette étude prédit un minimum local de la vitesse angulaire dans le voisinage de l’équateur de la graine dans la limite des champs forts (voir leur section 4.3). Nous avons retrouvé cette caractéristique dans nos calculs, comme on peut le vérifier sur la section équatoriale de la figure 3.19. Cette étude dérive également (Kleorin, 1997, équation 5.4) la loi asymptotique caractérisant la taille de la singularité mixte Ekman-Hartmann à l’équateur (appelée “magnetic-Proudman layer”) dans le cas où elle est plus grande que $E^{2/5}$. Cette singularité est également rencontrée dans nos calculs avec une graine conductrice. Bien que l’hypothèse $E^{2/5}$ petit devant la taille de la singularité équatoriale, ne soit vérifiée dans nos calculs que pour les petites

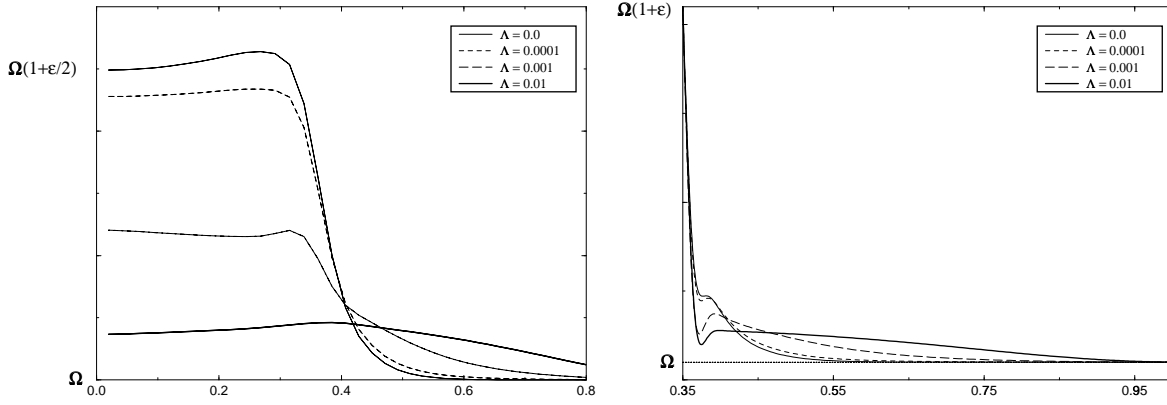


FIG. 3.19 – Représentation de la vitesse angulaire par rapport au rayon cylindrique s dans le cas d'une graine isolante pour un nombre d'Ekman de 10^{-5} . À gauche aux $3/4$ de la coquille, à droite en coupe équatoriale.

valeurs du nombre d'Elsasser, ils observent une remarquable concordance entre nos simulations (figure 3.28) et leur théorie.

Nous étudions dans la suite le cas d'une graine de conductivité électrique finie, et égale à celle du fluide. La présence du champ magnétique favorise toujours une rotation en bloc, mais cette fois avec la graine à cause du couplage magnétique entre le noyau fluide et la graine. La partie diffusive de l'équation d'induction doit à présent être résolue à l'intérieur de la graine. Dès que le nombre d'Elsasser est non nul, un couple magnétique apparaît à la frontière avec la sphère interne,

$$(3.47) \quad \Gamma_B = \varepsilon \cdot \Lambda \cdot Pm \cdot E^{-1} r \iint_S B_r b_\phi \sin \theta dS.$$

Le couple visqueux, qui existe aux deux limites du domaine, s'écrit

$$(3.48) \quad \Gamma_\nu = E r \iint_S \sin \theta r \frac{\partial}{\partial r} \frac{u_\phi}{r} dS.$$

Dans le régime stationnaire ces couples doivent s'équilibrer. Dans nos calculs, ils s'équilibrent au % près, ce qui constitue une validation supplémentaire.

$\Lambda = 0.1$	$E = 10^{-3}$	$E = 10^{-4}$	$E = 10^{-5}$	$E = 10^{-6}$
$\Gamma_\nu _{r_i}$	$-3.13 \cdot 10^{-8}$	$-4.04 \cdot 10^{-9}$	$-1.19 \cdot 10^{-9}$	$-2.39 \cdot 10^{-10}$
$\Gamma_B _{r_i}$	$-2.40 \cdot 10^{-6}$	$-1.39 \cdot 10^{-6}$	$-6.96 \cdot 10^{-7}$	$-3.00 \cdot 10^{-7}$
$\Gamma_\nu _{r_e}$	$2.43 \cdot 10^{-6}$	$1.39 \cdot 10^{-6}$	$7.00 \cdot 10^{-7}$	$3.05 \cdot 10^{-7}$

(3.49)

Résultats numériques

Pour mieux comprendre comment l'écoulement principal est accéléré par la force de Laplace, nous avons mené une étude sans rotation (c'est-à-dire que la

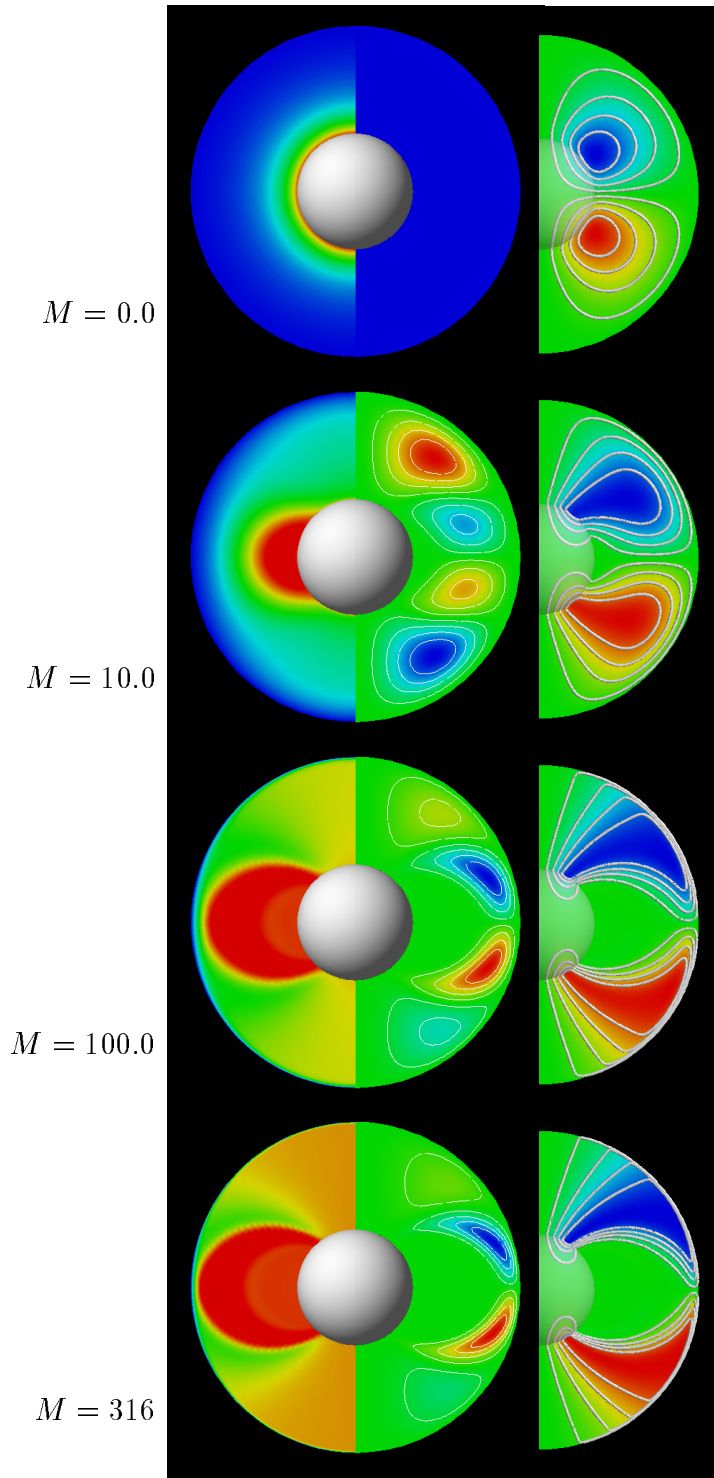


FIG. 3.20 – Coupes méridionales de la vitesse angulaire u_ϕ/s , de la vitesse méridionale u_{pol} , et des courants poloïdaux j_{pol} en l'absence de force de Coriolis, pour des nombres de Hartmann croissants.

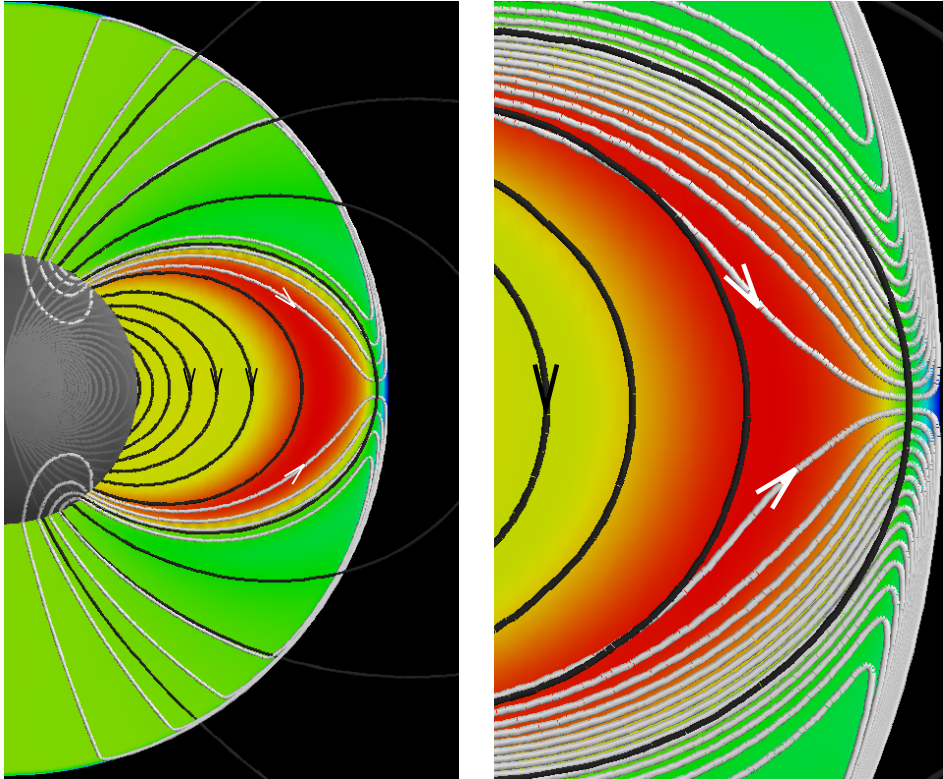


FIG. 3.21 – Visualisation des courants (lignes claires) et du champ imposé (lignes sombres) dans un plan méridien pour $M = 316$. Le code de couleur représente la vitesse angulaire (du bleu foncé au rouge). En bleu foncé la vitesse angulaire du manteau, en jaune celle de la graine. La région en “super-rotation” est en rouge. Les courants quittent les lignes forces du champ imposé et la force de Laplace est positive dans cette région.

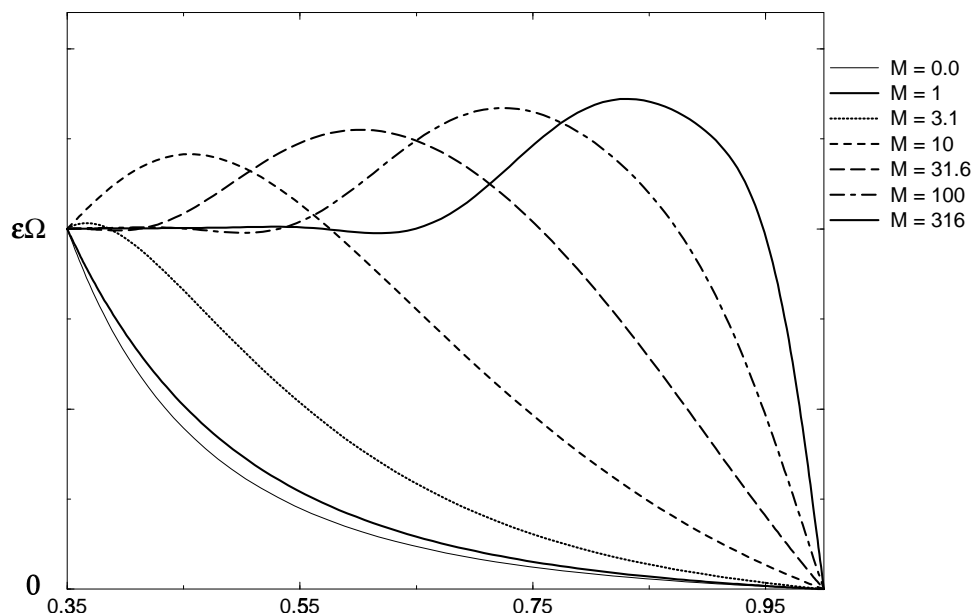


FIG. 3.22 – Section équatoriale de la vitesse angulaire en l'absence de forces de rotation.

sphère externe est au repos, et qu'il n'y a donc pas de terme de Coriolis). Les résultats obtenus sont présentés figures 3.20 à 3.22. Le système est dans ce cas caractérisé par le nombre de Hartmann M .

Les cisaillements visqueux (essentiellement dans la couche de Hartmann à la frontière externe du domaine) génèrent des courants électriques. Pour les latitudes élevées (θ petit), ces courants s'alignent avec les lignes de force du champ principal imposé. Près du plan équatorial, en revanche, les lignes de forces du champ imposé sont parallèles à la frontière externe, alors que les courants lui sont normaux. Il est utile de noter que les champs magnétiques et électriques ne partagent pas la même symétrie par rapport à l'équateur. En conséquence, près du plan équatorial, les courants doivent quitter les lignes de force du champ imposé. Les forces magnétiques ne sont alors plus nulles et elles écartent l'écoulement principal de son état de rotation en bloc.

La figure 3.22 montre le profil de vitesse angulaire dans le plan équatorial pour des nombres de Hartmann croissants. La vitesse angulaire atteint son maximum à l'intérieur du domaine. La région de l'écoulement ainsi accéléré est définie par des lignes de force du champ imposé, tout d'abord près de la sphère interne (où le champ imposé est le plus intense), puis à travers la région équatoriale, quand, le nombre de Hartmann croissant, l'écoulement se synchronise avec la graine.

Cette super-rotation du fluide par rapport aux conteneurs est donc un effet magnéto-visqueux. Seules les forces visqueuses s'opposent à l'accélération zonale

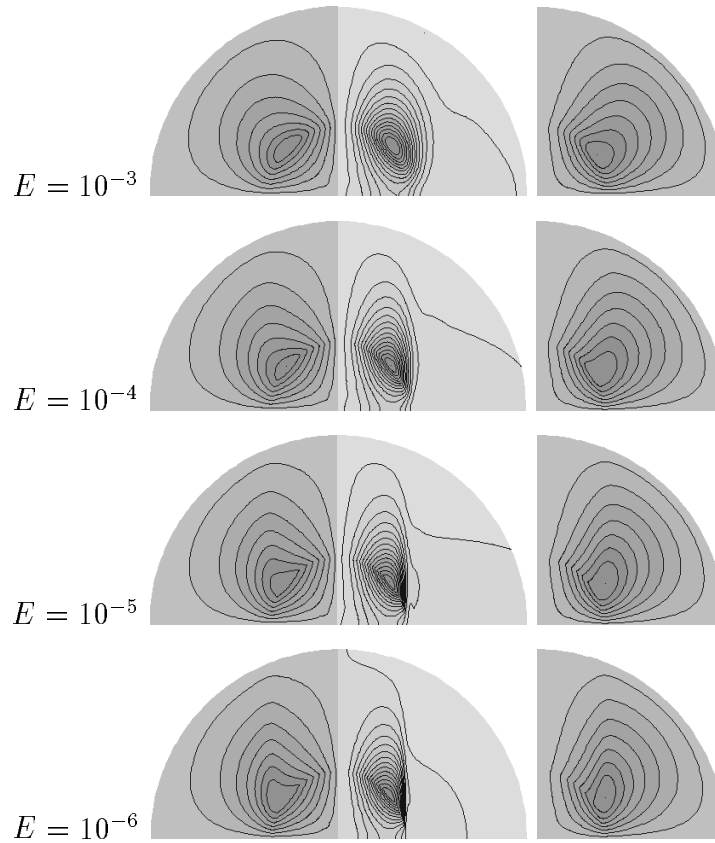


FIG. 3.23 – Section méridienne de b_ϕ , b_{pol} et j_{pol} pour des nombres d'Ekman de 10^{-3} à 10^{-6} pour $\Lambda = 0.0$.

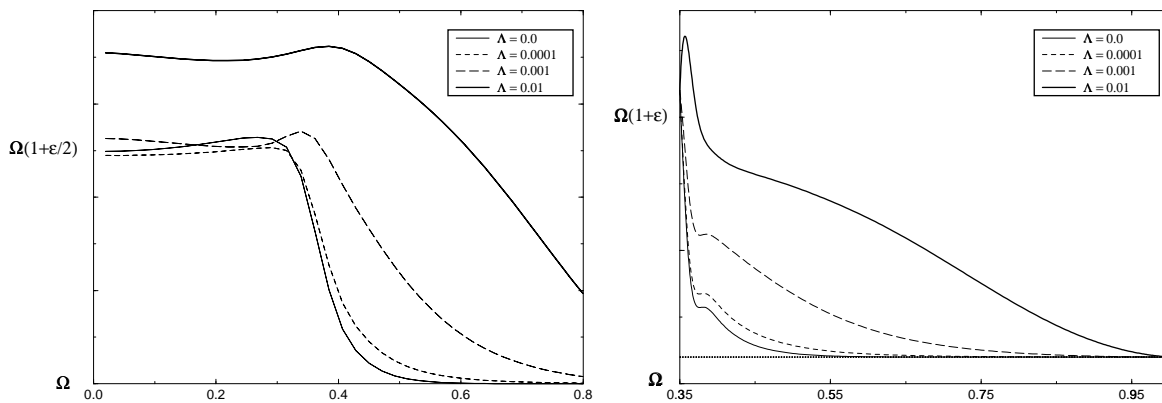


FIG. 3.24 – Représentation de la vitesse angulaire par rapport à la distance à l'axe s dans le cas d'une graine conductrice. A gauche au $3/4$ de la coquille fluide, à droite dans une coupe équatoriale. Le nombre d'Ekman est de 10^{-5} .

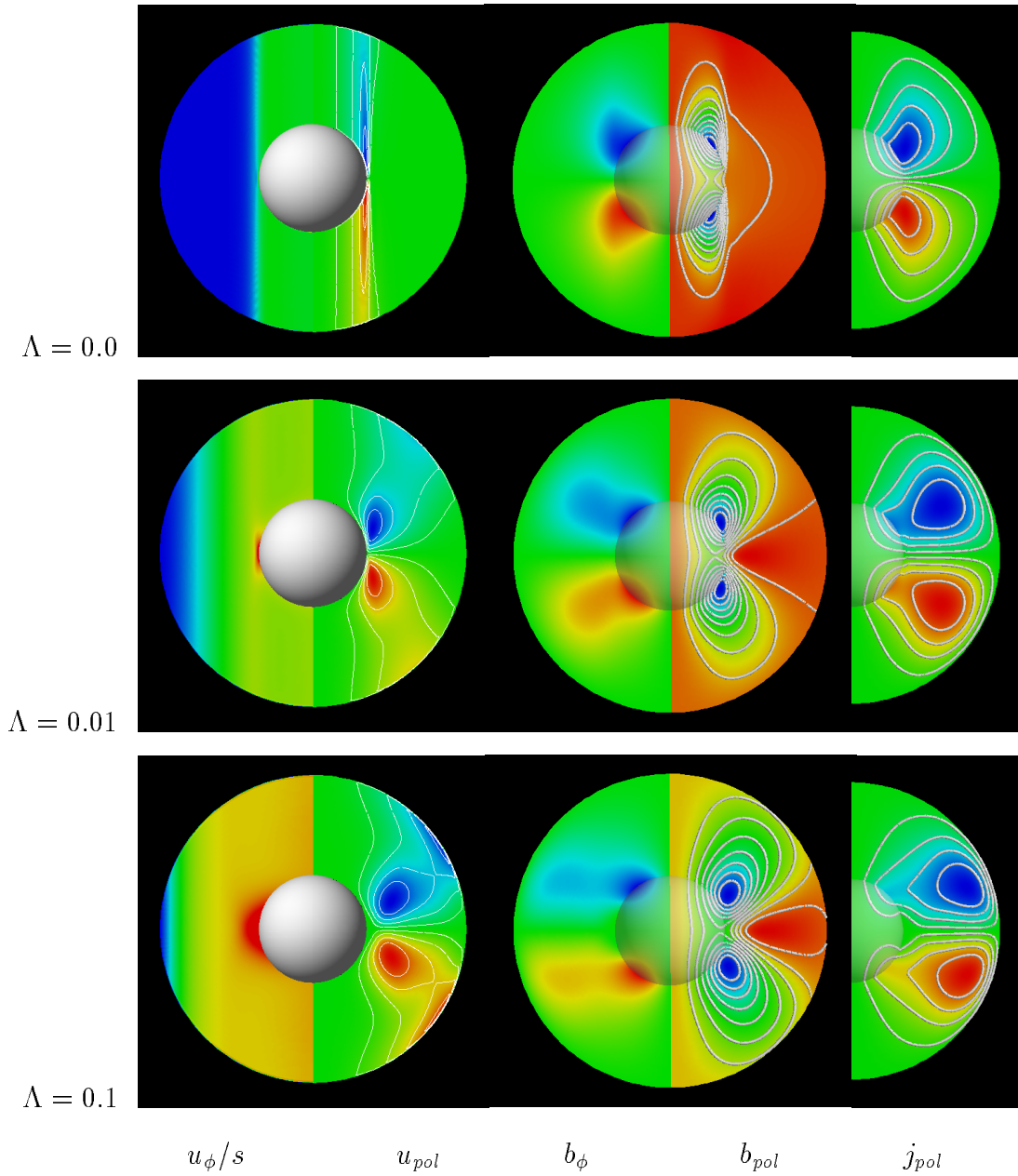


FIG. 3.25 – Représentations dans un plan méridien de u_ϕ/s , u_{pol} , b_ϕ , b_{pol} et j_{pol} pour $E = 10^{-5}$ et des valeurs croissantes du nombre d'Elsasser (de 0.0 à 0.1).

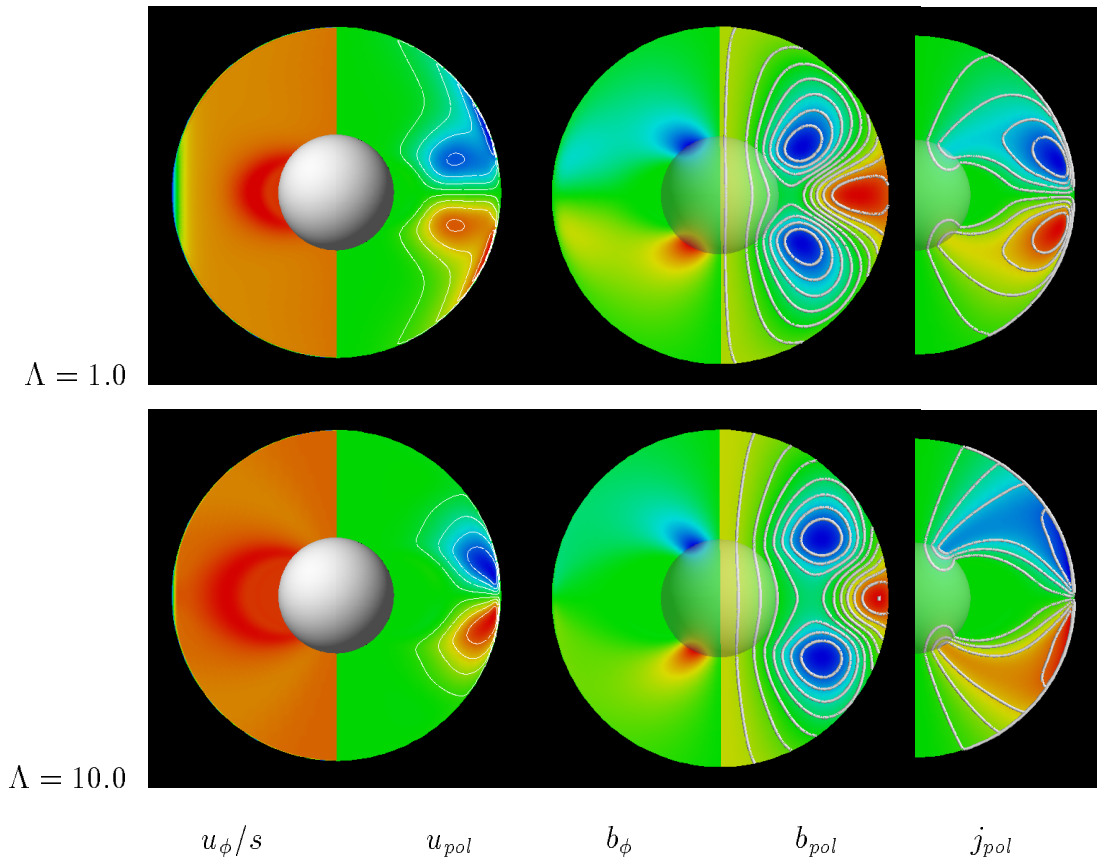


FIG. 3.26 – Représentations dans un plan méridien de u_ϕ/s , u_{pol} , b_ϕ , b_{pol} et j_{pol} pour $E = 10^{-5}$ et des nombres d'Elsasser de 1.0 et 10.0 .

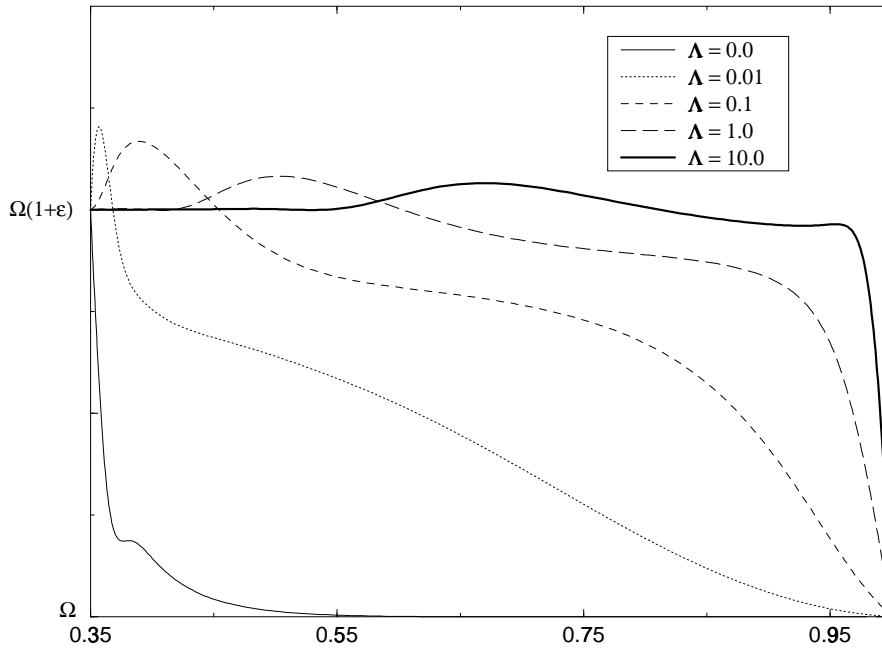


FIG. 3.27 – Coupe équatoriale de la vitesse angulaire pour $Ekman 10^{-5}$ et des nombres d'Elsasser de 0.0 à 10.0 . On voit clairement que l'écoulement se synchronise avec la sphère interne à mesure que l'on augmente le nombre d'Elsasser. Le maximum de vitesse angulaire se trouve à l'intérieur du domaine et dépasse celle de la sphère interne.

dans la région équatoriale due aux forces magnétiques. De plus, la super-rotation, si elle n'apparaît pas pour les tous petits nombres de Hartmann (il n'y a pas super-rotation pour $M = 1.0$), existe pour des valeurs modérées du nombre de Hartmann (voir $M = 3.1$). Il faudrait étudier de plus grands nombres de Hartmann pour décrire précisément la singularité équatoriale de la couche de Hartmann et la migration de la région accélérée vers la frontière externe. Pour $M = 316$ le cisaillement n'est pas encore confiné à une couche limite bien définie, nous avons vérifié que la largeur du cisaillement externe est proche de la loi en $M^{-2/3}$ prédite asymptotiquement (voir Roberts, 1967).

Notons que la rotation d'un conteneur cylindrique renfermant un métal liquide, en présence d'un champ transverse uniforme peut également mener à des super-rotations locales (*c.f.* Alemany et al. 1977 et Hall et al. 1993). Dans ce cas, c'est le champ magnétique qui joue le rôle de la graine, comme moteur de la rotation différentielle entre l'écoulement principal et la couche limite, mais le mécanisme physique général est comparable (dans la limite des grands nombres de Hartmann).

Nous nous intéressons à présent au cas en rotation (il faut alors introduire la force de Coriolis). Le champ induit créé par le cisaillement de l'écoulement pour différentes valeurs du nombre d'Ekman, avec $\Lambda = 0.0$ (pas d'effets en retour de ce champ sur l'écoulement) est présenté figure 3.23. Le champ imposé est cisailé au cylindre tangent. Dès que Λ est non nul, la force de Laplace agit sur l'écoulement pour réduire ce cisaillement. On observe figure 3.24 comment l'écoulement se synchronise avec la sphère interne à mesure que l'on augmente le nombre d'Elsasser. Dans le même temps, les courants électriques, originellement concentrés près du cylindre tangent s'écartent vers l'équateur de la sphère externe (voir figure 3.25 et 3.26). Pour les grandes valeurs du nombre d'Elsasser, la solution numérique caractérise le rôle de la singularité équatoriale.

La figure 3.27 montre le profil de vitesse angulaire dans le plan équatorial pour des nombres d'Elsasser croissants à $E = 10^{-5}$. Le cas $\Lambda = 10.0$ ($M = 10^3$) illustre l'écart à la rotation en bloc décrit dans le cas sans rotation. La comparaison des solutions avec et sans forces de rotation montre que ces forces inhibent très efficacement l'accélération équatoriale, qui viole la contrainte de Proudman-Taylor. L'écart à l'état de rotation en bloc est donc de moins en moins prononcé lorsque l'on décroît la viscosité (voir figure 3.28). Quand la viscosité diminue, le rôle des forces de rotation devient important, même pour de grands nombres d'Elsasser.

La conductivité de la graine est essentielle quant à la géométrie des courants électriques. Les courants peuvent parcourir la graine (car elle est conductrice) sans pour autant la cisailer (car elle est solide). Il est clair sur les figures 3.25 et 3.26 que les courants électriques essaient de suivre les lignes de forces du champ imposé à l'intérieur du fluide jusqu'à la graine, où ils peuvent boucler.

Notons que le choix d'un champ, axisymétrique, dipolaire à force nulle n'est

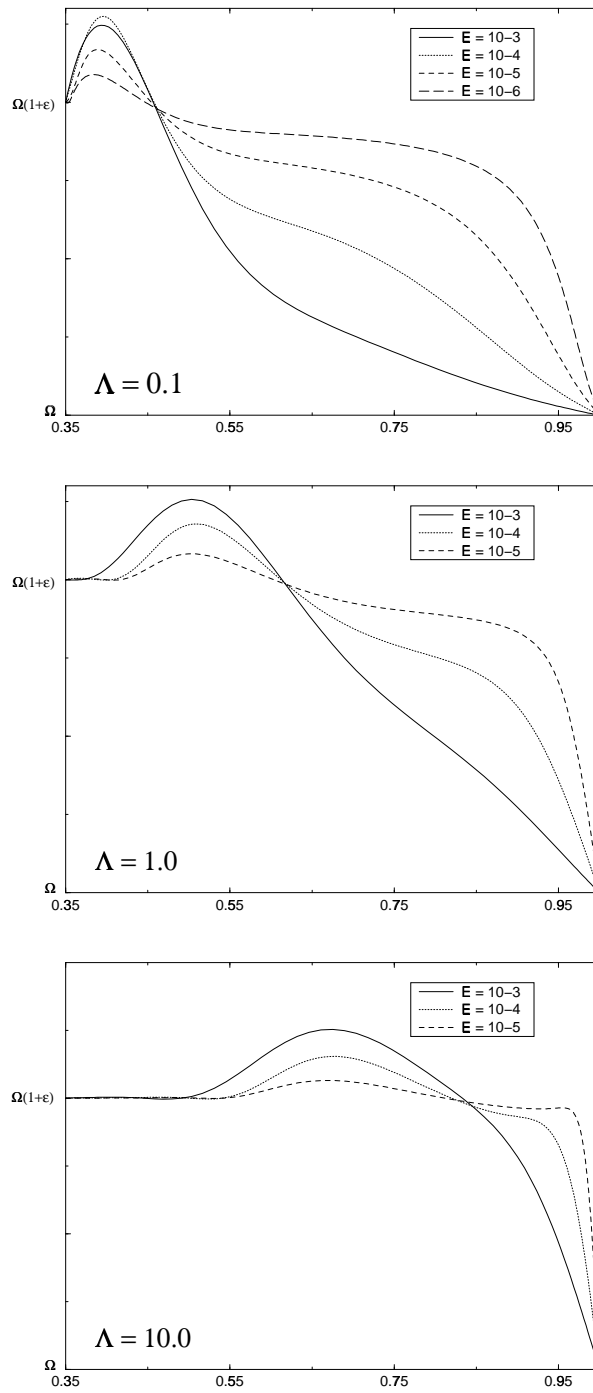


FIG. 3.28 – Coupe équatoriale de la vitesse angulaire pour des nombres d’Elsasser de 0.1 , 1.0 , 10.0, en faisant varier le nombre d’Ekman. On vérifie sur ces graphes que l’amplitude de la super-rotation est contrôlée par la viscosité.

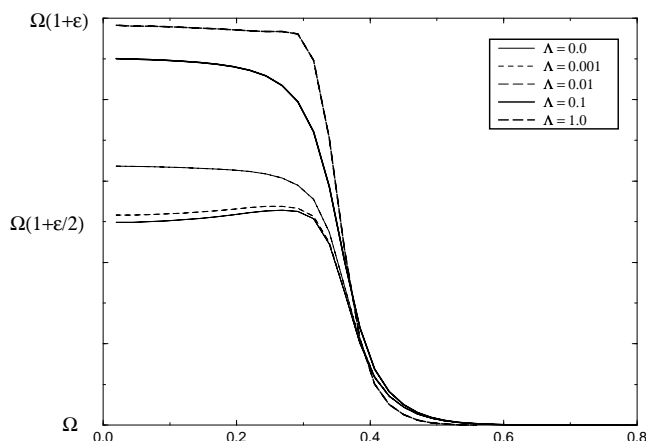


FIG. 3.29 – Représentation au $3/4$ de la coquille fluide de la vitesse angulaire par rapport à la distance à l'axe s dans le cas d'un champ dont les sources seraient à l'extérieur du domaine. La graine est conductrice, et l'ensemble du cylindre tangent se synchronise avec elle alors que le nombre d'Elsasser croît. Le nombre d'Ekman est de 10^{-5} .

pas unique. Pour des sources à l'extérieur du domaine, il s'écrit

$$(3.50) \quad B_r = \cos \theta, \quad B_\theta = -\sin \theta.$$

Cette géométrie est très particulière, car le champ est aligné partout avec l'axe de rotation. En conséquence, le cisaillement au cylindre tangent ne crée pas de courants dans cette géométrie. Nous avons vérifié que, dans ce cas, le cisaillement au cylindre tangent n'est pas réduit par les effets magnétiques, et est même renforcé pour les fortes valeurs du nombre d'Elsasser. La force de Laplace couple alors très efficacement le fluide à l'intérieur du cylindre tangent avec la sphère interne conductrice. La solution asymptotique des grands nombres d'Elsasser (Λ) consiste en une rotation en bloc de l'ensemble du volume fluide à l'intérieur du cylindre tangent à la vitesse angulaire de la sphère interne, alors que le fluide à l'extérieur tourne à la vitesse angulaire du manteau (voir figure 3.29).

Depuis ce travail, Hollerbach (1997) a publié une étude numérique de ce cas particulier dont les conclusions sont identiques aux nôtres.

Bibliographie

- D. Acheson et Raymond Hide, 1973
Hydromagnetics of rotating fluids,
 Reports on Progress in Physics, **36**, p.159–221.
- Antoine Alemany et René Moreau, 1977
*Écoulement d'un fluide conducteur de l'électricité
 en présence d'un champ magnétique tournant*,
 Journal de Mécanique, **16**, p.625–646.
- Thomas Cowling, 1934
The magnetic field of sunspots,
 Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, **94**, p.39–48.
- G. Dumas et A. Leonard, 1994
*A Divergence-Free Spectral Expansions Method for Three-Dimensional
 Flows in Spherical-Gap Geometries*,
 Journal of Computational Physics, **111**, p.205–219.
- Harvey Greenspan, 1969
The theory of rotating fluids,
 Cambridge University Press.
- M. Hall et J. Walker, 1993
*Heat and mass transfer through a liquid metal in an infinitely long
 rotating cylinder with a uniform, transverse magnetic field*,
 International journal of heat and mass transfer,
36, p.3509–3514.
- Rainer Hollerbach, 1994
*Magnetohydrodynamic Ekman and Stewartson layers
 in a rotating spherical shell*,
 Proceedings of the Royal Society of London A, **444**, p.333–346.
- Rainer Hollerbach, 1997
*The influence of an axial field on magnetohydrodynamic
 Ekman and Stewartson layers, in the presence of a
 finite conducting inner core*
 Acta Astron. et Geophys. Univ. Comenianae **19**, p. 263–275.
- K. Kleorin, I. Rogachevskii, A. Ruzmaikin,
 Andrew Soward, Serguei Starchenko, 1997
*Axisymmetric flow between differentially rotating spheres
 in a magnetic field with dipole symmetry*,

- Journal of Fluid Mechanics, **344**, p.213–244.
- John **J**ackson, 1962, 1975
Classical Electrodynamics
John Wiley & Sons, New-York.
- René **M**oreau, 1990
Magnetohydrodynamics
Kluwer Academic Publishers.
- Philip **M**orse et Herman Feshbach, 1953
Methods of theoretical physics,
McGraw-Hill Inc.
- Joseph **P**edlosky, 1979, 1982, 1987
Geophysical Fluid Dynamics,
Springer-Verlag.
- Ian **P**roudman, 1956
The almost-rigid rotation of viscous fluid between concentric spheres,
Journal of Fluid Mechanics, **1**, p.505–516.
- Luigi **Q**uartapelle et M. Verri, 1995
*On the spectral solution of the three-dimensional Navier-Stokes equations
in spherical and cylindrical regions*,
Comp. Phys. Comm., **90**, p.1–43.
- Paul **R**oberts, 1967
Singularities of Hartmann layers,
Proceedings of the Royal Society of London A, **300**, p.94–107.
- X. **S**ong et P.G. Richards, 1996
Seismological evidence for differential rotation of the Earth's inner core,
Nature, **382**, No 6588, p.221–224.
- Keith **S**tewartson, 1957
On almost rigid rotations,
Journal of Fluid Mechanics, **3**, p.299–303.
- W. **S**u, A. Dziewonski et R. Jeanloz, 1996
Planet within a planet : rotation of the inner core of the Earth,
Science, **274**, No 5294, p.1883–1887.
- Edward **T**aylor, 1972
Secondary flow,
dans *Illustrated Experiments in Fluid Mechanics*,
MIT Press.

D. Tritton, 1988

Physical Fluid Dynamics

Oxford Science Publications.

Johannes Wicht, 1995

Zur Zeitabhängigkeit von Konvektion und Selbstkonsistenten

Dynamos in Rotierenden Kugelschalen

Thèse, Université de Bayreuth.

Keke Zhang, David Fearn, 1995

Hydromagnetic waves in rapidly rotating spherical shells

generated by poloidal decays modes,

Geophysical and Astrophysical Fluid Dynamics, **81**, p.193–209.

Summary

We study the properties of convection in a rotating spherical shell. First part of this chapter concerns onset of convection. Using the knowledge developed in the previous chapter about numerical resolution of Ekman layers, we study mainly the no-slip boundary conditions (free slip is also described for comparisons). We consider three different heatings: uniform heat sources (widely used in previous studies, and in theoretical works), referred to as $\underline{\beta}$; imposed differential temperature gradient, referred to as $\underline{\Delta}$; and temperature imposed at the ICB with heat flux imposed at the CMB, referred to as $\underline{\Phi}$. The mode of heating has important effects on the onset of convection. It is found that the first two modes of heating have different asymptotic behaviour even for the linearized problem of onset of convection. On the other hand, the second and third mode of heating, though showing different behaviour at finite Taylor number, seem to converge to the same solution in the asymptotic limit of large Taylor numbers. The solution in the $\underline{\beta}$ case is found to have a higher critical Rayleigh number than expected from the asymptotic study (Roberts 1968, Busse 1970). Its radial structure at a given Taylor number is larger than that of the Bessel function used in the asymptotic study. The critical mode is found to be about half the expected one (in agreement with experiments). Finally, its location doesn't seem to converge in the limit of large Taylor numbers to the expected critical radius (figure 4.18). Our study of finite amplitude convection suggests that the bifurcation could be subcritical, in the limit of large Taylor numbers, as advocated by Soward (1977). We have not been able to increase the Taylor number large enough to demonstrate it. For a Taylor number of 10^{10} , the first non linear effects modify the solution so that its radius gets closer to the axis of rotation (and thus to the expected value).

Chapitre 4

Convection dans une coquille sphérique en rotation



Nous allons étudier dans ce chapitre des phénomènes convectifs, c'est-à-dire la réponse à une stratification instable, sous forme d'une instabilité, et d'une rupture de symétrie. Sans doute est-il utile avant de présenter l'instabilité convective dans une coquille sphérique en rotation, de rappeler rapidement le cas plus simple de l'instabilité de Rayleigh-Bénard entre deux plans. Lorsque l'on soumet un fluide pesant contenu entre deux plans parallèles horizontaux à un gradient de température, l'expérience montre que, sous certaines conditions il peut être le siège de mouvements convectifs. Si le gradient est normal, c'est-à-dire que la plaque supérieure est à une température supérieure à celle de la plaque inférieure, le fluide lourd est en dessous du fluide léger, et la stratification thermique est stable. Si le gradient est inversé, l'expérience montre qu'au delà d'une valeur critique de l'écart de température, la chaleur n'est plus seulement transportée par conduction, et une instabilité convective apparaît sous forme de rouleaux contrarotatifs d'axe horizontal. C'est l'instabilité de Rayleigh-Bénard¹. Le paramètre de contrôle pour ce problème, comme pour ceux que nous allons étudier dans ce chapitre, est le nombre de *Rayleigh*, il mesure l'énergie apportée au système par rapport aux forces qui s'opposent au mouvement. Pour une valeur suffisante de ce paramètre, la solution conductive devient instable, et une solution convective apparaît.

Nous étudierons dans ce chapitre une géométrie différente, celle d'une coquille sphérique en rotation rapide, et nous nous intéresserons aux instabilités

1. A ne pas confondre avec l'instabilité de Bénard-Marangoni, étudiée par Bénard au début du XX^e siècle, où le mécanisme d'instauration de l'instabilité tient à l'usage d'une configuration à surface libre, et à un effet de tension superficielle.

thermiques qui peuvent s'y développer. On verra que ce problème, qui a déjà été l'objet de nombreuses études antérieures, est riche d'une grande variété de caractéristiques inexistantes dans le cas plan sans rotation. Dans une première partie nous nous intéresserons aux instabilités du système linéarisé, et essaierons de confronter nos résultats aux études analytiques de ce problème. Dans une deuxième partie nous étudierons la convection d'amplitude finie, et essaierons de caractériser la bifurcation convective.

4.1 Etudes expérimentales

Il paraît sensé de commencer une étude d'un problème de convection par l'étude du seuil, c'est-à-dire l'apparition des premiers mouvements. Pour cela, il faut que l'on apporte juste assez d'énergie thermique au système pour que la solution conductive devienne instable pour une perturbation infinitésimale, cette valeur du paramètre de contrôle est appelée "nombre de Rayleigh critique".

Expérimentalement, la convection au seuil dans une coquille sphérique en rotation est très difficile à réaliser (voir Carrigan et Busse 1983, Chamberlain et Carrigan 1986, Cordero et Busse 1992). Tout d'abord, il faut contrôler avec une grande rigueur la vitesse de rotation de l'appareillage (en général de l'ordre du % pour des rotations allant jusqu'à 1000 t/min). Une autre difficulté consiste à reproduire expérimentalement l'effet d'une gravité centrale. Une approche possible consiste à se placer en microgravité et à utiliser un champ électrique important, la polarisation diélectrique produit alors une accélération radiale proportionnelle à la température. Une telle expérience a été réalisée sur la navette spatiale Challenger (Hart et al. 1986, avec un rapport d'aspect de $\eta = r_e/r_i = 0.73$, et des nombres d'Ekman supérieurs à 10^{-3}). Une alternative moins coûteuse consiste à reproduire l'effet de la gravité à l'aide de l'accélération centrifuge. Un gradient thermique inversé (plus chaud au centre) est alors stabilisateur, et c'est un gradient normal que l'on impose donc pour ce genre d'étude. Il reste toutefois une difficulté d'interprétation, liée à la symétrie axiale (et non centrale) de cette pseudo-gravité². Un fluide soumis à une pseudo-gravité à symétrie axiale n'est pas stable dynamiquement en présence d'un profil de température à symétrie sphérique. Dans une telle expérience, comme d'ailleurs dans un ellipsoïde, la gravité n'est pas partout parallèle au gradient de densité de l'état de base (profil diffusif). L'état de base correspond alors à un mouvement non nul, zonal ($m = 0$) appelé vent thermique (c'est une instabilité barocline qui repose sur un équilibre Archimède-Coriolis). Ce phénomène est compliqué par la conduction thermique le long d'un axe, généralement utilisé pour maintenir la sphère externe. Dans le cas idéal d'une sphère parfaite à gravité centrale (le cas que nous allons étudier), au contraire, ce vent est nul au seuil.

2. En fait, la pseudo-gravité n'est pas parfaitement axiale, car la gravité terrestre intervient (pour environ 10%). Elle entraîne un mouvement méridional supplémentaire).

Cordero et Busse ont réalisé en 1992 une étude expérimentale de convection dans un hémisphère en rotation, dont la rotation était déterminée de sorte que l'effet centrifuge combiné avec la gravité soit aussi proche que possible d'une force à symétrie centrale. Cette approche est toutefois limitée de manière évidente à l'étude de nombres d'Ekman relativement grands.

Chamberlain et Carrigan proposent en 1986 une expérience capable de modéliser l'effet d'un chauffage uniforme (problème généralement considéré pour les études analytiques). Ils utilisent une sphère pleine et font varier la température de la frontière de manière contrôlée, de sorte que l'état de base pour la perturbation corresponde au même profil thermique que dans le cas du chauffage uniforme.

Enfin, si l'on veut étudier le démarrage de la convection, il faut pouvoir contrôler très finement le nombre de Rayleigh, pour réduire l'amplitude des mouvements. Ceci est extrêmement difficile à réaliser en pratique. La difficulté tient au contrôle précis de très faibles différences de température (de l'ordre de $0,2^\circ C$). Pour une géométrie (rapport d'aspect) donnée, le choix de l'échelle de réalisation de l'expérience détermine alors la correspondance entre le nombre de Rayleigh et la différence de température. On a intérêt à construire une expérience de petite dimension, pour qu'au nombre de Rayleigh critique corresponde une différence de température aussi élevée que possible (que l'on contrôlera plus facilement expérimentalement). La contre partie est que plus l'échelle choisie est petite, plus la rotation à imposer au système est élevée pour atteindre un nombre d'Ekman donné. Un compromis est donc nécessaire, et la plupart des expériences sont conçues pour des sphères de 3,3 cm à 15,2 cm de diamètre. Pour ces échelles, l'écart de température au seuil correspondant au seuil de l'instabilité est encore trop faible pour être contrôlé précisément. Pour cette raison la géométrie du problème est généralement modifiée par l'usage d'un rapport d'aspect plus élevé. Nous verrons plus loin que le fait d'augmenter le rapport d'aspect, et de repousser la convection dans la région équatoriale repousse le seuil de l'instabilité convective.

Quand ce rapport d'aspect est assez proche de l'unité le problème s'approche du cas plan (écart petit entre deux grandes sphères) et il est alors légitime de construire le nombre de Rayleigh sur l'espace entre les sphères ($d = r_e - r_i$), ce qui renforce l'argument. Dans cette limite, c'est l'espace entre les sphères qui, comme dans le cas plan, détermine le mode convectif.

Lorsque l'on s'éloigne du seuil, la plupart des difficultés énoncées plus haut restent entières, mais le problème du contrôle précis de la température est moins essentiel. On peut étudier expérimentalement la convection développée dans une coquille sphérique ayant un rapport d'aspect comparable à celui du noyau terrestre (Cardin et al., 1992).

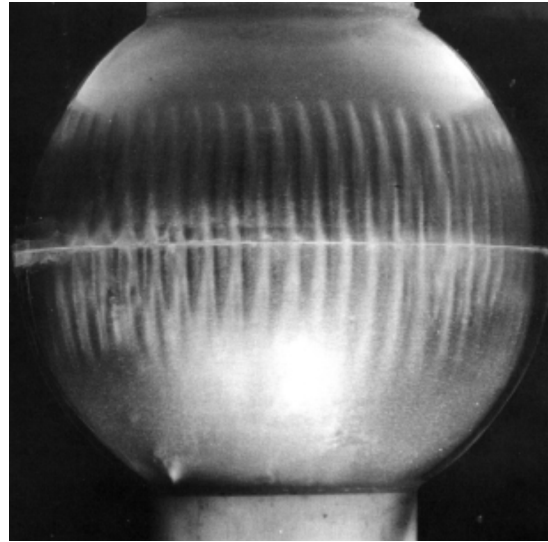
La convection se développe sous forme de rouleaux, alignés avec l'axe de rotation (voir figures 4.1 et 4.2). Si l'étude expérimentale doit constituer une référence pour les simulations numériques, les paramètres décrivant la solution auxquels on peut avoir accès sont en nombre plus réduit. La détermination du seuil est,

FIG. 4.1 – *Convection expérimentale près du seuil dans une coquille sphérique en rotation (le nombre d'Ekman va de $1.0 \cdot 10^{-2}$ à $1.0 \cdot 10^{-5}$).*

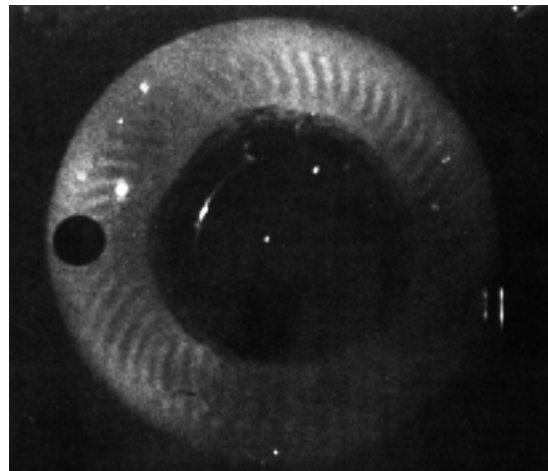
La première photographie (a) présente vue de côté des colonnes en chauffage différentiel pour un rapport d'aspect $\eta = 0,97$. La gravité est remplacée par l'accélération centrifuge (Carrigan et Busse, 1983).

Sur la seconde photographie (b) une vue du dessus pour une expérience sans graine, par refroidissement de la sphère externe au cours du temps, cette approche permet de reproduire l'effet d'un chauffage uniforme (Chamberlain et Carrigan, 1986).

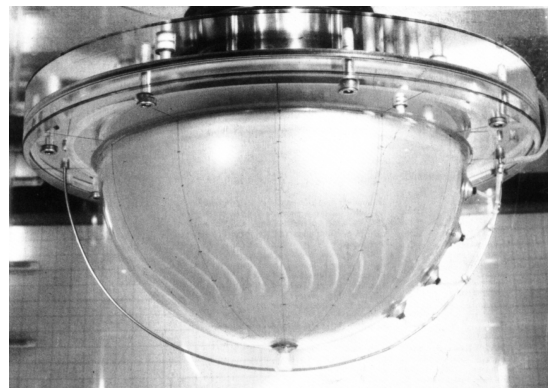
La troisième photographie (c) présente une étude dans un hémisphère, dont la vitesse de rotation est ajustée de sorte que la composition de l'accélération centrifuge avec la gravité vraie soit aussi proche que possible de la symétrie centrale. Le chauffage est différentiel et le rapport d'aspect $\eta = 0,79$, la sphère externe fait 6,35 cm de diamètre (Cordero et Busse, 1992).



a.



b.



c.

comme on l'a dit, difficile. Il est également difficile d'établir avec précision le mode critique (i.e. nombre de rouleaux). Pour des rapports d'aspects élevés, le mode est grand et varie rapidement lorsque l'on s'éloigne du seuil. On visualise généralement l'écoulement à l'aide de paillettes ou de fluorescéine. L'évolution de la température est accessible par des mesures de flux de chaleur, ou par des sondes (généralement placées aux bords pour ne pas perturber l'écoulement), ou par analogie avec un scalaire passif.

4.2 Système et forme adimensionnalisée

On peut simplifier le système (1.71) pour cette étude, en supprimant tous les termes liés à l'induction magnétique,

$$(4.1) \quad \begin{cases} \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = -\vec{u} \cdot \nabla \vec{u} - \frac{1}{\rho_0} \nabla \pi + \nu \Delta \vec{u} - 2\Omega (\vec{e}_z \wedge \vec{u}) + \alpha \Theta g \vec{r}, \\ \nabla \cdot \vec{u} = 0, \\ \frac{\partial \Theta}{\partial t} = -\vec{u} \cdot \nabla T_s + \kappa \Delta T_s - \vec{u} \cdot \nabla \Theta + \kappa \Delta \Theta. \end{cases}$$

Il est à présent nécessaire de définir le profil conductif de température. Celui-ci dépend du type de chauffage. Nous en considérerons trois.

A. Chauffage uniforme $\underline{\beta}$

Ce mode de chauffage est le plus classique dans les études théoriques et numériques. Il correspondrait à un chauffage par désintégration d'éléments radio-actifs. Dans l'état de nos connaissances, il n'est pas significatif pour le noyau de la terre, mais il est intéressant à titre de comparaison avec les études existantes. On notera ce chauffage $\underline{\beta}$.³

Aux frontières interne et externe du noyau liquide, la température est imposée

$$(4.2) \quad T_i = \text{cst},$$

et

$$(4.3) \quad T_e = \text{cst}.$$

Et des sources de chaleurs sont supposées uniformément réparties dans le noyau. Le champ de température statique T_s est à symétrie radiale, et vérifie

$$(4.4) \quad \Delta T_s = \text{cste},$$

que nous écrirons, pour simplifier plus loin l'écriture du nombre de Rayleigh, sous la forme

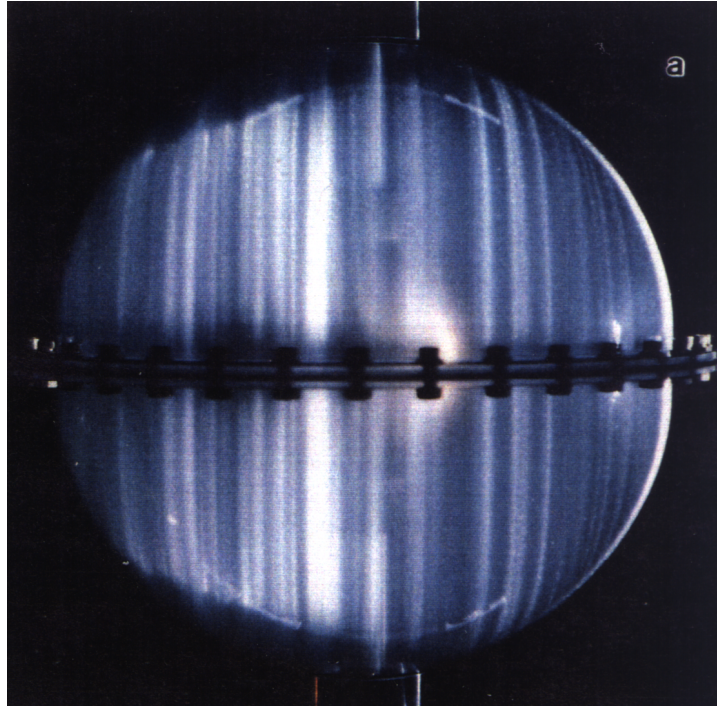
$$(4.5) \quad \Delta T_s = -3\beta,$$

équation dont la solution est

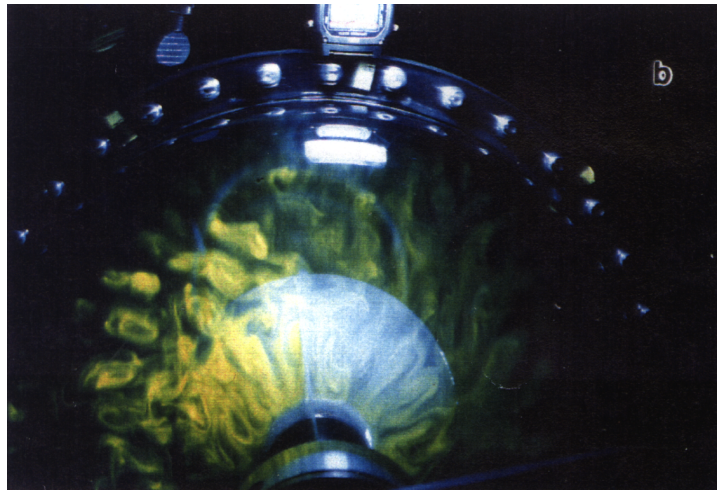
$$(4.6) \quad T_s = -\frac{\beta}{2} r^2 + T_0,$$

3. On note, toutefois, que le gradient adiabatique n'étant pas diffusif (i.e. son laplacien est non nul) il pourrait intervenir comme un terme interne (mais non uniforme) dans notre formulation.

FIG. 4.2 - *Convection thermique développée expérimentale dans une coquille sphérique en rotation rapide. Une coquille sphérique (de rapport d'aspect $\eta = 1/3$) est placée en rotation rapide ($E = 3 \cdot 10^{-6}$), l' "accélération" centrifuge remplace ici la gravité pour la force d'Archimède (la vraie gravité étant négligeable), on impose donc un gradient de température inversé (plus froid au centre). Le nombre de Rayleigh ainsi imposé est de l'ordre de 50 fois critique.*



a) *Cette photographie met en évidence la structure géostrophique de l'écoulement. Les colonnes occupent l'ensemble de la sphère. La visualisation est effectuée à l'aide de paillettes (qui s'alignent le long de l'écoulement), et d'un faisceau lumineux placé dans un plan vertical en avant de la graine ($s = 0.4$).*



b) *Vue du dessus de la trace des vortex révélée par un colorant fluorescent de même densité que l'eau introduit près de l'axe. La convection est de nature chaotique. (Philippe Cardin 1992).*

B. Chauffage différentiel $\underline{\Delta}$

On peut étudier l'effet d'un gradient de température entre les limites. On notera ce chauffage $\underline{\Delta}$. Il n'y a pas de source de chaleur dans le fluide dans ce cas.

Aux frontières interne et externe du noyau liquide, la température est imposée

$$(4.7) \quad T_i = \text{cst} ,$$

et

$$(4.8) \quad T_e = \text{cst} .$$

Le champ de température statique T_s est à symétrie radiale, et vérifie

$$(4.9) \quad \Delta T_s = 0 .$$

équation dont la solution est de la forme

$$(4.10) \quad T_s = \frac{T_a}{r} + T_b ,$$

avec

$$(4.11) \quad T_a = (T_i - T_e) \frac{r_i r_e}{r_e - r_i} , \quad \text{et} \quad T_b = T_i - (T_i - T_e) \frac{r_e}{r_e - r_i} .$$

C. Température imposée à la graine, flux de chaleur au manteau $\underline{\Phi}$

On peut aussi imposer une température à la sphère interne et un flux de chaleur à la sphère externe. On notera ce chauffage $\underline{\Phi}$. C'est sans doute le mode de chauffage le plus réaliste pour approcher la convection dans le noyau.

A la frontière interne (graine-noyau ou I.C.B.), la température est imposée

$$(4.12) \quad T_i = \text{cst} ,$$

correspondant à la température de solidification du fer à cette pression.

A la frontière externe (noyau-manteau ou C.M.B.), c'est le flux de chaleur qui est imposé⁴

$$(4.13) \quad \Phi_e = -k \left(\frac{\partial T}{\partial r} \right)_e = \text{cst} .$$

Le champ de température statique T_s est à symétrie radiale, et vérifie

$$(4.14) \quad \Delta T_s = 0 .$$

4. Le manteau diffuse et advecte la température beaucoup plus lentement que le noyau (le rapport des diffusivités thermiques généralement admis est de l'ordre de 60). Le manteau peut donc être considéré comme un isolant thermique pour le noyau, c'est pourquoi le flux de chaleur est imposé, et non la température (Réciproquement, pour une modélisation du manteau, ce serait la température qui serait fixée à la C.M.B.).

équation dont la solution est de la forme

$$(4.15) \quad T_s = \frac{T_a}{r} + T_b,$$

avec

$$(4.16) \quad T_a = \frac{\Phi_\epsilon r_\epsilon^2}{k}, \quad \text{et} \quad T_b = T_i - \frac{\Phi_\epsilon r_\epsilon^2}{r_i k}.$$

Après mise à l'échelle des variables par⁵

$$(4.17) \quad \mathcal{L} = r_\epsilon, \quad t = \frac{r_\epsilon^2}{\nu},$$

$$(4.18) \quad \mathcal{T}_\beta = \frac{\beta r_\epsilon^2 \nu}{\kappa}, \quad \mathcal{T}_\Delta = \mathcal{T}_\Phi = \frac{T_a \nu}{r_\epsilon \kappa}.$$

Le système d'équations (4.1) peut être écrit sous la forme

$$(4.19) \quad \begin{cases} \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = -\vec{u} \cdot \underline{\nabla} \vec{u} - \vec{\nabla} \pi + \Delta \vec{u} - E^{-1} \vec{e}_z \wedge \vec{u} + R\Theta \vec{r}, \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0, \\ \frac{\partial \Theta}{\partial t} = Pr^{-1} (\mathcal{Q} \vec{u} \cdot \vec{r} + \Delta \Theta + \Delta T_s) - \vec{u} \cdot \vec{\nabla} \Theta, \end{cases}$$

où \mathcal{Q} est une fonction purement radiale, dépendant du type de chauffage

$$(4.20) \quad \mathcal{Q}_\beta = 1, \quad \mathcal{Q}_\Delta = \mathcal{Q}_\Phi = \frac{1}{r^3},$$

et où les nombres sans dimension sont définis comme

$$(4.21) \quad E = \frac{\nu}{2\Omega r_\epsilon^2}, \quad Pr = \frac{\nu}{\kappa},$$

suitant le type de chauffage, R se construit comme

$$(4.22) \quad R_\beta = \frac{\alpha g \beta r_\epsilon^6}{\nu \kappa}, \quad R_\Delta = R_\Phi = \frac{\alpha g T_a r_\epsilon^3}{\nu \kappa}.$$

Le nombre de *Rayleigh* en chauffage uniforme semble varier comme r_ϵ^6 ce qui peut surprendre, cette dépendance inclut la variation en βr^2 du profil de température statique et en gr de la gravité.

Il faut prêter attention à la définition du nombre d'Ekman introduite ici. Ce nombre est construit sur 2Ω et non sur Ω comme cela était le cas au chapitre

5. Nous introduisons r_ϵ comme unité de longueur, certains auteurs utilisent $d = r_\epsilon - r_i$. Nous définissons l'unité de température en utilisant le nombre de Prandtl pour permettre une comparaison plus aisée avec les études antérieures (e.g. Cuong et Busse, 1981).

précédent. Nous avons adopté cette convention, pour permettre des comparaisons plus aisées avec les études antérieures tant théoriques (Chandrasekhar 1961, Roberts 1968, Soward 1977) que numériques (Zhang 1992).

On utilisera également beaucoup dans ce chapitre le nombre de Taylor⁶ défini comme

$$(4.23) \quad Ta = E^{-2} = \left(\frac{2\Omega r_e^2}{\nu} \right)^2,$$

ce paramètre est donc très grand pour la terre (de l'ordre de 10^{30}). Les équations scalaires associées à ce système dérivent alors simplement de (2.50) puis (2.102).

On s'intéresse dans un premier temps à l'analyse de stabilité linéaire. Il s'agit d'un problème aux valeurs initiales pour des perturbations infinitésimales, qui peut s'exprimer analytiquement comme un problème aux valeurs propres. Ce problème étant linéaire, les solutions s'obtiennent en appliquant le principe de superposition. Les perturbations sont développées sur une base d'harmoniques adaptée à la géométrie sphérique (comme nous l'avons introduit au chapitre 2). Le terme de Coriolis couple alors (via l'opérateur Q_3) les degrés ℓ des coefficients de cette décomposition, mais ne couple pas les modes m . Chaque mode m évolue donc en temps de façon indépendante. Pour une valeur suffisamment élevée du paramètre de contrôle, le nombre de Rayleigh (appelée valeur de "Rayleigh critique"), une instabilité peut se développer. L'étude revient alors déterminer le premier mode m à devenir instable, la valeur du nombre de Rayleigh critique, et la géométrie de la solution convective.

Ce problème linéarisé revenant à un problème aux valeurs propres, une approche classique (e.g. Zhang 1992) consiste à chercher les vecteurs propres et les valeurs propres de l'opérateur linéarisé. Cette approche, très précise au seuil, a l'inconvénient de ne pouvoir s'étendre au régime non-linéaire. Nous avons adopté une autre approche, consistant à intégrer le système en temps à partir d'une perturbation, et à étudier les valeurs propres de la solution obtenue après une intégration suffisamment longue (après le régime transitoire, quand l'énergie de chaque mode varie exponentiellement).

6. L'usage du nombre de Taylor à la place du nombre d'Ekman peut surprendre, car il n'apporte pas plus d'information, et lui est directement relié. Elle est justifié par deux raisons. La plupart des études analytiques utilisent ce paramètre plutôt que le nombre d'Ekman, il est donc plus aisé de faire le même choix pour les comparaisons. Ce problème étant plus difficile que le précédent, nous progresserons plus lentement vers le régime qui nous intéresse, il est alors plus élégant de faire croître le nombre de Taylor d'un facteur 10 que de faire décroître le nombre d'Ekman d'un facteur $\sqrt{10}$...

4.3 Descriptions analytiques de la convection au seuil

Considérons pour chaque mode m , la valeur propre associée σ_m . La partie réelle de σ_m correspond au taux de croissance du mode m . Quand $Re(\sigma_m)$ est négatif $\forall m$ l'équilibre hydrostatique est stable. Une instabilité linéaire se développe dès qu'au moins un mode est instable. Si $\exists m_c \in \mathbb{N} \cap [0, \infty[$, tel que $Re(\sigma_{m_c}) > 0$ le mode m_c est instable, et croît exponentiellement. L'énergie potentielle d'origine gravitationnelle libérée par le travail de la poussée d'Archimède dépasse les pertes dues à la dissipation. C'est l'instabilité convective. La stabilité marginale correspond à un taux de croissance nul :

- $Re(\sigma_{m_c}) < 0$: la perturbation du mode m_c décroît. Le mode m_c est stable.
- $Re(\sigma_{m_c}) = 0$: la perturbation du mode m_c ne croît pas, ni ne décroît. C'est la stabilité marginale. Dans le même temps, on a $Re(\sigma_m) < 0 \quad \forall m \neq m_c$
- $Re(\sigma_{m_c}) > 0$: la perturbation croît. Le mode m_c est instable.

La partie imaginaire de σ_m est appelée pulsation, ou vitesse de phase⁷, elle contrôle la dépendance temporelle :

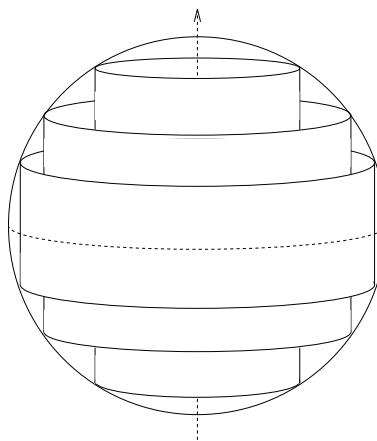
- $Im(\sigma_{m_c}) = \omega_{m_c} = 0$: le mode m_c est stationnaire.
- $Im(\sigma_{m_c}) = \omega_{m_c} \neq 0$: le mode m_c est oscillant (il se propage à la manière d'une onde).

Quand le fluide est en rotation rapide, le terme de Coriolis joue un rôle important dès le seuil, et modifie fortement la solution. Contrairement à la gravité, l'accélération de Coriolis ne travaille pas (elle est orthogonale à la vitesse). En revanche, elle influence fortement l'écoulement, comme le montre la contrainte de Proudman-Taylor (voir chapitre précédent). Pour satisfaire les conditions aux limites, l'écoulement doit alors s'organiser en contours géostrophiques. Si la profondeur du conteneur dans la direction de $\vec{\Omega}$ n'est pas constante, ces contours sont définis comme les contours de hauteur constante comptée le long de l'axe de rotation (dans une sphère, ce sont des cylindres co-axiaux, voir figure 4.3).

Un mouvement purement géostrophique est donc axisymétrique dans notre géométrie. Quand le forçage thermique est suffisant (dans un sens que nous préciserons par la suite), la convection se développe, comme une instabilité de l'état axisymétrique. Il s'agit d'une bifurcation, associée à une rupture de symétrie. Un mouvement convectif dans une coquille sphérique viole donc la contrainte de Proudman-Taylor, pour permettre le transport de particules fluides dans la direction du rayon cylindrique. Une solution convective s'appuie donc sur un équilibre dans lequel la viscosité et/ou le terme $\frac{\partial u}{\partial t}$ ne peuvent pas être négligés. La rotation joue alors un rôle stabilisateur important, et l'on s'attend à ce que l'apport

7. elle est aussi notée ω_m .

FIG. 4.3 – Les contours géostrophiques sont définis par la contrainte de Proudman-Taylor. Dans une sphère ce sont des cylindres concentriques, co-axiaux avec l'axe de rotation.



énergétique nécessaire au démarrage de la convection (caractérisé par le nombre de Rayleigh) croisse lorsque l'on fait tendre le nombre d'Ekman vers zéro⁸.

4.3.1 Etude asymptotique

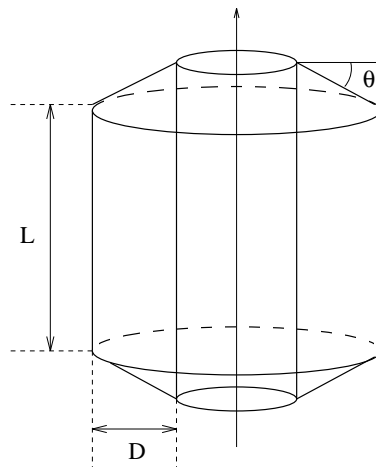
Roberts puis Busse ont recherché la solution au seuil dans la limite $E \ll 1$. Pour un nombre d'Ekman donné, lorsque le nombre de Rayleigh est suffisamment élevé, une instabilité se développe, qui viole l'équilibre de Proudman-Taylor, par une structure d'ordre $E^{1/3}$, reposant sur la viscosité⁹. Cette instabilité est dérivée dans le cas plan (en rotation) dans Chandrasekhar (1961, Chapitre III). La première étude du cas sphérique en rotation rapide est due à Roberts (1965, 1968) pour la solution anti-symétrique par rapport à l'équateur. Roberts mène une étude asymptotique dans la sphère, il obtient une structure azimuthale pour la solution en $\mathcal{O}(Ta^{-1/6})$. Pour la structure radiale, il fait l'hypothèse que la solution peut s'écrire sur une fonction de Bessel cylindrique J_m (fonctions propres du Laplacien en s). Comme la largeur d'une telle fonction de Bessel varie comme $m^{-2/3}$, la structure radiale de sa solution varie comme $\mathcal{O}(Ta^{-1/9})$.

Dans son article de 1970 (B-70), Busse reprend l'étude asymptotique de Roberts, en introduisant une solution symétrique, plus instable que celle de Roberts (pour un nombre de Rayleigh plus petit, d'un facteur proche de quatre).

8. Il est important de noter la différence avec le problème de chapitre précédent pour lequel il existait une limite asymptotique indépendante de E . La viscosité est ici une composante essentielle de l'équilibre étudié, et seul un comportement asymptotique (variation des caractéristiques de la solution en fonction du nombre d'Ekman) pourra donc être étudié.

9. Notons que cette échelle en $E^{1/3}$ pour un cisaillement visqueux vertical est aussi celle de la couche de Stewartson (voir Chapitre 3)

FIG. 4.4 – *Modèle cylindrique utilisé par Busse (1970) pour une description approchée de l’instabilité convective dans une sphère en rotation rapide.*



4.3.2 Etude en perturbation

Busse, guidé par l’étude asymptotique, effectue dans un premier temps une approche par perturbation, plus illustrative du démarrage de la convection. Il étudie d’abord le démarrage de la convection dans l’espace entre deux cylindres finis de même profondeur. Un gradient de température déstabilisateur est imposé entre les deux cylindres. Il ressort clairement de ce qui précède que l’inclinaison des bords du domaine constitue une caractéristique essentielle pour décrire la convection dans une sphère (ou dans une coquille sphérique), puisqu’elle interdit une convection purement géostrophique. Si l’on ne retenait pas cette caractéristique, la convection n’apparaîtrait pas sous la forme d’une onde. Après l’étude du cas cylindrique simple, Busse propose donc l’étude d’un “cylindre conique” (voir figure 4.4). La pente θ des limites inférieures et supérieures est introduite pour permettre de modéliser l’effet stabilisateur lié à la rotation, c’est un paramètre essentiel de ce modèle (dit “annulus model”).

Busse introduit une mesure de la pente des bords du cylindre (équation B-70.3.2)

$$(4.24) \quad \check{\eta} = \sin \theta ,$$

et effectue une étude en perturbation en $\check{\eta}$.

Pour pouvoir utiliser une approximation cartésienne locale, Busse traite le cas des grands rapports d’aspect $D \ll L$ (“small gap”). Après intégration selon z , et en faisant, comme Roberts, l’hypothèse que la structure radiale est de grande échelle (ce qui permet de négliger les variations radiales), il obtient (B-70.3.1) une équation d’ordre deux pour la perturbation de pression. Le minimum de R dans cette équation est la valeur critique R_c .

Enfin, il interprète ces résultats dans le cas sphérique (sphère pleine), en chauffage uniforme.

Il obtient le mode de convection au seuil en rouleaux co-axiaux avec l’axe de

rotation, organisés en guirlande : les “colonnes de Busse”. Il détermine l’emplacement de cette guirlande par minimisation de R_c par rapport à $\tilde{\eta}$ (la géométrie sphérique définit le profil de $\tilde{\eta}$ en fonction de la distance à l’axe). Notons que dans l’étude du cas cylindrique, R varie comme $\tilde{\eta}^{4/3}$ (plus la pente est élevée aux bords du domaine, plus la convection est difficile à réaliser), comme les forces d’Archimède, sont moins efficaces près de l’axe de rotation (à cause du profil thermique conductif en r^2 , et du fait que seule la composante de la gravité perpendiculaire à l’axe de rotation est importante pour la force d’Archimède), on s’attend à ce que la convection démarre à une distance finie de l’axe de rotation.

Pour cette valeur de θ , il obtient alors des lois d’évolution en fonction du nombre de Prandtl et du nombre d’Ekman, pour le mode critique (équation B-70.4.11)¹⁰

$$(4.25) \quad m_c = \left(\frac{P \sqrt{5/2}}{4 E (1 + P)} \right)^{1/3},$$

le nombre de Rayleigh critique (équation B-70.4.12, avec B-70.4.4)

$$(4.26) \quad R_c = \left(\frac{P}{E (1 + P)} \right)^{4/3} 3 \left(\frac{5}{4} \right)^{5/3},$$

et de la pulsation (ou vitesse de phase) (équation B-70.4.13, ramenée au temps construit sur la viscosité)

$$(4.27) \quad \omega_c = -(2 E)^{-1} \left(\frac{10 E}{\sqrt{8} P (1 + P)^2} \right)^{1/3}.$$

La solution obtenue est une onde ($\omega = \text{Im}(\sigma) \neq 0$). C’est l’équilibre entre les effets d’un gradient déstabilisateur et l’effet stabilisateur de la rotation rapide qui est responsable de ce phénomène ondulatoire. On décrit souvent cette solution sous le terme d’“ondes de Rossby thermiques” (e.g. Busse, 1982, 1994)¹¹. Signalons que cette étude dans un cylindre a servi de base à un modèle de dynamo (Busse, 1975).

Cette approche en perturbation est moins précise que l’approche asymptotique, mais elle lui donne un sens physique. Elle permet de décrire les variations de la solution en fonction du nombre de Prandtl. Une comparaison quantitative avec l’étude asymptotique menée par Busse montre qu’il existe presque un facteur deux entre les deux études. Il s’explique vraisemblablement par le fait que

10. Reprise dans Chamberlain et Carrigan (1986), une erreur de typographie est introduite (leur équation 8), il faut lire $\frac{\sqrt{5/2}}{2}$ et non $\frac{\sqrt{5}}{4}$.

11. *Stricto sensu* (Greenspan, 1968) les ondes de Rossby correspondent aux oscillations des colonnes fluides dans le cas où il n’existe pas de contour géostrophique (par exemple si les bords contiennent des points anguleux). C’est donc par analogie que l’on parle d’ondes de Rossby thermiques pour la convection dans une sphère (bien que les contours géostrophiques y existent.)

la pente ne peut pas être traitée comme une perturbation à la distance à l'axe où apparaît la convection. Busse propose également de l'expliquer par le fait que près de l'axe la gravité soit essentiellement axiale, or l'approche par perturbation n'en conserve que la composante selon le rayon cylindrique.

Nous allons également étudier l'influence du mode de chauffage sur le démarrage de la convection. Pour cela, il est important d'avoir à l'esprit une adaptation de l'étude précédente au cas du chauffage différentiel $\underline{\Delta}$ (Carrigan et Busse 1983). Cette adaptation est réalisée pour une étude expérimentale de convection, elle prend donc en compte la présence d'un vent thermique dès le seuil, mais les résultats peuvent être étendus au cas d'une gravité centrale. L'instabilité convective se développe alors près de la frontière interne du domaine (le profil conductif est à présent en $1/r$), et le nombre de Rayleigh critique, comme le mode critique dépendent du rapport d'aspect de la coquille sphérique.

On a ¹²

$$(4.28) \quad R_c = 3 \frac{P}{E^2} (\eta P)^{-1} \left(\frac{1}{2} E \left[\frac{2 P \eta}{(1 + P) r_e (1 - \eta^2)} \right]^2 \right)^{2/3},$$

$$(4.29) \quad m_c = \left(\frac{\sqrt{2} \eta P}{(1 + P) r_e (1 - \eta^2) E} \right)^{1/3}.$$

Le problème de la convection thermique dans une sphère en rotation rapide aurait donc une solution satisfaisante. Une étude asymptotique numérique donnerait les caractéristiques de la solution dans la limite des grands Ta , tandis qu'un modèle physique simplifié éclairerait la dépendance en fonction du nombre de Prandtl. Un nuage obscurcit ce tableau...

4.3.3 Limites de la méthode asymptotique

Soward (1977) étudie pour le chauffage uniforme la structure radiale de la solution asymptotique au seuil (voir sa section 5) et obtient que pour $Re(\sigma_m) = 0$ la longueur d'onde radiale de la solution est instable (elle décroît indéfiniment). Une solution linéaire localisée (en rayon) au seuil n'est pas réalisable. Il montre qu'une perturbation d'échelle ℓ évolue en temps comme $\ell - \frac{\partial \omega}{\partial s} t$. La diminution de l'échelle spatiale d'une perturbation avec le temps entraîne que toute perturbation linéaire près du seuil tend vers zéro quand $t \rightarrow \infty$. La conséquence physique est étonnante: la convection marginale ne se produit pas pour $R = R_c$, mais pour $R_2 > R_c$. Il insiste toutefois sur le fait que l'étude de l'instabilité des équations linéarisées pour $R = R_2$ serait d'un intérêt "puremment académique", en effet dès $R = R_c$, le taux de croissance initial d'une perturbation locale étant grand, les termes non-linéaires ne peuvent en fait pas être négligés. Soward étudie

12. Ne pas confondre $\eta = r_i/r_e$ avec $\tilde{\eta}$ défini plus haut.

alors l'effet de ces termes sur la convection au seuil (voir plus loin : “convection d'amplitude finie”). Yano (1992) a repris ce problème dans le cadre de la méthode par perturbation (“annulus model”) de Busse. Il propose une structure radiale en $\mathcal{O}(Ta^{-1/6})$ (comme la structure azimuthale) “oblique” (décalage de la phase). Le problème théorique reste pour l'instant abstrait, faute d'illustrations numériques ou expérimentales.

4.3.4 Confrontation avec les études numériques

Hirsching et Yano (1993) présentent une confrontation de résultats numériques avec les études analytiques présentées ci-dessus. Une grande attention est apportée à la dépendance de la solution en fonction du nombre de Prandtl. Les auteurs étudient exclusivement le cas du chauffage uniforme et des conditions aux limites cinématiques de contraintes horizontales nulles, ils ne présentent les variations de la solution en fonction du nombre de Taylor que pour $Ta \leq 8 \cdot 10^6$. Nous utiliserons dans les sections suivantes le même genre de représentations que celles utilisées dans ce travail (pour l'étude de la section structure radiale de la solution). On le voit, le démarrage de la convection dans une coquille sphérique en rotation présente de nombreuses subtilités absentes du cas sans rotation.

Il paraît intéressant d'étudier sur une gamme aussi large que possible l'effet du nombre de Taylor sur la convection au seuil, de décrire l'évolution des paramètres critiques, et de la structure radiale de la solution. Cela demande des simulations numériques directes de la convection pour des petites valeurs du nombre d'Ekman.

Nous montrons que le démarrage de la convection présente des caractéristiques variant avec le chauffage utilisé. Ainsi, si une différence de température est maintenue, le démarrage est également en rouleaux mais leur localisation est fixée par la taille de la graine, ce qui n'est pas le cas en chauffage uniforme (dans la limite asymptotique). Lorsqu'un flux de chaleur est imposé comme condition aux limites externes, la convection est de très grande échelle pour une large gamme de nombres d'Ekman.

4.4 Etude numérique de la convection au seuil

4.4.1 Validation

Dans le souci de valider notre code, nous avons adopté pour les premières simulations un chauffage uniforme, mode de chauffage retenu par la plupart des auteurs. Nous avons utilisé à titre de validation l'article de Zhang et Jones (1992) qui est l'une des très rares études numériques de convection utilisant des conditions de non glissement, beaucoup plus difficiles à résoudre numériquement. Notons que la méthode de résolution numérique (aux valeurs propres) utilisée par ces auteurs diffère de la nôtre. Nous avons validé, après conversion de nos para-

mètres, nos résultats par rapport à leur table 2 (donnant m_c, R_c, ω_c pour différents E et rapports d'aspects). Nous avons aussi validé la structure spatiale de notre solution par rapport à leurs figures 2 et 4 (pour deux valeurs différentes du nombre d'Ekman, et les deux types de conditions aux limites cinématiques). Nous reproduisons ces résultats figures 4.5 et 4.6.

4.4.2 Détermination du seuil

Notre approche numérique diffère de celle habituellement employée pour résoudre le problème linéaire. Comme nous anticipons les études ultérieures, nous utilisons une intégration temporelle et non une recherche de vecteurs propres, le problème de la détermination numérique du seuil se pose alors.

On sait que le mode critique croît près du seuil comme

$$(4.30) \quad M = e^{\sigma t} \quad M, \sigma \in \mathbb{C},$$

que ce mode est caractérisé par $m = m_c$ et que les degrés l de ce mode se divisent en deux familles indépendantes $l + m$ pair et $l + m$ impair, qui correspondent aux deux symétries par rapport à l'équateur. Busse (1970) a montré que c'est la famille symétrique par rapport à l'équateur qui est critique. Tous les degrés d'une même famille pour un mode donné suivent la même évolution temporelle. On peut donc suivre en temps l'évolution de l'un de ces coefficients pour chaque famille de chaque mode m et calculer une valeur approchée du coefficient complexe σ correspondant en utilisant un schéma aux différences

$$(4.31) \quad \frac{dM}{dt}(t) = \frac{M(t) - M(t - \delta t)}{\delta t} + \frac{\delta t}{2} \frac{d^2 M}{dt^2}(t) + \mathcal{O}(\delta t^2) = \sigma e^{\sigma t},$$

$$(4.32) \quad \sigma = \frac{1}{M(t)} \left[\frac{M(t) - M(t - \delta t)}{\delta t} + \frac{\delta t}{2} \frac{d^2 M}{dt^2}(t) + \mathcal{O}(\delta t^2) \right].$$

Ce schéma est consistant et convergent lorsque $\delta t \rightarrow 0$, il convient toutefois d'être prudent lors de la détermination du seuil. On cherche à déterminer la valeur du nombre de Rayleigh telle que

$$(4.33) \quad Re(\sigma) = 0,$$

pour cela, on se rapproche par dichotomie (pondérée des taux de croissances) de ce seuil jusqu'à

$$(4.34) \quad |Re(\sigma)| \ll \mathcal{O}(1),$$

puis on linéarise $Re(\sigma)$ comme fonction du nombre de Rayleigh pour déterminer précisément la valeur de R_c connaissant $Re(\sigma(R_c + \varepsilon_1))$ et $Re(\sigma(R_c + \varepsilon_2))$ deux valeurs du taux de croissance près du seuil¹³. On vérifie ensuite à l'aide d'autres points ($\sigma(R_c + \varepsilon_3)$, ...) que la linéarisation est justifiée (c'est-à-dire que l'on est assez près du seuil).

13. où ε_1 comme ε_2 peuvent être négatifs.

mètres, nos résultats par rapport à leur table 2 (donnant m_c, R_c, ω_c pour différents E et rapports d'aspects). Nous avons aussi validé la structure spatiale de notre solution par rapport à leurs figures 2 et 4 (pour deux valeurs différentes du nombre d'Ekman, et les deux types de conditions aux limites cinématiques). Nous reproduisons ces résultats figures 4.5 et 4.6.

4.4.2 Détermination du seuil

Notre approche numérique diffère de celle habituellement employée pour résoudre le problème linéaire. Comme nous anticipons les études ultérieures, nous utilisons une intégration temporelle et non une recherche de vecteurs propres, le problème de la détermination numérique du seuil se pose alors.

On sait que le mode critique croît près du seuil comme

$$(4.30) \quad M = e^{\sigma t} \quad M, \sigma \in \mathbb{C},$$

que ce mode est caractérisé par $m = m_c$ et que les degrés l de ce mode se divisent en deux familles indépendantes $l + m$ pair et $l + m$ impair, qui correspondent aux deux symétries par rapport à l'équateur. Busse (1970) a montré que c'est la famille symétrique par rapport à l'équateur qui est critique. Tous les degrés d'une même famille pour un mode donné suivent la même évolution temporelle. On peut donc suivre en temps l'évolution de l'un de ces coefficients pour chaque famille de chaque mode m et calculer une valeur approchée du coefficient complexe σ correspondant en utilisant un schéma aux différences

$$(4.31) \quad \frac{dM}{dt}(t) = \frac{M(t) - M(t - \delta t)}{\delta t} + \frac{\delta t}{2} \frac{d^2 M}{dt^2}(t) + \mathcal{O}(\delta t^2) = \sigma e^{\sigma t},$$

$$(4.32) \quad \sigma = \frac{1}{M(t)} \left[\frac{M(t) - M(t - \delta t)}{\delta t} + \frac{\delta t}{2} \frac{d^2 M}{dt^2}(t) + \mathcal{O}(\delta t^2) \right].$$

Ce schéma est consistant et convergent lorsque $\delta t \rightarrow 0$, il convient toutefois d'être prudent lors de la détermination du seuil. On cherche à déterminer la valeur du nombre de Rayleigh telle que

$$(4.33) \quad Re(\sigma) = 0,$$

pour cela, on se rapproche par dichotomie (pondérée des taux de croissances) de ce seuil jusqu'à

$$(4.34) \quad |Re(\sigma)| \ll \mathcal{O}(1),$$

puis on linéarise $Re(\sigma)$ comme fonction du nombre de Rayleigh pour déterminer précisément la valeur de R_c connaissant $Re(\sigma(R_c + \varepsilon_1))$ et $Re(\sigma(R_c + \varepsilon_2))$ deux valeurs du taux de croissance près du seuil¹³. On vérifie ensuite à l'aide d'autres points ($\sigma(R_c + \varepsilon_3)$, ...) que la linéarisation est justifiée (c'est-à-dire que l'on est assez près du seuil).

13. où ε_1 comme ε_2 peuvent être négatifs.

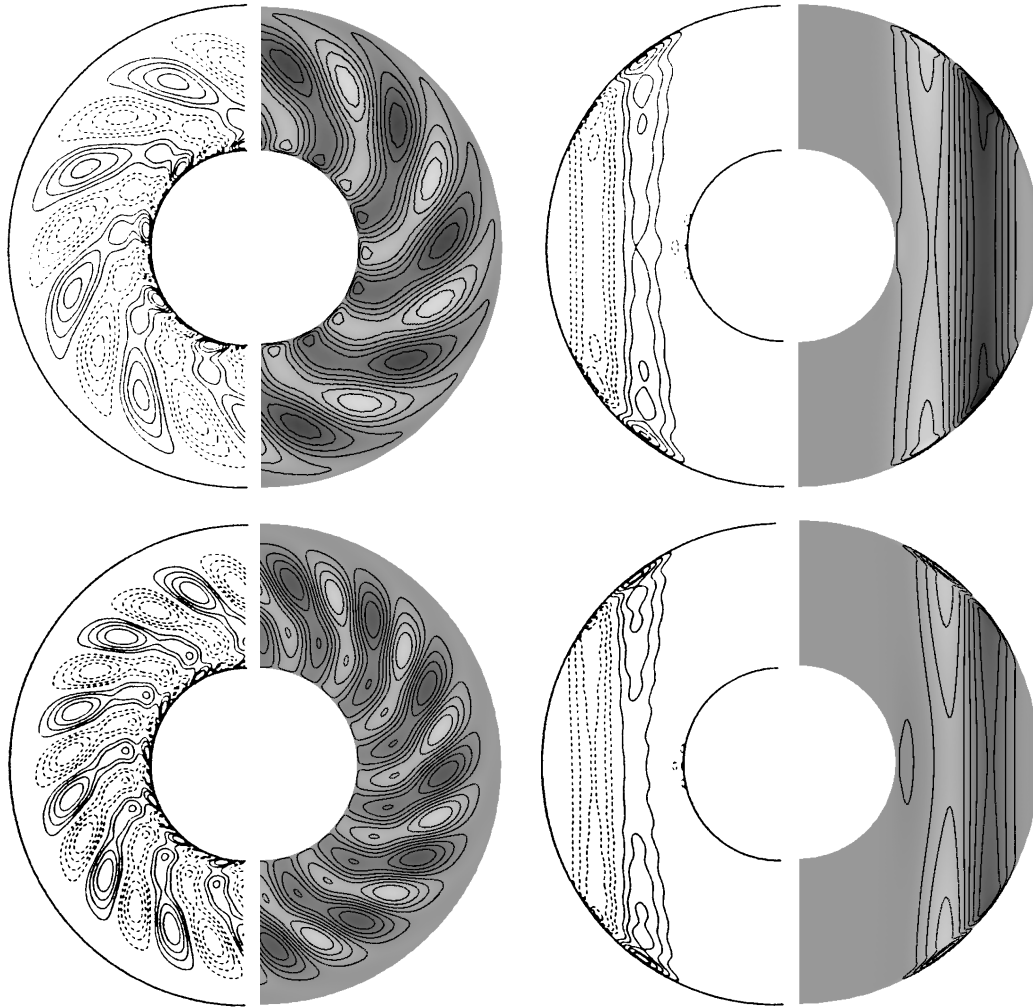


FIG. 4.5 – Validation de deux résultats en conditions aux limites cinématiques de non glissement ($\eta = 0,4$). En haut $E = 5 \cdot 10^{-5}$, $Pr = 0,7$, $m_c = 8$ (mais on obtient bien $m_c = 9$ en n'utilisant que 18 points en rayons, ce qui sous échantillonne la couche d'Ekman), $R_c = 2,36 \cdot 10^6$ ($R_{m=9} = 2,28 \cdot 10^6$ avec 18 points radiaux), $\omega_c = -306,77$. On représente ici le mode $m = 9$ (résolu avec 100 coquilles) bien qu'il ne soit pas critique, pour comparer les structures radiales. En bas $E = 2,5 \cdot 10^{-5}$, $Pr = 7,0$, $m_c = 13$ (c'est bien le mode 13 qui est critique avec plus de résolution), $R_c = 8,60 \cdot 10^6$, $\omega_c = -60,78$. La colonne de gauche contient les coupes équatoriales, celle de droite des coupes méridiennes. Chaque représentation comprend à gauche (en traits) les résultats publiés par Zhang et Jones (1992), et à droite (en niveaux de gris) ceux que nous avons obtenus. Les différences entre les deux solutions (très visibles sur les coupes méridiennes) tient en leurs convergences numériques respectives.

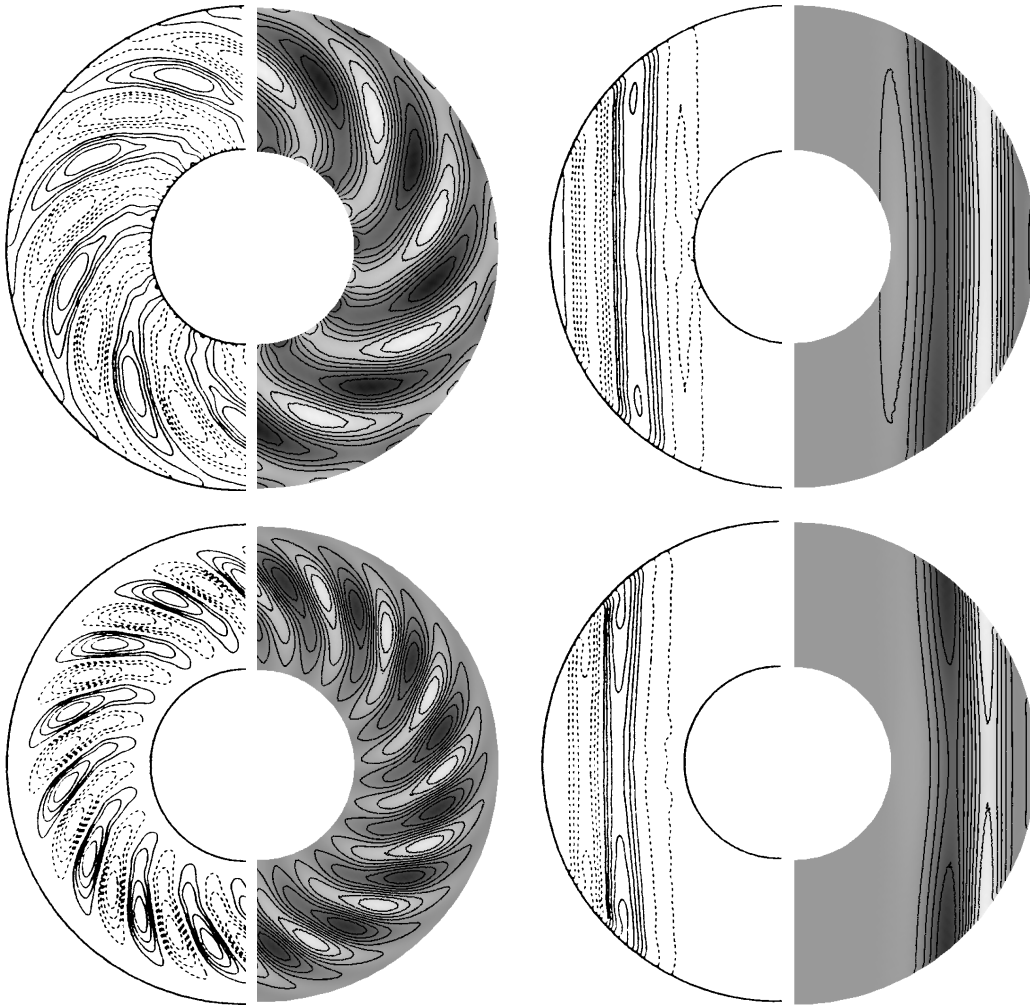


FIG. 4.6 – Validation de deux résultats en conditions aux limites cinématiques de contraintes horizontales nulles ($\eta = 0,4$). En haut $E = 5 \cdot 10^{-5}$, $Pr = 0,7$, $m_c = 9$, $R_c = 2,24 \cdot 10^6$, $\omega_c = -430,49$. En bas $E = 2,5 \cdot 10^{-5}$, $Pr = 7,0$, $m_c = 15$, $R_c = 1,14 \cdot 10^7$, $\omega_c = -102,63$. Comme pour la figure précédente, la colonne de gauche contient les coupes équatoriales, celle de droite des coupes méridiennes, et chaque représentation comprend à gauche (en traits) les résultats publiés par Zhang et Jones (1992), et à droite (en niveaux de gris) ceux que nous avons obtenus.

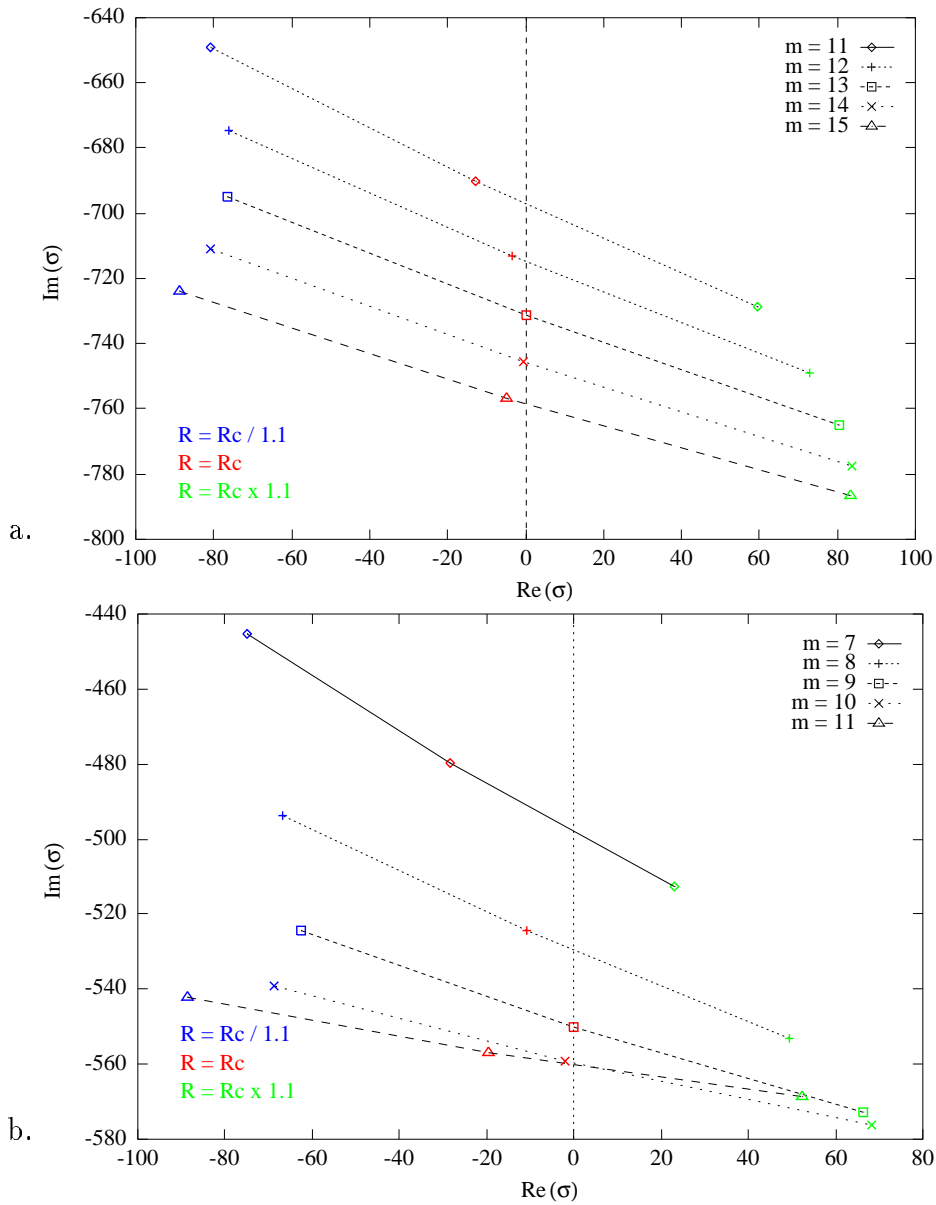


FIG. 4.7 – La bifurcation convective correspond au passage de l'axe imaginaire par une valeur propre. Nous représentons les valeurs propres, correspondant au mode critique et à ses voisins (parties symétriques par rapport à l'équateur), dans le plan complexe pour $Ta = 10^{10}$ (i.e. $E = 10^{-5}$), et pour un nombre de Rayleigh sous critique (bleu), critique (rouge), et sur-critique (vert). Graphe (a), en chauffage uniforme (β), le mode $m=13$ est critique, et que la partie imaginaire de la valeur propre est non-nulle au seuil (vitesse de phase). Graphe (b), en chauffage différentiel (Δ), la trajectoire des valeurs propres est plus compliquée (certaines lignes se croisent) et moins linéaire (sur le même intervalle) que pour le cas précédent. On n'a pas représenté de chauffage avec flux de chaleur imposé (Φ) car pour cette valeur du nombre de Taylor, les valeurs propres se confondent à 3 % près avec celles du cas Δ .

En pratique, on utiliserait donc la formule (4.32) avec un δt constant, fixé par la stabilité du schéma temporel pour la résolution des équations. L'erreur de troncature peut alors être importante, car alors que $Re(\sigma)$ devient très petit en valeur absolue près du seuil, la partie imaginaire $Im(\sigma)$ peut être très grande (surtout quand E est petit). Ainsi l'erreur sur $Re(\sigma)$ peut être importante près du seuil, et peut mener à des taux de croissance positifs alors que le seuil n'est pas encore atteint et que l'énergie du système est décroissante.

Pour cette raison, $Im(\sigma)$ a été calculée à l'aide de ce schéma, alors que $Re(\sigma)$ a été re-calculé indépendamment par

$$(4.35) \quad Re(\sigma) \simeq \frac{1}{|M(t)|} \frac{|M(t)| - |M(t - \delta t)|}{\delta t},$$

où $|\cdot|$ note le module, afin de s'affranchir de la phase.

Outre les ondes de Rossby thermiques, des ondes inertielles se propagent dans le système. Elles aussi peuvent être excitées par la force d'Archimède, et correspondent à un équilibre entre $\partial \vec{u} / \partial t$, le terme de Coriolis et la pression (voir Zhang 1992, Ardes et al. 1997). Elles peuvent être critiques avant les ondes de Rossby pour de petites valeurs du nombre de Prandtl ($Pr < 1$) et des valeurs modérées du nombre de Taylor. Elles se développent alors près de l'équateur. Lorsque le nombre de Taylor croît, il faut que le nombre de Prandtl soit de plus en plus petit pour que ces ondes soient critiques. A un nombre de Taylor de $Ta = 5 \cdot 10^6$, il faut que le nombre de Prandtl soit inférieur à 10^{-2} . Elles ne sont jamais critiques dans nos études (sauf pour le quatrième cas des figures 4.11 et 4.12). Elles peuvent exister dans les régimes transitoires mais doivent disparaître lorsque le temps d'intégration devient grand. Pour obtenir un taux de croissance de la solution qui soit stationnaire en temps en partant d'un "bruit blanc", il faut attendre que les coefficients en l des modes s'organisent, mais aussi que les ondes inertielles se dissipent. Ces ondes disparaissent pour $t \rightarrow \infty$. En pratique, il faut attendre d'autant plus longtemps que le nombre de Taylor est grand (car ces ondes sont dissipées par les effets visqueux). La figure 4.8 montre comment le taux de croissance des modes est affecté par ces ondes.

4.4.3 Représentation de la solution

La représentation d'un champ vectoriel à trois dimensions n'est pas très aisée. Nous allons utiliser divers modes de représentations. On peut effectuer des coupes équatoriales ou méridiennes de scalaires (comme nous l'avons fait au chapitre précédent).

La solution étant proche de la géostrophie, une vue du dessus du champ de vecteur à trois dimensions est également "lisible", nous adopterons donc cette représentation.

Pour observer des structures s'écartant de la géostrophie, nous proposons de visualiser des surfaces d'égales valeurs d'un champ scalaire caractéristique de la

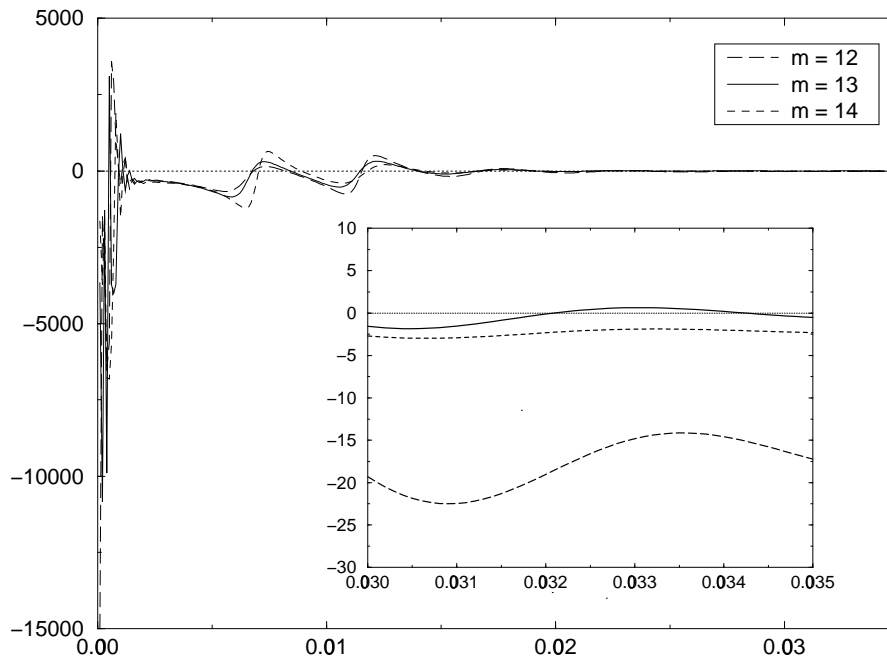


FIG. 4.8 – Représentation de l'évolution temporelle du taux de croissance des modes $m = 12$, $m_c = 13$, $m = 14$ pour $Ta = 10^{11}$ en chauffage de type Φ . Pour ce nombre de Taylor et ce chauffage le pas de temps doit être au plus de $1,0 \cdot 10^{-7}$ pour garantir la stabilité numérique (le temps est mis à l'échelle par la viscosité). Le calcul de ce graphe correspond donc à $3,5 \cdot 10^5$ pas de temps (soit 21 heures CPU sur le Cray J-90 avec 300 coquilles radiales et 80 degrés d'harmoniques). Plus le nombre de Taylor est grand, plus la détermination précise des taux de croissance est donc difficile.

solution. Nous avons retenu la composante axiale de la vorticité ($\vec{\nabla} \wedge \vec{u}$) $|_z$. Nous utiliserons également des lignes de courants (“streamlines”). Elles sont d’une interprétation dangereuse, car elles ne correspondent aux trajectoires de particules fluides que si le champ de vecteur est statique. Elles permettent cependant de mieux comprendre la structure du champ vectoriel.

Enfin les coupes monodimensionnelles sont essentielles pour pouvoir décrire précisément la structure radiale de la solution obtenue. La vitesse de phase de la solution rend difficile la réalisation de “coupes” monodimensionnelles significatives, et comme $m_c \neq 0$ la moyenne azimutale des grandeurs algébriques est nécessairement nulle. Nous avons utilisé des représentations des fonctions suivantes

$$(4.36) \quad S_1(r) = \int_0^{2\pi} \sqrt{V_r^2 + V_\theta^2 + V_\phi^2} d\phi,$$

où V (n’ayant pas d’amplitude définie au seuil) est mis à l’échelle pour que

$$(4.37) \quad \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_{r_i}^{r_e} \sqrt{V_r^2 + V_\theta^2 + V_\phi^2} dr d\theta d\phi = 1 .$$

$$(4.38) \quad S_2(r) = \int_0^{2\pi} |\Theta| d\phi,$$

mis à l’échelle tel que $\|\Theta\|_{\text{sup}} = 1$.

On peut aussi utiliser une autre représentation de la structure radiale, inspirée de Yano (1992) et Hirsching et Yano (1993), elle consiste à écrire dans le plan équatorial $r u_p$ sous la forme

$$(4.39) \quad r u_p = A(r) e^{i m (\phi - \phi_0(r)) + i \omega t} .$$

On peut alors représenter $A(r)$ qui est un scalaire de plus permettant une représentation monodimensionnelle de la structure des colonnes, mais aussi la phase $\phi_0(r)$ qui nous donne une indication de la spiralis tion de l’ coulement¹⁴.

Notons que, comme l’anomalie de température θ , l’amplitude $A(r)$ est normalisée tel que $\|A(r)\|_{\text{sup}} = 1$.

4.4.4 Réduction de l’espace des paramètres

L’espace des paramètres est plus grand pour ce problème que pour ceux que nous avons traités jusqu’à présent. Outre le rapport d’aspect de la coquille et le type de chauffage utilisé, il est constitué du nombre de Taylor (ou indifféremment du nombre d’Ekman) du nombre de Prandtl (caractéristique du fluide) et du nombre de Rayleigh. La résolution numérique de ce problème étant également plus

14. On notera la phase en radians (convertir en degrés pour comparer avec Hirsching et Yano), et comme une fonction continue dans \mathbb{R} plutôt que discontinue dans $[0, 2\pi[$.

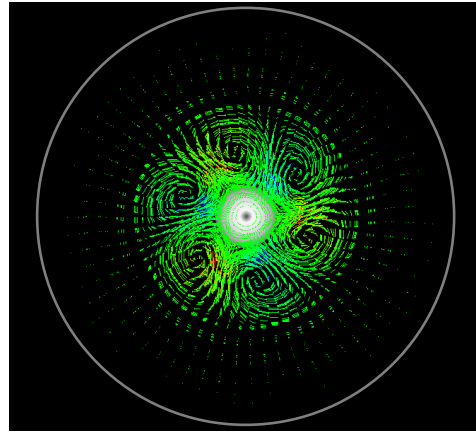


FIG. 4.9 – Simulation pour $Ta = 10^9$, en chauffage différentiel $\underline{\Delta}$ avec un rapport d'aspect de 0,15. Les colonnes se collent à la graine et c'est le mode $m = 3$ qui est critique, au lieu de $m = 7$ pour $\eta = 0.35$.

ardue que pour les problèmes traités précédemment, il paraît malheureusement inévitable de restreindre, au moins dans un premier temps, notre étude à un sous-espace de paramètres.

Le rapport d'aspect du noyau actuel est bien connu (voisin de 0,35), il est raisonnable de penser que la graine a été plus petite dans l'histoire du noyau, et qu'elle a cru avec le refroidissement de celui-ci. Nous nous limiterons cependant dans les études suivantes à des calculs avec $\eta = 0,35$. L'effet du rapport d'aspect sur la convection en chauffage uniforme $\underline{\beta}$ (et avec une condition de contraintes horizontales nulles) a été étudié par Zhang (Zhang, 1992). Comme on s'y attend d'après l'étude théorique présentée ci-avant, la graine ne modifie pas la solution tant que son rayon est inférieur à la localisation des colonnes dans une sphère pleine, après quoi la graine modifie la solution en repoussant les colonnes.

L'effet du rapport d'aspect sur la convection en chauffage différentiel $\underline{\Delta}$ est très différent. Comme le montre l'étude analytique, c'est la taille de la graine qui détermine alors la position de l'instabilité. Quelle que soit η , la valeur du nombre de Rayleigh critique, ainsi que les caractéristiques du mode critique dépendent alors de η .

Nous présentons (figure 4.10) des résultats obtenus pour $Ta = 10^8$, $Pr = 1.0$ et $\eta = 0.12, 0.2, 0.35, 0.6$ pour ces deux types de chauffage. Les paramètres critiques en chauffage uniforme sont :

η	m_c	R_c	ω_c
0,12	5	$1.078 \cdot 10^6$	-118.97
0,2	5	$1.079 \cdot 10^6$	-119.05
0,35	6	$1.104 \cdot 10^6$	-126.85
0,6	10	$1.475 \cdot 10^6$	-132.97

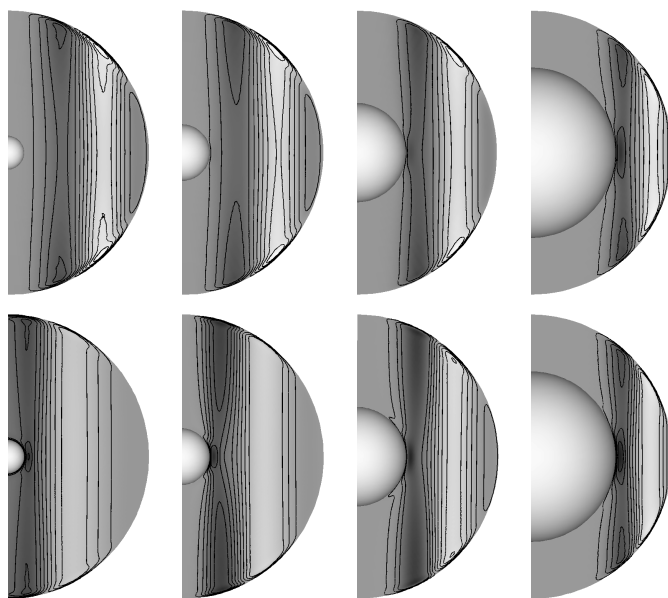


FIG. 4.10 – Représentation de u_ϕ dans un plan méridien. On note l'effet différent de la variation de la taille de la graine en chauffage uniforme (en haut) et en chauffage différentiel (en bas), pour $Ta = 10^8$, et $\eta = r_i/r_e$ valant successivement 0, 12, 0, 2, 0, 35, 0, 6 .

et en chauffage différentiel :

η	m_c	R_c	ω_c
0, 12	1	$9,543 \cdot 10^4$	-30.18
0, 2	3	$1.299 \cdot 10^5$	-73.96
0, 35	5	$2.394 \cdot 10^5$	-99.71
0, 6	10	$6.947 \cdot 10^5$	-121.67

Le mode critique croît avec le rapport d'aspect. Dans la limite où ce rapport est proche de 1 (“small gap”) c’est la distance $d = r_e - r_i$ qui impose le mode critique.

Nous n’avons pas étudié l’effet du rapport d’aspect sur le troisième type de chauffage Φ . Cependant, comme nous allons le montrer ci après, ce chauffage a le même comportement que le précédent dans la limite des grands nombres de Taylor, qui est celle qui nous intéresse.

Le nombre de Prandtl du noyau est à peu près 0,14 (Poirier, 1988), cette valeur ne constitue pas en soi une difficulté pour les simulations numériques (contrairement aux grands nombres de Taylor).

Nous présentons (figure 4.11), toujours pour $Ta = 10^8$, la solution obtenue en chauffage uniforme β pour des nombres de Prandtl de : $Pr = 7$ (ce serait le cas de l’eau¹⁵), $Pr = 1$, $Pr = 1/7$ (très proche de la valeur valable pour le noyau

15. Souvent utilisé pour la convection expérimentale.

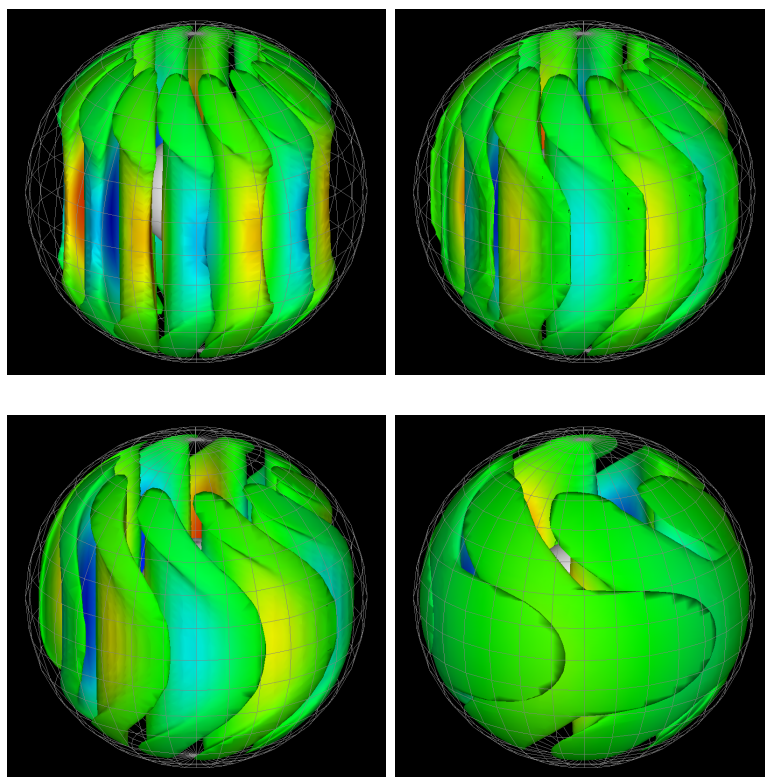


FIG. 4.11 – Influence du nombre de Prandtl sur la solution au seuil. De haut en bas et de gauche à droite : $Pr = 7, 1, 1/7, 1/49$. Pour $Pr = 1/49$, la convection se développe essentiellement dans la région équatoriale (voir également figure 4.12). Au plus bas nombre de Prandtl, sa structure se rapproche de celle d'une onde inertielle (voir Zhang, 1993). Pour permettre une représentation lisible, la couche d'Ekman contre la sphère externe a été supprimée de ces dessins.

terrestre), et $Pr = 1/49$ (ce serait le cas du Gallium¹⁶).

On a alors les paramètres critiques suivants :

Pr	m_c	R_c	ω_c
1/49	3	$2.713 \cdot 10^5$	-904.40
1/7	5	$5.409 \cdot 10^5$	-448.83
1	6	$1.104 \cdot 10^6$	-126.85
7	7	$1.382 \cdot 10^6$	-19.89

Nous ne ferons pas varier le nombre de Prandtl dans les simulations suivantes (dans le but de réduire le nombre de simulations), notre objectif sera essentiellement d'étudier les grands nombres de Taylor, et nous fixerons le nombre de Prandtl à $Pr = 1$. Cette valeur est choisie plutôt que 1/7 car notre but est

16. Utilisé pour la convection thermique et la magnéto-convection.

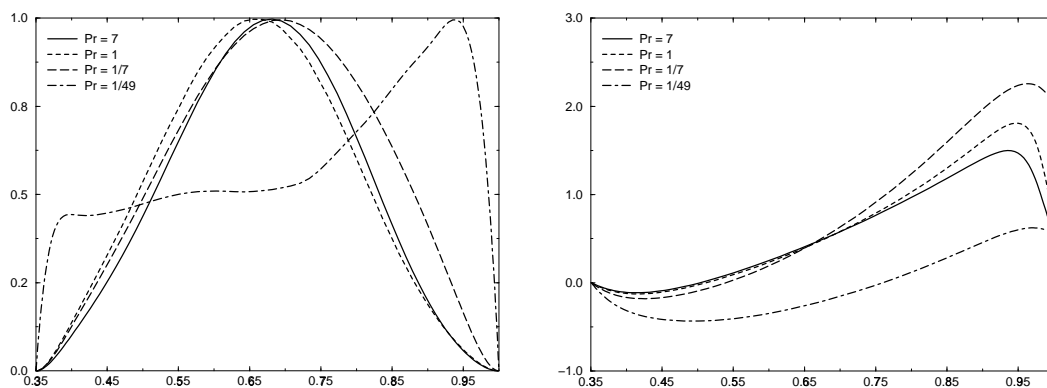


FIG. 4.12 – Structure radiale des simulations représentés sur la figure précédente. A gauche l'amplitude et à droite la phase. La spiralisation augmente nettement lorsque l'on diminue le nombre de Prandtl de 7 à 1/7 , et le mode de convection diffère pour $Pr = 1/49$.

d'étudier le comportement à grand Ta . Ce comportement se caractérise par de grandes valeurs de m_c , ce qui est crucial dans les études analytiques que nous avons rappelées, car cela justifie que l'on néglige la variation de la pente des conditions aux limites. Pour nous rapprocher plus vite de ce régime (du moins nous l'espérons) nous avons donc légèrement sur-évalué le nombre de Prandtl, pour diminuer artificiellement la taille des structures.

4.4.5 Etude de la limite des grands nombres de Taylor

On l'a vu, l'étude analytique par perturbation montre que le régime asymptotique des grands nombres de Taylor peut être différent selon le type de chauffage ($\underline{\beta}$ ou $\underline{\Delta}$). Nous étudierons donc indépendamment chaque type de chauffage.

Commençons par l'étude du **chauffage uniforme** (le plus souvent étudié). Pour ce chauffage on peut s'appuyer sur l'étude asymptotique de Roberts reprise par Busse. Pour un nombre de Prandtl de un, Busse obtient (Table I, Busse 1970), pour le mode critique¹⁷

$$(4.40) \quad m_c = 0.6003 \cdot E^{-1/3}$$

pour le nombre de Rayleigh critique

$$(4.41) \quad R_c = 3.382 \cdot E^{-4/3}$$

et pour la pulsation critique (en tenant également compte de nos différences d'unités de temps)

$$(4.42) \quad \omega_c = -0.4362 \cdot E^{-2/3}$$

¹⁷. Ces formules tiennent compte de la différence d'un facteur deux dans nos définitions respectives du nombre d'Ekman.

pour une distance à l'axe de

$$(4.43) \quad s_c = 0.5004$$

Si on utilisait l'étude par perturbation de Busse (comme semble l'avoir fait Zhang) on aurait (toujours pour $Pr = 1$).

$$(4.44) \quad m_c = 0.5825 \cdot E^{-1/3}$$

pour le nombre de Rayleigh critique

$$(4.45) \quad R_c = 1.7269 \cdot E^{-4/3}$$

et pour la pulsation critique (en tenant également compte de nos différences d'unités de temps)

$$(4.46) \quad \omega_c = -0.4798 \cdot E^{-2/3}$$

pour une distance à l'axe de

$$(4.47) \quad s_c = 0.4477$$

On obtient numériquement les paramètres critiques suivants

Ta	m_c	R_c	ω_c
10^6	3	$9.742 \cdot 10^4$	-7.70
10^7	4	$2.860 \cdot 10^5$	-47.08
10^8	6	$1.104 \cdot 10^6$	-126.85
10^9	9	$4.676 \cdot 10^6$	-312.01
10^{10}	13	$2.072 \cdot 10^7$	-731.18
10^{11}	20	$9.363 \cdot 10^7$	-1704.86
10^{12}	30	$4.270 \cdot 10^8$	-3885.98

Les solutions correspondantes sont représentées figure 4.13. Il s'agit bien d'une instabilité sous forme de colonnes axiales, dont la vitesse de phase est non nulle. Ces colonnes sont bien symétriques par rapport à l'équateur. Des lignes de courants ("Streamlines") ne peuvent traverser le plan équatorial (figure 4.14). La solution possède une vitesse de phase, il est donc important de signaler les risques de confusion entre lignes de courants et trajectoires de particules fluides. Pour étudier les trajectoires de particules fluides, il est essentiel de tenir compte de la vitesse de phase de la solution. Quand cette vitesse de phase est grande (ce qui est le cas dans le régime asymptotique) une particule fluide n'a pas le temps de parcourir un rouleau avant d'être rattrapée par le rouleau voisin (de sens opposé). Dans la limite des très grandes vitesses de phase, une particule fluide ne fait qu'osciller (on a bien affaire à une onde). Ce phénomène est accentué par le fait qu'en plus de la vitesse de phase, le nombre de colonnes croît avec le nombre de Taylor.

On peut étudier sur un graphe log-log les valeurs du nombre de Rayleigh critique, et de la pulsation au seuil, pour en déterminer la loi de variation en

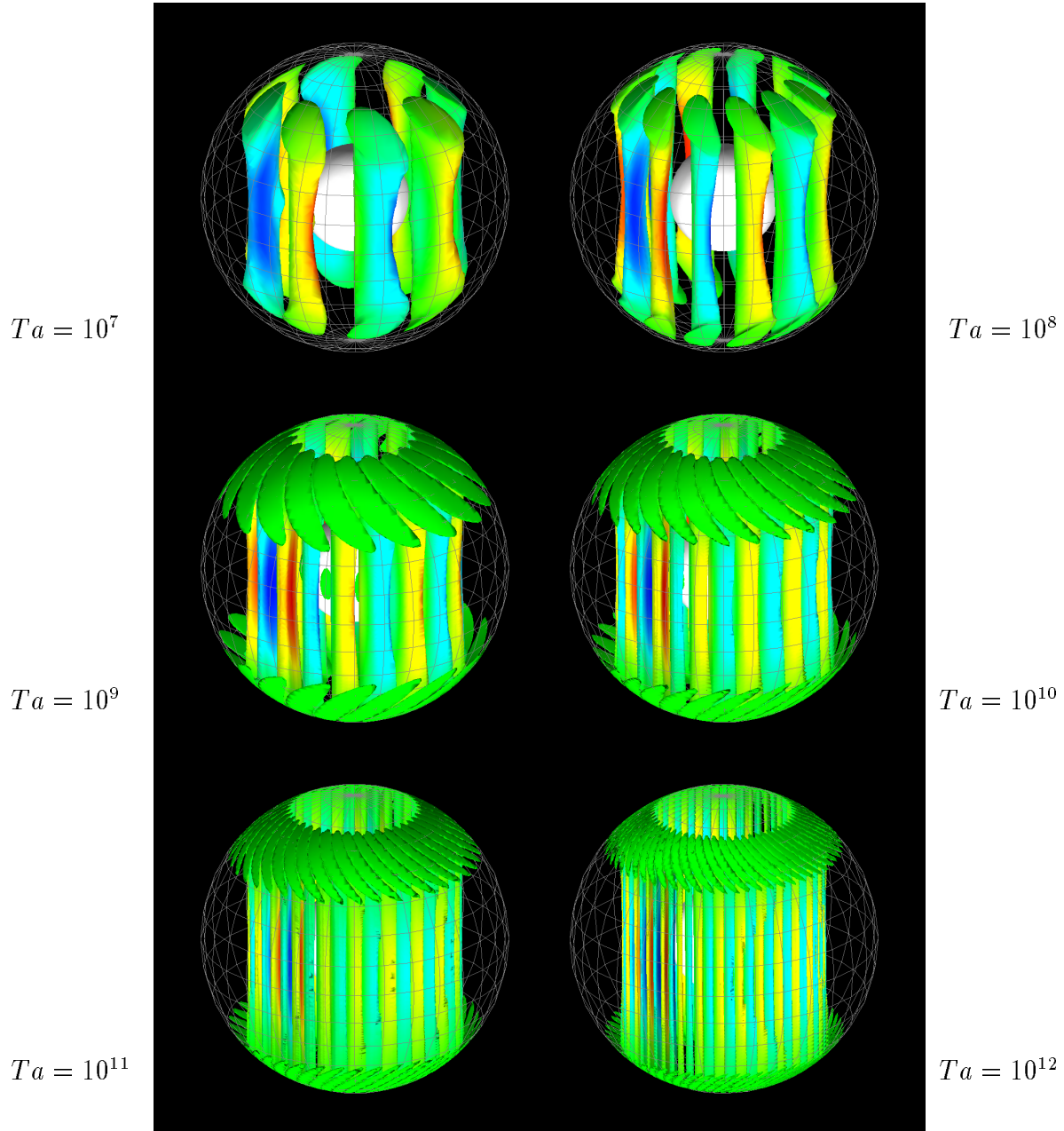


FIG. 4.13 – Surfaces d'isovaleurs de la composante axiale de la vorticité en chauffage β . On observe l'effet croissant de la contrainte de Proudman-Taylor. Le champ a été annulé pour plus de lisibilité dans les couches limites pour les deux premières figures. La couche d'Ekman contre la frontière externe est très clairement visible sur les images suivantes.

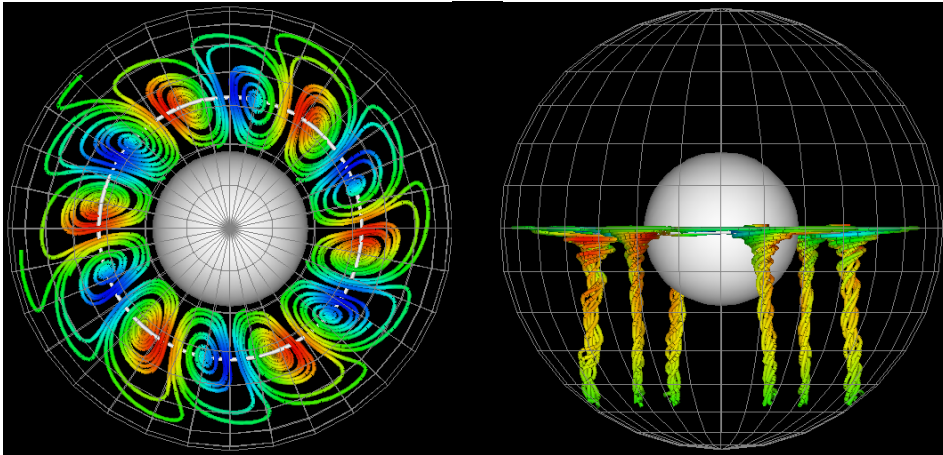


FIG. 4.14 – Lignes de courants pour le seuil de convection en chauffage uniforme à un nombre de Taylor de 10^8 . Les lignes partent de points régulièrement espacés sur un cercle placé légèrement sous le plan équatorial. La solution convective est parfaitement symétrique par rapport à l'équateur, le fluide ne change pas d'hémisphères et les colonnes correspondent alternativement à des courants ascendants et descendants. Ces lignes de courants ne doivent pas être assimilées à des trajectoires de particules fluides, à cause de la vitesse de phase de la solution.

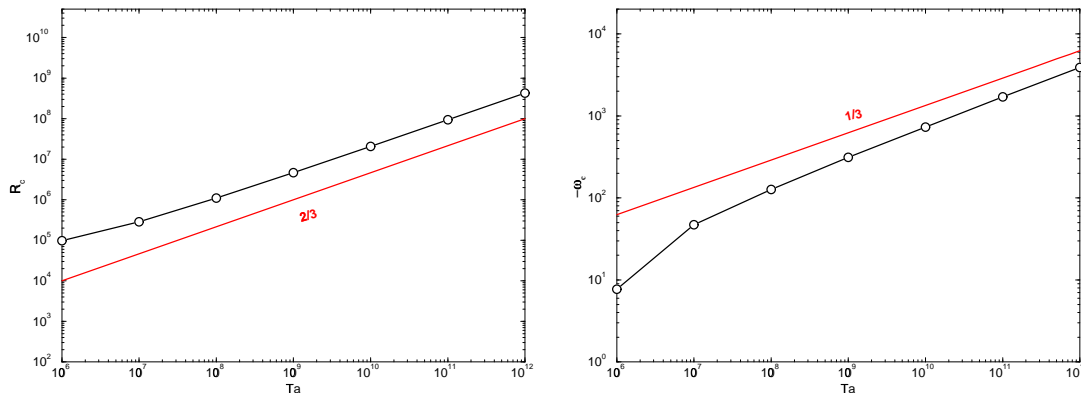


FIG. 4.15 – On note sur un graphe log-log que les variations du nombre de Rayleigh critique, et de la pulsation au seuil, pour le chauffage β , semblent suivre les lois de Busse (1970) dans la limite des grands nombres de Taylor.

fonction de Taylor (la loi pour m n'a de sens que quand m devient assez grand). Ces courbes sont représentées figure 4.15. Il reste difficile de quantifier sur ces graphes à quel point la loi est satisfaite, une autre approche (inspirée des différences finies) consiste à introduire une fonction “exposant” \mathcal{E} définie pour toute fonction X de Ta par

$$(4.48) \quad \mathcal{E}(X(Ta)) = \log_{10}(X(Ta)/X(Ta/10)) ,$$

si la fonction X s'écrit

$$(4.49) \quad X(Ta) = \alpha Ta^\beta ,$$

on a

$$(4.50) \quad \mathcal{E}(X(Ta)) = \beta .$$

Appliquée aux résultats du tableau précédent, elle donne

Ta	$\mathcal{E}(R_c)$	$\mathcal{E}(\omega_c)$
10^7	0.467	0.786
10^8	0.586	0.430
10^9	0.627	0.391
10^{10}	0.646	0.370
10^{11}	0.654	0.368
10^{12}	0.659	0.358

De plus pour $Ta = 10^{12}$, on a $\mathcal{E}(m_c) = 0.176$. Il semble donc que dans la limite des grands nombres de Taylor, les paramètres critiques déterminés numériquement suivent bien les lois en puissance prédites par les études analytiques, à savoir

$$(4.51) \quad m_c \propto Ta^{1/6} ,$$

$$(4.52) \quad R_c \propto Ta^{2/3} ,$$

$$(4.53) \quad \omega_c \propto Ta^{1/3} .$$

Il est toutefois important de noter que la vérification des lois de Busse B-70 (rappelées plus haut) par notre solution ne signifie pas nécessairement que les deux solutions sont identiques. Les lois asymptotiques peuvent être plus générales que la solution proprement dite. Ainsi, la loi en $E^{1/3}$ pour la longueur d'onde horizontale (le mode critique en ϕ) est vérifiée dès qu'il y a équilibre visqueux-Coriolis dans l'équation de vorticité et que la condition de Proudman-Taylor est satisfaite (on a par exemple une telle loi dans le cas plan en rotation, cf Chandrasekhar 1961). On dérive une telle loi en prenant la composante axiale du rotationnel de l'équilibre viscosité-Coriolis

$$(4.54) \quad 2\Omega \vec{e}_z \cdot \frac{\partial \vec{u}}{\partial z} = \nu \vec{e}_z \cdot \vec{\nabla}_H \wedge \Delta_H \vec{u} ,$$

$$(4.55) \quad 2\Omega \frac{\vec{u}}{r_e} \simeq \frac{\nu}{\ell^3} \vec{u},$$

$$(4.56) \quad \ell^3 \simeq r_e^3 E,$$

d'où une structure horizontale

$$(4.57) \quad \ell = r_e \mathcal{O}(E^{1/3}).$$

Une autre confrontation importante concerne donc le coefficient de ces lois asymptotiques. On calcule :

	$Ta = 10^8$	$Ta = 10^9$	$Ta = 10^{10}$	$Ta = 10^{11}$	$Ta = 10^{12}$
$C_m = m_c/Ta^{1/6}$	0.27	0.28	0.28	0.29	0.30
$C_R = R_c/Ta^{2/3}$	6.16	5.12	4.46	4.34	4.27
$C_\omega = -\omega_c/Ta^{1/3}$	0.22	0.27	0.34	0.37	0.39

Par comparaison avec les relations présentées précédemment, on note que le coefficient C_m vaut environ la moitié de celui déterminé par les deux méthodes analytiques (qui ne diffèrent que très peu). Ce résultat est nouveau, et est particulièrement intéressant à la lumière des mesures expérimentales (voir Chamberlain et Carrigan, Carrigan et Busse) qui ont observé que le mode critique réalisé est environ la moitié de celui prédit analytiquement (pour un nombre de Prandtl voisin de sept, alors que les calculs présentés ici sont réalisés pour un nombre de Prandtl de un). Il semble donc que nos simulations numériques rejoignent les expériences sur ce point. La différence d'interprétation avec l'étude de Zhang (1992), dans laquelle les résultats principaux sont présentés pour des nombres de Prandtl de 10 reste encore à être précisée.

Le coefficient C_R est celui pour lequel les résultats de l'étude par perturbation diffèrent le plus de ceux de l'étude asymptotique (d'un facteur deux environ). L'étude par perturbation définit un coefficient C_R plus petit que celui que nous obtenons pour nos simulations d'un facteur proche de 0.4. Ce décalage est du même ordre que celui observé par Zhang (1992) pour $Pr = 1$ (voir sa figure 1). Le coefficient prédit par l'étude asymptotique est beaucoup plus proche (bien que toujours inférieur) de celui que nous observons, ils ne diffèrent que d'un facteur 0.8. Comme notre coefficient C_R continue de décroître alors que le nombre de Taylor augmente, on ne peut pas exclure que notre C_R ne tende vers la valeur prédite asymptotiquement.

Le coefficient C_ω diffère peu de l'étude par perturbation à l'étude asymptotique. Nous obtenons numériquement un coefficient inférieur d'un facteur 0.9 (0.8 pour l'étude par perturbation).

Une autre confrontation concerne l'emplacement des colonnes, on le mesure dans notre solution par la position du maximum de l'amplitude A (figure 4.17) et de celui de l'anomalie de température S_2 (figure 4.16).

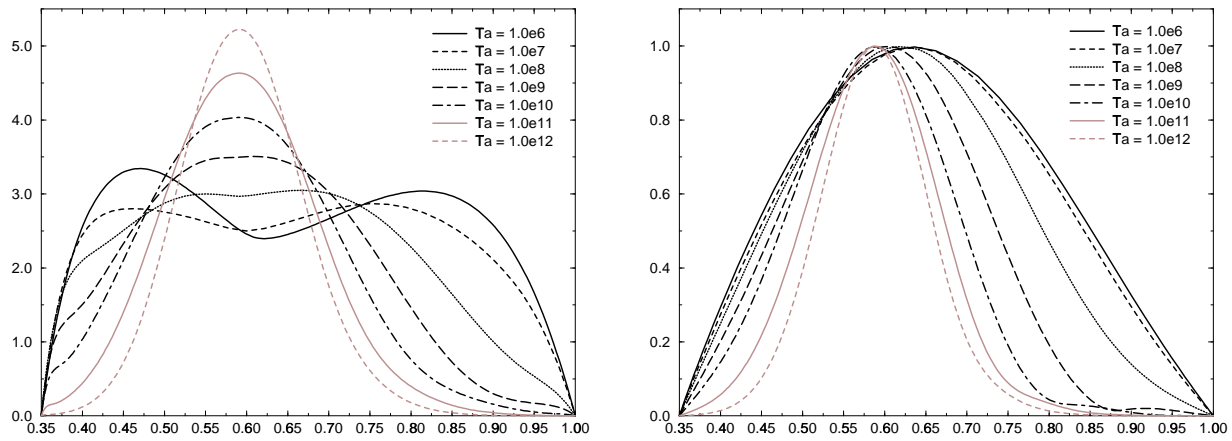


FIG. 4.16 – Structure radiale de la solution en vitesse S_1 à gauche et en température S_2 à droite en fonction du nombre de Taylor en chauffage uniforme, pour $Pr = 1$.

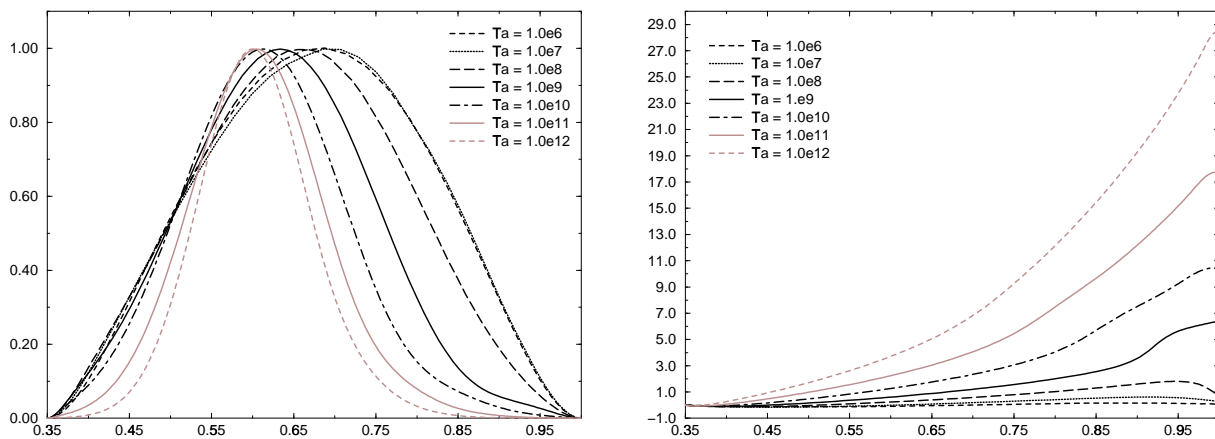


FIG. 4.17 – Structure radiale de la solution en chauffage uniforme, en fonction du nombre de Taylor, et pour $Pr = 1$. L'amplitude $A(r)$ est représentée à gauche, et la phase $\phi_0(r)$ à droite.

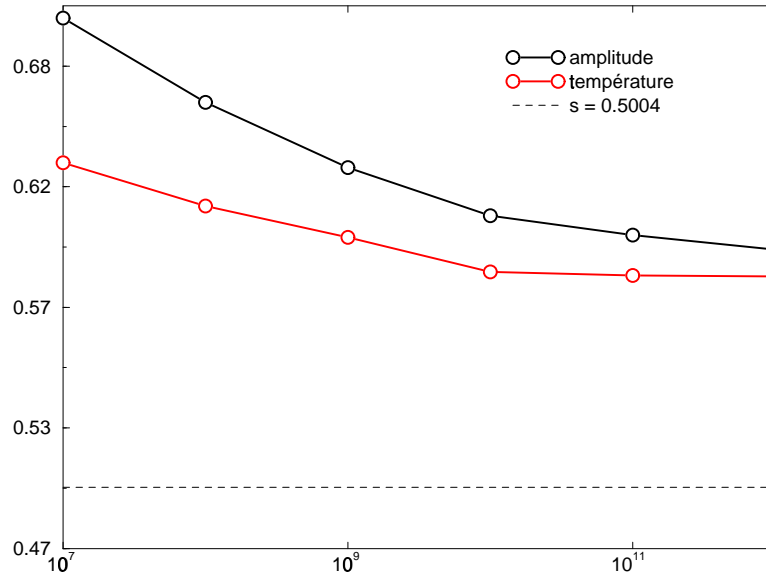


FIG. 4.18 – Distance à l'axe du maximum de l'amplitude et du maximum de la perturbation de température en fonction du nombre de Taylor, pour le chauffage uniforme. Les colonnes semblent converger vers une localisation différente de celle prédite analytiquement.

On remarque que ceux-ci sont décalés dans notre solution mais se rapprochent à mesure que l'écoulement se confine en espace. Ces résultats sont représentés graphiquement sur la figure 4.18. L'écoulement ne semble pas converger vers la limite prédite par l'étude asymptotique. Ces observations indiquent qu'aux nombres de Taylor que nous avons atteints (encore relativement modestes, si l'on se réfère à l'étude du chapitre précédent) la solution convective diffère de celle décrite par l'étude asymptotique. Cette différence est-elle en rapport avec l'argument de Soward (1977) sur l'instabilité de la structure asymptotique pour les grands nombres de Taylor ?

Le fait que la solution réalisée soit plus large que les fonctions de Bessel cylindriques utilisées pour décrire la solution de l'étude asymptotique, semble s'accorder avec l'étude de Soward. Ces fonctions J_m sont définies comme

$$(4.58) \quad J_m(x) = \left(\frac{1}{2}x\right)^m \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(-\frac{1}{4}x^2\right)^k}{k! \Gamma(m+k+1)} .$$

où Γ vaut

$$(4.59) \quad \Gamma(z) = \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt .$$

La structure radiale de la solution asymptotique est alors décrite par $J_m(\gamma s)$ où $m = m_c$, et γ vaut

$$(4.60) \quad \gamma = \frac{m_c}{s_c} .$$

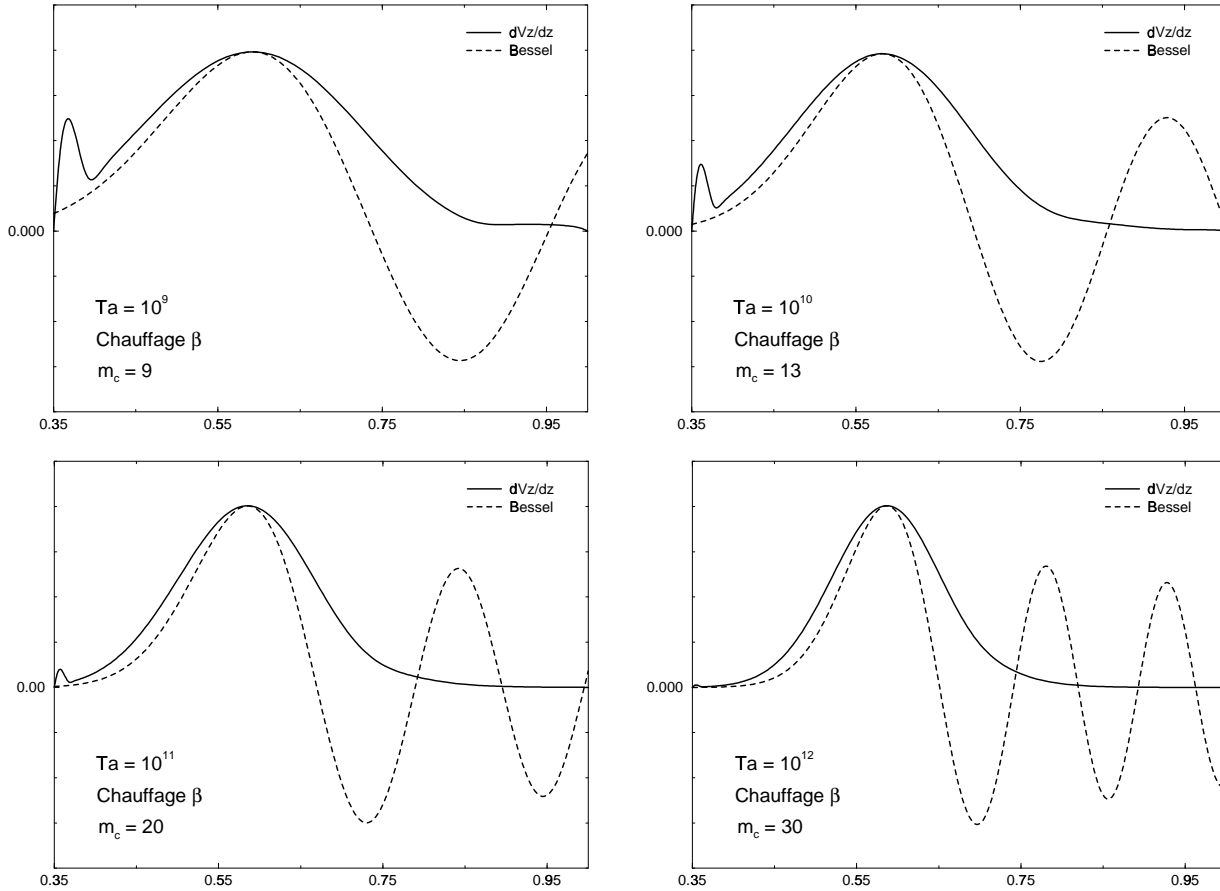


FIG. 4.19 – Comparaison de la solution en chauffage uniforme avec les fonctions de Bessel cylindriques.

Dans la limite asymptotique (quand m est assez grand) le maximum de cette fonction est en s_c . En pratique, aux nombres de Taylor que nous avons pu étudier, m_c n'est pas assez grand, et nous avons ajusté la valeur de γ de sorte que $J_m(\gamma s)$ ait son maximum en s_c . Nous avons utilisé pour différents nombres de Taylor la valeur de s_c correspondant à notre résultat numérique, et comparé la structure de $J_m(\gamma s)$ avec celle de $\partial u_z / \partial z$ dans le plan équatorial pour notre solution. Ces comparaisons, présentées figure 4.19, semblent s'accorder avec les arguments de Soward et expliquer en partie les désaccords entre l'étude asymptotique et les simulations numériques. La fonction de Bessel est plus fine que la solution obtenue, qui est largement symétrique.

Les études antérieures de ce problème ont toujours été menées en condition de contraintes horizontales nulles (Zhang 1992, Hirsching et Yano 1993). Nous avons donc également étudié ces conditions aux limites. Cette étude rapide et partielle du cas des conditions de contraintes horizontales nulles est également motivée par le fait que l'on ne sait pas si la solution dans la limite des grands nombres de Taylor

dépend des conditions aux limites cinématiques. Des différences importantes entre des modèles de dynamo hyper-visqueuses semblent, d'après une récente étude (Kuang et Bloxham, 1997), trouver leurs origines dans l'usage de conditions aux limites cinématiques différentes. La question de savoir si la solution convective est influencée par les conditions aux limites cinématiques est ouverte. L'étude théorique faisant référence sur cette question est celle de Roberts (1965), qui montre dans un cas particulier que le comportement asymptotique en condition de contraintes horizontales nulles est le même qu'en condition de non-glissement. Cette étude ne concerne toutefois que les mouvements convectifs très près de l'axe de rotation. La seule étude numérique proposant une comparaison entre ces deux types de conditions aux limites (Zhang et Jones 1992) n'a pas étudié de nombres d'Ekman inférieurs à $2.5 \cdot 10^{-5}$ et fut menée pour un nombre de Prandtl de 7.0. Zhang et Jones observent des nombres de Rayleigh critiques et des modes critiques différents selon les conditions aux limites utilisées.

Nous obtenons en condition de contraintes horizontales nulles les résultats suivants

Ta	m_c	R_c	ω_c
10^8	7	$1.118 \cdot 10^6$	-210.78
10^9	10	$4.767 \cdot 10^6$	-457.30
10^{10}	13	$2.1007 \cdot 10^7$	-961.92
10^{11}	20	$9.461 \cdot 10^7$	-2121.81
10^{12}	30	$4.3002 \cdot 10^8$	-4635.16

Les nombres de Rayleigh critiques, ainsi que les modes critiques obtenus avec ces conditions aux limites semblent converger vers la même limite qu'en condition de non-glissement pour les grands nombres de Taylor. Les pulsations en revanche diffèrent pour la gamme de nombres de Taylor étudiés.

On obtient les coefficients

	$Ta = 10^8$	$Ta = 10^9$	$Ta = 10^{10}$	$Ta = 10^{11}$	$Ta = 10^{12}$
$C_m = m_c/Ta^{1/6}$	0.32	0.31	0.28	0.29	0.30
$C_R = R_c/Ta^{2/3}$	5.19	4.77	4.52	4.38	4.30
$C_\omega = -\omega_c/Ta^{1/3}$	0.45	0.46	0.45	0.46	0.46

Les coefficients C_m et C_R convergent vers les mêmes valeurs que celles de l'étude en condition de non-glissement. On note qu'avec ces conditions aux limites, le coefficient C_ω , qui ne varie presque pas avec le nombre de Taylor, est beaucoup plus proche des valeurs des études analytiques que celui obtenu en condition de non-glissement.

On compare figure 4.20 la structure radiale de la solution pour $Ta = 10^{12}$ en condition de contraintes horizontales nulles avec celle obtenue précédemment en condition de non-glissement. Ces deux structures diffèrent encore nettement, même à ces valeurs élevées du nombre de Taylor.

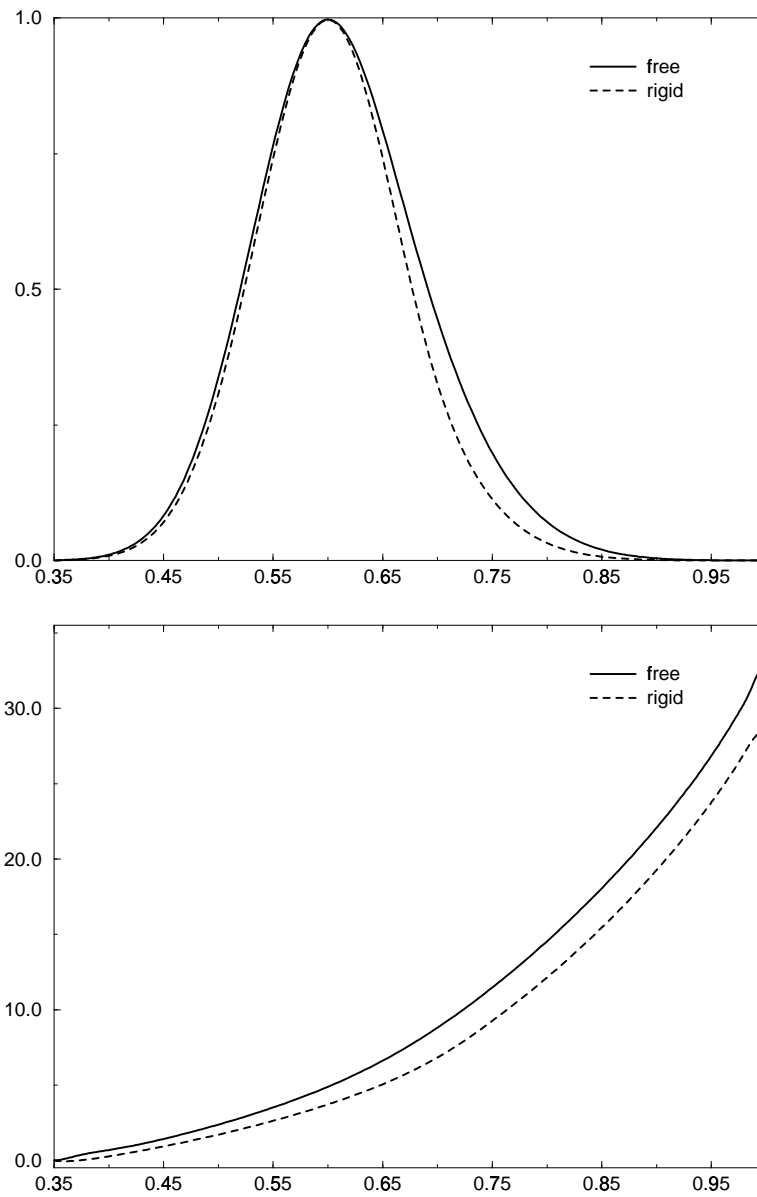


FIG. 4.20 – Comparaison de la structure radiale de la solution en contraintes horizontales nulles et en rigide pour $Ta = 10^{12}$, en chauffage uniforme $\underline{\beta}$. Le premier graphe représente l'amplitude, et le second la phase.

Le comportement spatial des solutions en condition de non-glissement et en condition de contraintes horizontales nulles semble converger lentement vers la même limite. Leur comportement temporel en revanche reste différent pour les nombres de Taylor que nous avons étudiés jusqu'à présent. L'étude de nombres de Taylor plus élevés permettra de déterminer si les pulsations convergent¹⁸.

On peut donc noter que la limite asymptotique proposée par Busse ne semble pas être la limite de notre solution numérique pour les grands nombres de Taylor. Le seuil de la solution numérique est plus élevé, et sa structure radiale plus large que la fonction utilisée pour l'étude asymptotique. Nos simulations semblent donc en accord avec l'étude de Soward 1977, mais également avec les mesures expérimentales, pour lesquelles le mode critique observé est plus proche de celui que nous observons que de celui prédit asymptotiquement.

Étudions à présent le cas du **chauffage avec une différence de température Δ** . Comme nous l'avons montré graphiquement au début de ce chapitre, ce mode de chauffage mène à un problème moins bien posé (voir figure 4.7). On observe que le critère de stabilité numérique (sur le pas de temps) pour ce mode de chauffage est inférieur à celui du chauffage uniforme.

On obtient les instabilités suivantes (représentées sur la figure 4.21).

Ta	m_c	R_c	ω_c	$\mathcal{E}(R_c)$	$\mathcal{E}(\omega_c)$
10^6	3	$2.68 \cdot 10^4$	-7.07		
10^7	4	$7.38 \cdot 10^4$	-38.89	0.44	0.740
10^8	5	$2.39 \cdot 10^5$	-99.71	0.51	0.409
10^9	7	$8.59 \cdot 10^5$	-240.66	0.55	0.382
10^{10}	9	$3.24 \cdot 10^6$	-550.17	0.58	0.359
10^{11}	13	$1.27 \cdot 10^7$	-1262.29	0.59	0.361
10^{12}	19	$5.15 \cdot 10^7$	-2845.45	0.61	0.353

Les paramètres semblent vérifier les mêmes lois de puissance que précédemment. Cependant pour un nombre de Taylor fixé l'exposant calculé est plus éloigné de l'exposant théorique pour ce mode de chauffage. La solution est différente de celle obtenue en chauffage $\underline{\beta}$ et les coefficients diffèrent (ils sont également moins convergés puisque l'exposant est moins proche de celui attendu).

	$Ta = 10^8$	$Ta = 10^9$	$Ta = 10^{10}$	$Ta = 10^{11}$	$Ta = 10^{12}$
$C_m = m_c/Ta^{1/6}$	0.23	0.22	0.19	0.19	0.19
$C_R = R_c/Ta^{2/3}$	1.11	0.86	0.69	0.59	0.51
$C_\omega = -\omega_c/Ta^{1/3}$	0.21	0.24	0.25	0.27	0.28

Comme le prévoit l'étude en perturbation, l'instabilité ne se concentre pas autour d'un cylindre critique de rayon s_c caractéristique de la solution, comme

18. Une étude non-linéaire sera nécessaire déterminer si leur comportement est semblable loin du seuil.

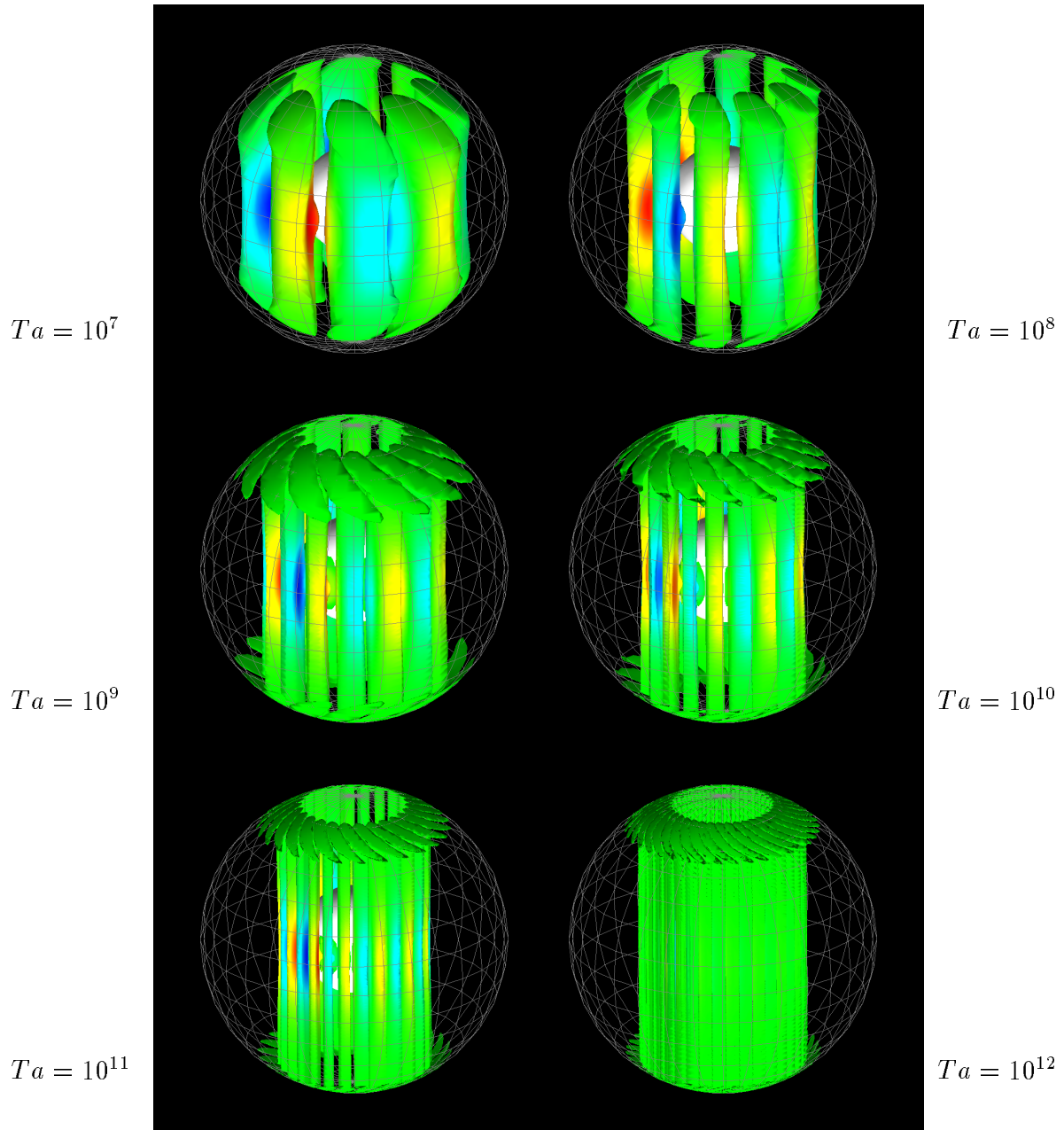


FIG. 4.21 – Surfaces d'isovaleurs de la composante axiale de la vorticité en chauffage \triangle .

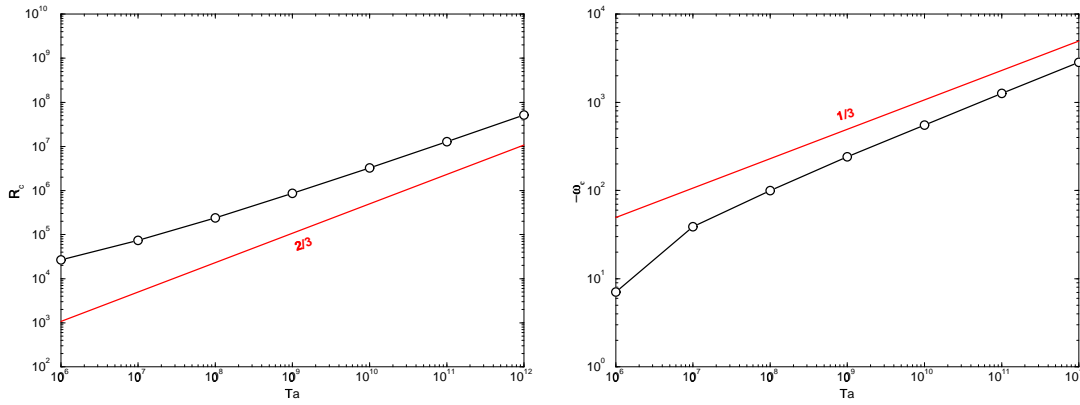


FIG. 4.22 – Même représentation que pour la figure 4.15, mais en chauffage $\underline{\Delta}$. Les variations du nombre de Rayleigh critique, et de la pulsation au seuil, semblent à nouveau s'approcher des lois asymptotiques de Busse (1970).

cela était le cas précédemment, mais elle s'approche du cylindre tangent à la sphère interne. Pour cette raison les structure radiales diffèrent beaucoup du cas précédent (voir figures 4.23 et 4.24).

La structure radiale est, dans ce cas encore, plus large qu'une fonction de Bessel (voir figure 4.25). La dérivée verticale de u_z met également en évidence une couche limite qui se développe près de l'équateur de la sphère interne, et est absente du cas précédent.

Le troisième et dernier mode de chauffage que nous étudions est le **chauffage différentiel avec flux de chaleur fixé à la sphère externe**. Bien que ce soit le mode de chauffage que nous avons choisi pour modéliser la convection dans le noyau terrestre, nous avons dû nous restreindre à des nombres de Taylor moins élevés. Ce mode de chauffage est en effet le plus difficile de ceux que nous avons étudiés à résoudre numériquement. Le critère de stabilité numérique y est plus restrictif encore que celui du chauffage $\underline{\Delta}$.

Nous obtenons les paramètres suivants

Ta	m_c	R_c	ω_c	$\mathcal{E}(R_c)$	$\mathcal{E}(\omega_c)$
10^3	2	$3.915 \cdot 10^4$	1.40		
10^4	2	$4.838 \cdot 10^4$	3.56	0.097	0.405
10^5	2	$8.644 \cdot 10^3$	3.10	-0.748	-0.060
10^6	2	$1.818 \cdot 10^4$	-3.50	0.323	0.052
10^7	1	$5.621 \cdot 10^4$	-3.85	0.490	0.041
10^8	5	$2.394 \cdot 10^5$	-97.96	0.629	1.405
10^9	7	$8.5998 \cdot 10^5$	-239.99	0.555	0.389
10^{10}	9	$3.2437 \cdot 10^6$	-549.95	0.576	0.360
10^{11}	13	$1.2731 \cdot 10^7$	-1261.5	0.594	0.360

On note que pour les nombres de Taylor élevés cette solution présente les mêmes

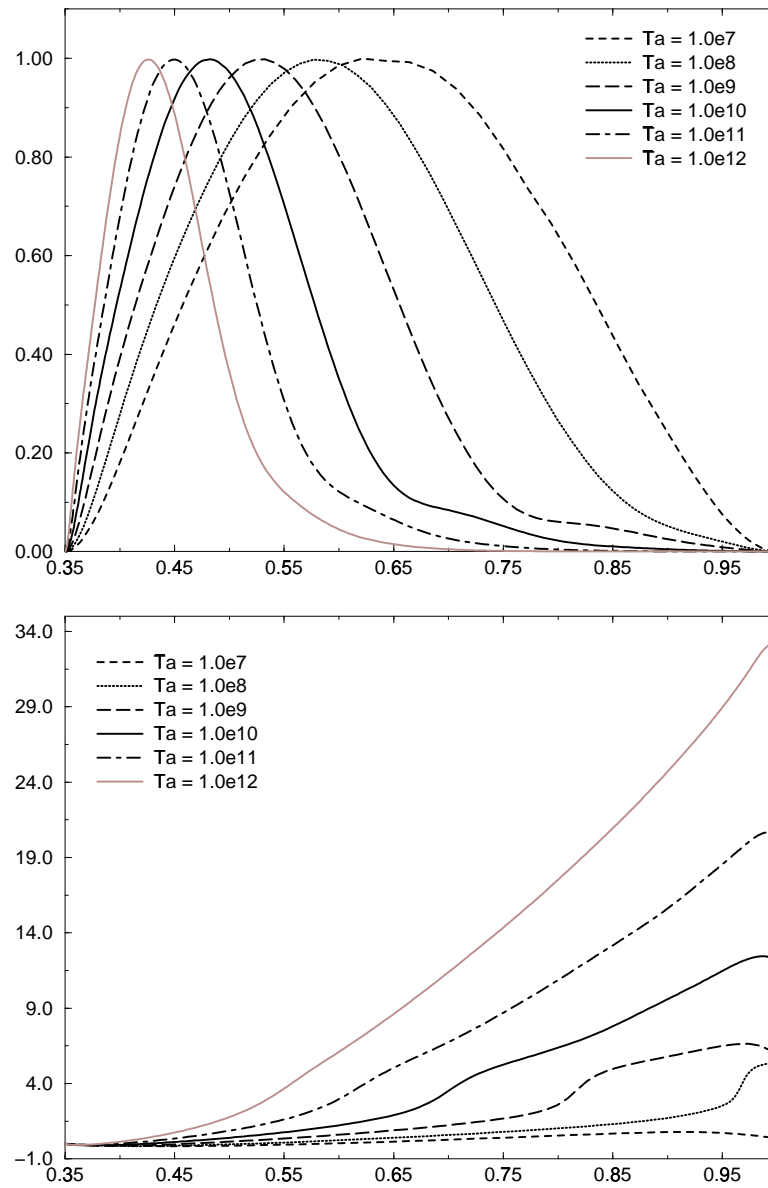


FIG. 4.23 – Structure radiale de la solution en chauffage différentiel, en fonction du nombre de Taylor, et pour $Pr = 1$. Le premier graphe représente l'amplitude, et le second la phase.

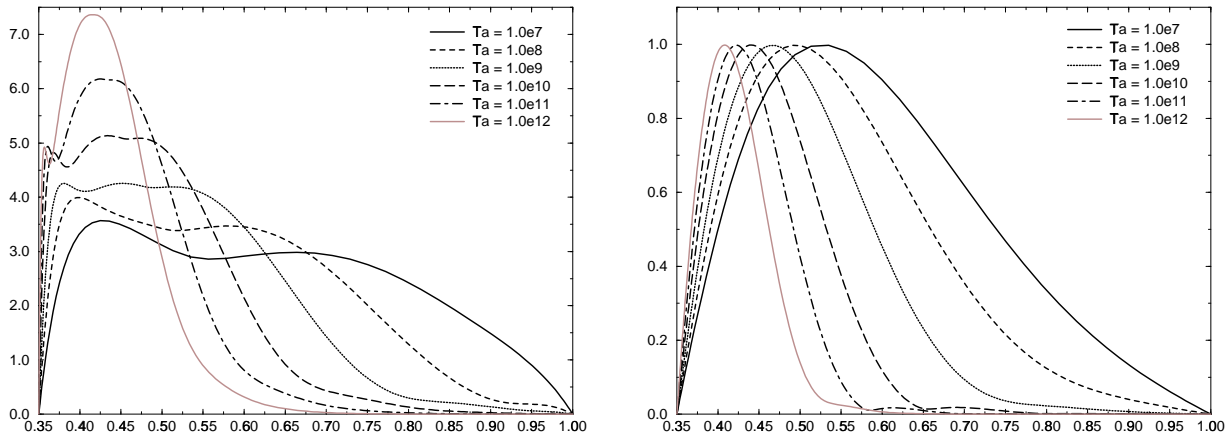


FIG. 4.24 – Structure radiale de la solution en vitesse S_1 à gauche et en température S_2 à droite, en chauffage différentiel.

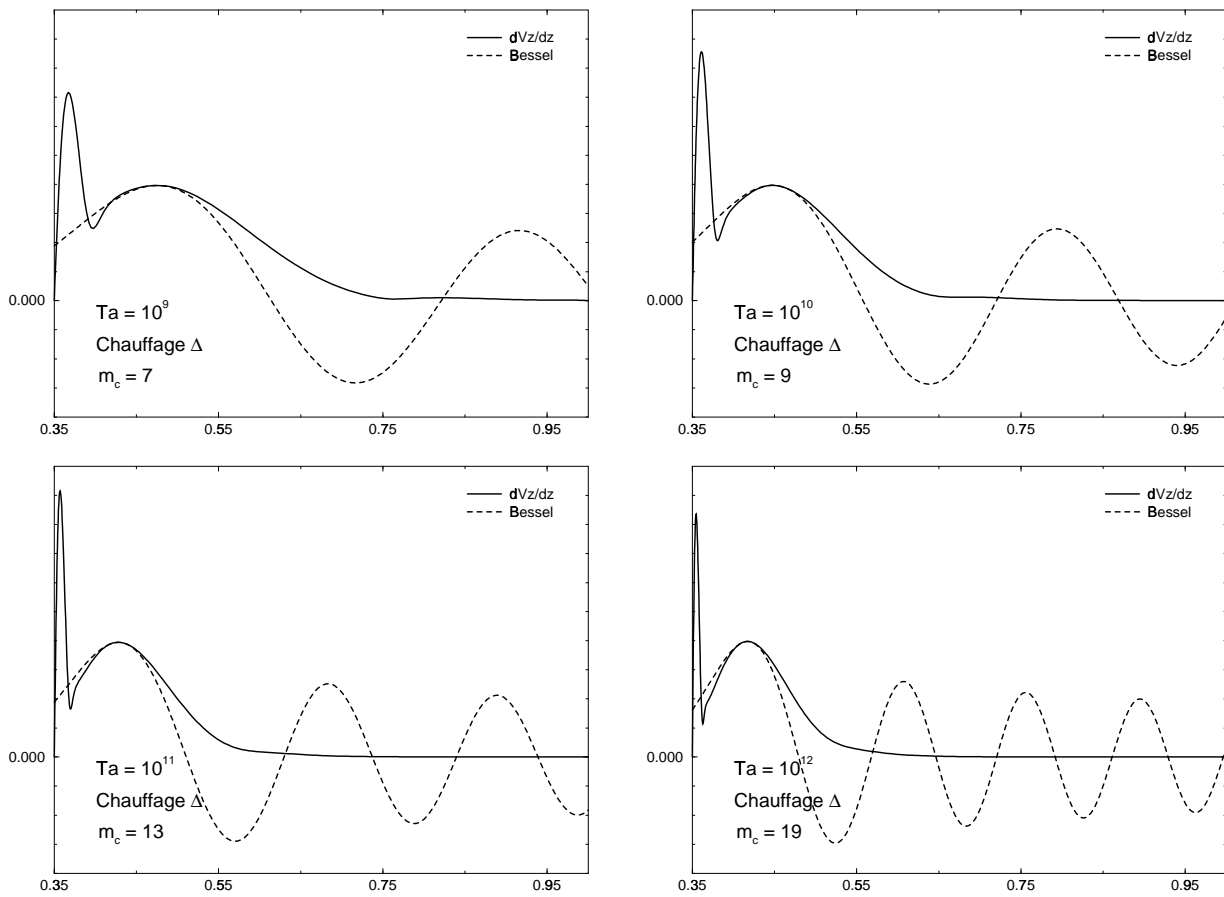


FIG. 4.25 – Comparaison avec les fonctions de Bessel cylindriques dans le cas du chauffage différentiel (Δ).

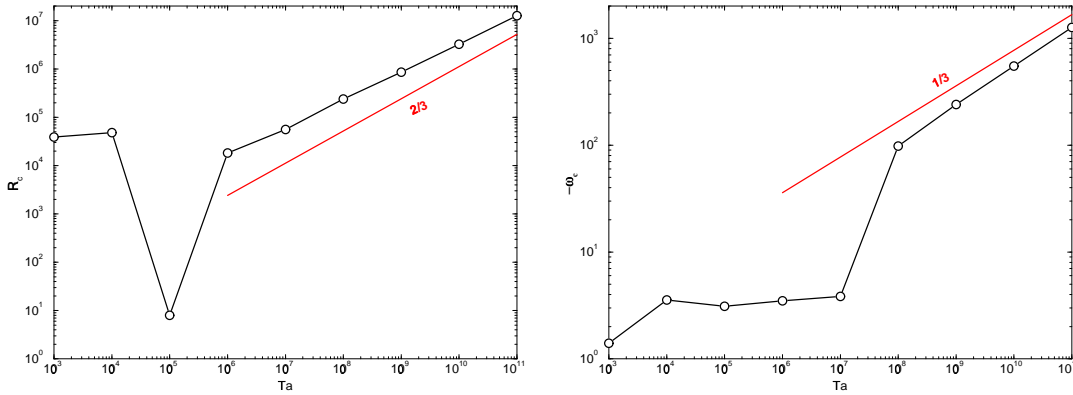


FIG. 4.26 – Comme sur les graphes 4.15 et 4.22, les variations du nombre de Rayleigh critique, et de la pulsation au seuil pour le chauffage Φ , semblent s'approcher des lois asymptotiques de Busse (1970). Cela n'a rien d'étonnant, puisque le seuil pour cette instabilité s'approche du seuil de $\underline{\Delta}$.

paramètres critiques que celle obtenue avec le chauffage $\underline{\Delta}$. Les exposants suivent donc naturellement les mêmes lois asymptotiques (voir également figure 4.26).

Nous avons également étudié des nombres de Taylor peu élevés (jusqu'à 10^3) pour ce chauffage. Un comportement très différent de celui des autres modes de chauffage est observé pour les nombres de Taylor intermédiaires. Pour $Ta \in [10^3, 10^5]$ la pulsation de la solution est positive, caractérisant un mode d'instabilité différent de celui des grands nombres de Taylor. Au delà de $Ta = 10^6$, la pulsation devient négative, et les exposants se rapprochent de manière régulière des valeurs attendues.

Notons que pour $Ta = 10^7$ le mode $m = 1$ est critique (ce qui correspond à deux rouleaux contra-rotatifs). C'est une caractéristique connue (dans le cas plan sans rotation) des chauffages à flux thermiques fixés que de sélectionner des longueurs d'ondes supérieures à la dimension minimale du système. Hurle et collaborateurs (1967) ont montré dans ce cas que le mode critique tend vers zéro si la conductivité du fluide devient infiniment grande devant celle du conteneur.

Un effet comparable est rapporté par Carrigan et Busse (1983), qui observent de grandes longueurs d'ondes (sans aller jusqu'à $m = 1$) dans leurs expériences de convection. Ils expliquent ce fait par la faible conductivité thermique du Plexiglas (par rapport au liquide).

La rotation rapide du système apporte, une fois encore, un attrait nouveau. Alors que cette géométrie de grande échelle est autorisée lorsque les effets de la rotation ne sont pas trop importants (petits nombres de Taylor), elle s'oppose au théorème de Proudman-Taylor lorsque la rotation devient assez importante pour contraindre l'écoulement, et l'on retrouve dans la limite des grands nombres de Taylor des modes similaires à ceux obtenus en chauffage différentiel.

Ces mouvements de très grande échelle à faible nombre de Taylor rappellent

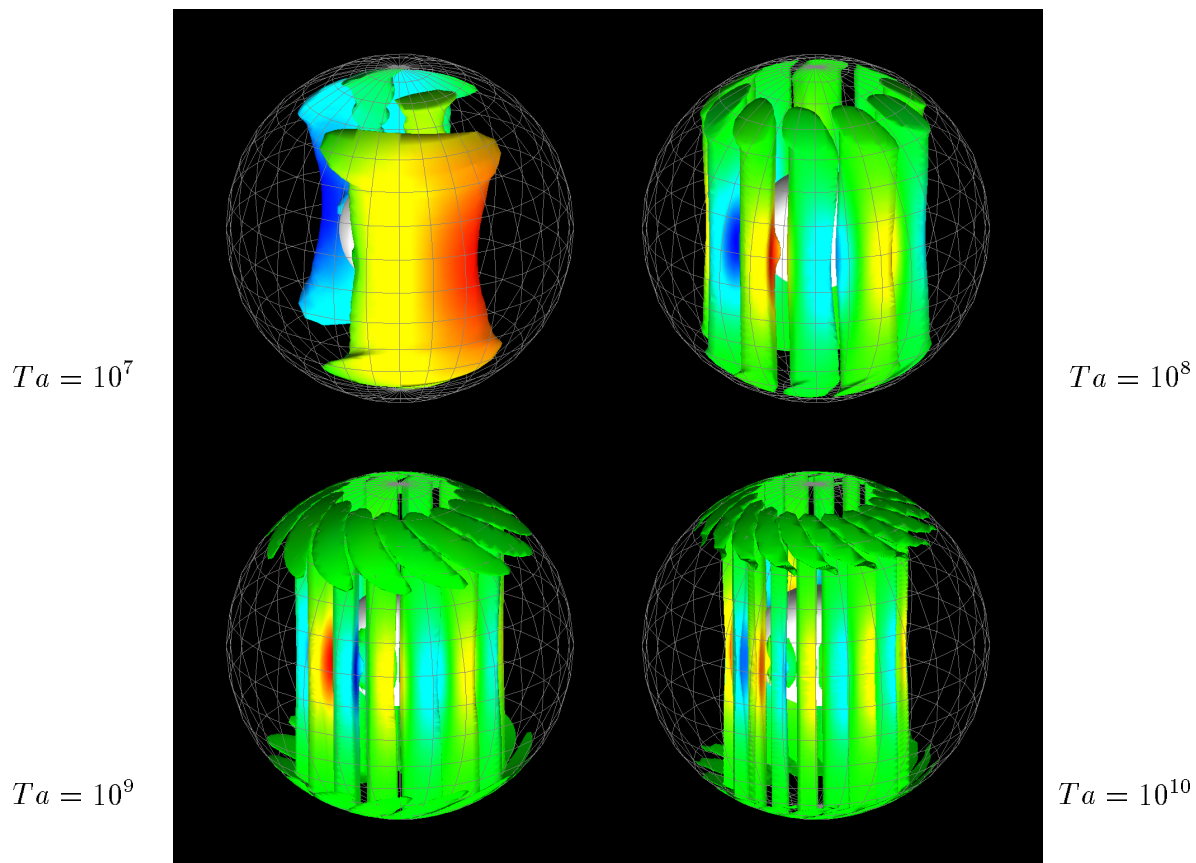


FIG. 4.27 – Surfaces d’isovaleurs de la composante axiale de la vorticité en chauffage $\underline{\Phi}$.

ceux obtenus par inversion de la variation séculaire du champ (voir introduction figure 0.10). Cette ressemblance est sans doute fortuite puisque les mouvements deviennent de plus petite échelle lorsque le nombre de Taylor augmente. On ne peut exclure cependant que cette tendance du système à “sélectionner” des grandes longueurs d’ondes apparaisse à nouveau lorsque l’équilibre géostrophique sera modifié par l’apparition d’autres forces (par exemples magnétiques).

L’étude de la structure radiale de la solution en température (figure 4.28) met bien en évidence l’effet de la rotation rapide sur la solution. Une comparaison de la structure radiale de la solution pour un nombre de Taylor de $Ta = 1.0 \cdot 10^9$ avec celle obtenue en chauffage $\underline{\Delta}$ montre que bien que très proches, les solutions sont différentes, essentiellement près de la sphère externe (figure 4.30).

Notons avant de clore cette section consacrée à la convection linéarisée qu’il serait intéressant d’étudier l’effet d’un flux de chaleur imposé à la graine avec une température imposée au manteau. Ce mode de chauffage est en effet utilisé pour tenter de rendre compte de la convection solutale (e.g. Glatzmaier et Roberts, 1995). Nous reportons cette étude à un travail ultérieur.

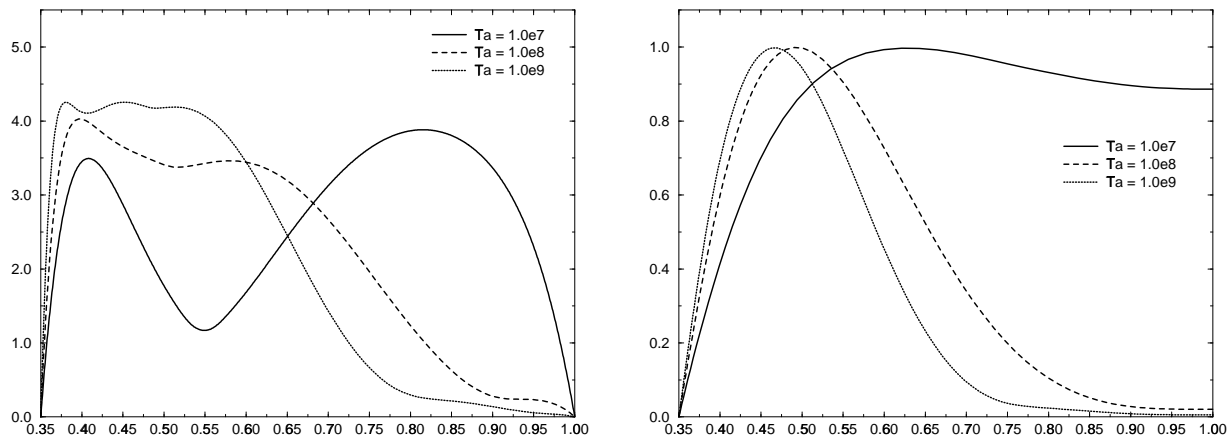


FIG. 4.28 – Structure radiale de la solution en vitesse (S_1) et en température (S_2), chauffage avec flux fixé.

Soulignons enfin que nos résultats numériques semblent en accord avec les observations expérimentales quant au mode critique. Ce résultat est important, car il suggère que le seuil réalisé numériquement, s'il diffère du seuil décrit asymptotiquement, correspond bien au mode d'instabilité dans une coquille sphérique en rotation rapide.

L'étude de la convection au seuil que nous avons menée indique donc que les résultats numériques sont en accord avec les observations expérimentales.

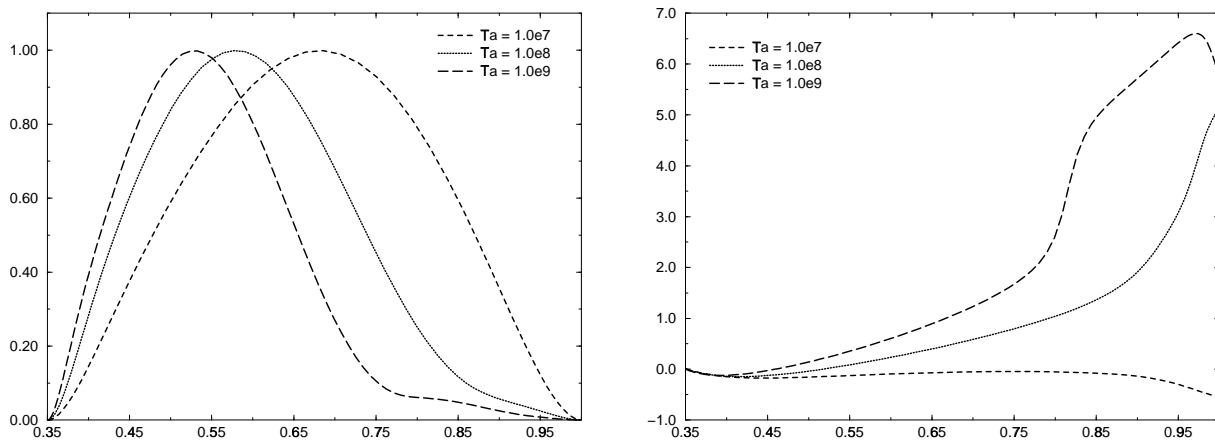


FIG. 4.29 – L'amplitude $A(r)$ de la solution est représentée à gauche, et sa phase $\phi_0(r)$ à droite, pour le mode de chauffage avec flux fixé.

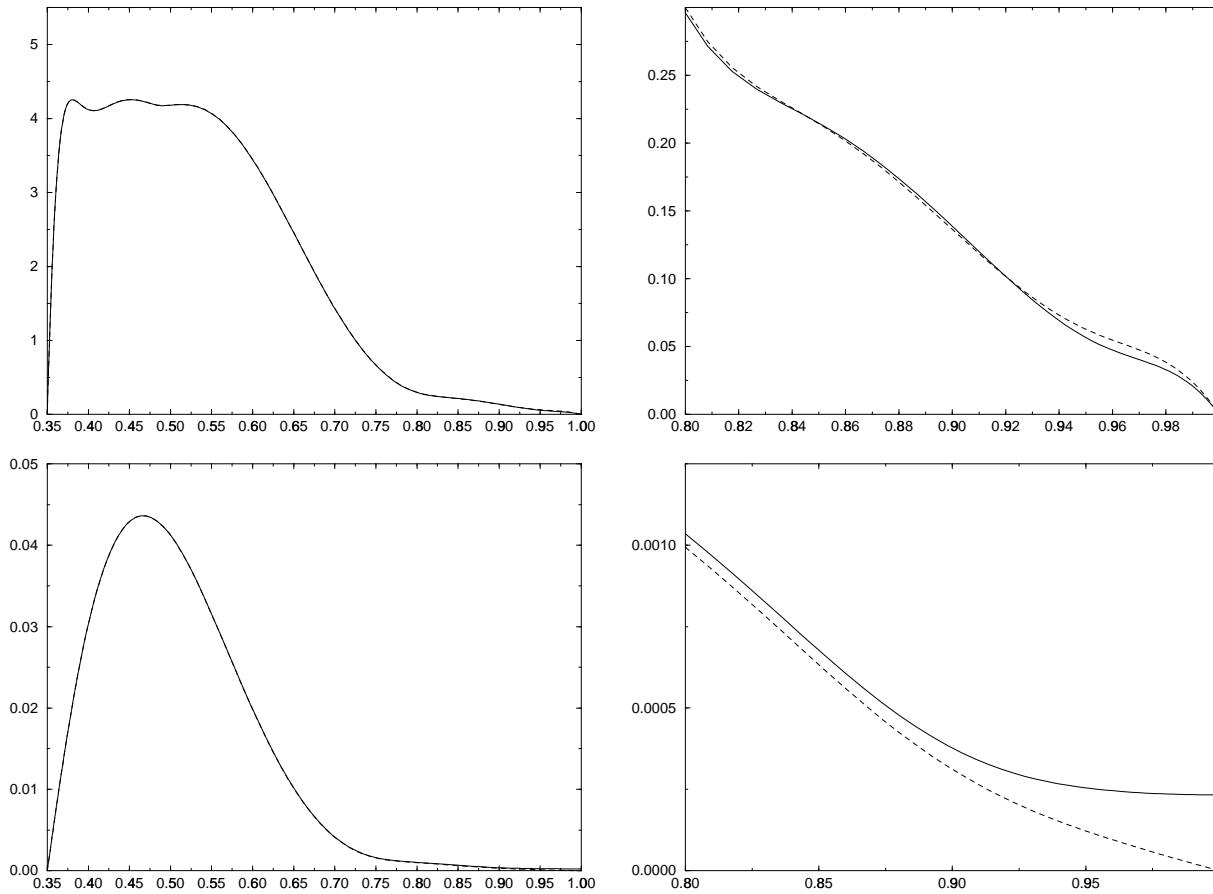


FIG. 4.30 – *Comparaison des structures des solutions en chauffage avec flux fixé (en traits continus) et en chauffage différentiel (en pointillés) à $Ta = 1.0 \cdot 10^9$. En haut en vitesse S_1 , en bas en température S_2 . A gauche sur l'ensemble de la coquille : les solutions sont quasi identiques. A droite un agrandissement de la frontière externe : les conditions aux limites thermiques, bien que contrariées par la contrainte de Proudman-Taylor modifient encore la solution.*

4.5 Convection d'amplitude finie

Nous avons décrit dans la section précédente l'instabilité convective. Telle qu'elle a été introduite, elle correspond à un mode dont le taux de croissance devient positif. Une croissance exponentielle lors d'un phénomène physique ne saurait aller sans un mécanisme de saturation. C'est à travers les interactions non-linéaires ($\underline{\vec{u}}\nabla\underline{\vec{u}}$ et $\underline{\vec{u}}\nabla\Theta$) que la saturation de la convection intervient.

Considérons une fois de plus, à titre d'exemple, le cas de la convection Rayleigh-Bénard entre deux plans. On peut déterminer linéairement la valeur du seuil de convection (Rayleigh critique) et la géométrie de la convection naissante. Pour déterminer l'amplitude de la convection correspondant à une valeur donnée du paramètre de contrôle, il est toutefois nécessaire d'introduire les non-linéarités. Tant que le nombre de Rayleigh est proche de la valeur critique, les termes non-linéaires modifient peu la géométrie de la solution. Ils en saturent l'énergie, et si l'on fait tendre le paramètre de contrôle vers sa valeur critique, cette énergie tend continûment vers zéro. Il s'agit d'une bifurcation sur-critique. Il existe cependant des systèmes dynamiques pour lesquels la décroissance du paramètre de contrôle jusqu'à sa valeur critique n'entraîne pas l'annulation de l'énergie. Il arrive que les effets non-linéaires permettent alors de décroître le paramètre de contrôle en dessous de sa valeur critique tout en conservant une solution d'amplitude non-nulle (bifurcation sous-critique). Le rôle des non-linéarités est alors bien plus qu'une simple saturation. Quelque soit le mode d'instabilité, lorsque l'on éloigne suffisamment le nombre de Rayleigh de sa valeur critique, les non-linéarités modifient la solution qui devient turbulente (le système dynamique correspondant est alors chaotique). Pour cette première étude, nous nous sommes intéressés à l'étude de la bifurcation, et n'avons pas étudié le régime turbulent.

Etudes analytiques

Dans la deuxième partie de son article de 1977, Andrew Soward introduit les non-linéarités près du seuil. Il montre que la structure radiale en $Ta^{-1/9}$ est alors stabilisée par les effets non-linéaires à l'intérieur d'une couche en $Ta^{-1/18}$ sous la forme d'un soliton (i.e. un phénomène ondulatoire qui reste concentré en espace). Il démontre que pour $R/R_c = 1 + \mathcal{O}(Ta^{-1/9})$ les conditions sont favorables à la convection.

Le travail analytique de Soward suggère donc que dans la limite des très grands nombres de Taylor (des effets en $Ta^{1/18}$ sont considérés petits dans cette étude) la bifurcation est sous-critique. En effet, le seuil linéaire est supérieur à celui défini par l'étude asymptotique (voir section précédente) mais la convection d'amplitude finie existe près de ce seuil (aussi près que l'on veut, en faisant tendre Ta vers l'infini).

Résultats numériques

Notre étude non-linéaire est encore incomplète. Nous nous concentrons, une fois de plus, sur la limite des grands nombres de Taylor.

Les premières interactions non-linéaires couplent les modes multiples du mode critique. L'énergie du mode $m = 0$ est alors non-nulle. En convection linéaire l'énergie du mode $m = 0$ est nulle, et par conséquent le couple visqueux sur la graine l'est aussi. En toute rigueur, en convection non-linéaire un couple visqueux non-nul s'applique à la graine, et celle-ci peut donc tourner. Dans le but de simplifier notre étude, nous avons maintenu la graine en co-rotation avec le manteau.

On ne considère dans un premier temps que le sous-espace formé des harmoniques du mode critique

$$(4.61) \quad m_i = i m_c \quad 1 \leq i \leq m_{max}.$$

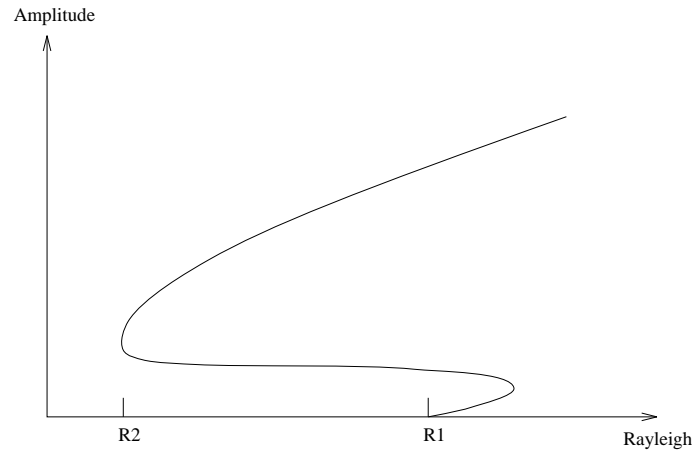
Cela est une bonne approximation tant que d'autres modes que m_c ne deviennent pas critiques¹⁹.

Numériquement cela permet de réduire sensiblement la mémoire utilisée ainsi que le coût du calcul non-linéaire en utilisant un espace physique modifié ($m' = m/m_c$).

Une première étude de ce problème a été menée par Zhang (dans l'article déjà cité de 1992). La méthode utilisée pour traiter les non-linéarités dans cet article (Galerkin), introduisant des intégrales de couplages, ne permet pas d'étudier le régime fortement non-linéaire (le nombre d'intégrales à calculer croissant rapidement avec le degré de non-linéarité). Zhang étudie divers nombres de Prandtl et montre que le démarrage de la convection est sur-critique.

Cette observation sera reprise par Proctor (1994). Pour réconcilier les observations numériques avec la description analytique, il propose le diagramme de bifurcation suivant :

19. Notons que l'étude linéaire de la section précédente ne nous apprend rien sur le domaine de validité de cette simplification. Cela pour deux raisons : il faudrait effectuer une étude de stabilité par rapport à un nouvel état de base (celui fixé par le mode critique) ; les interactions non-linéaires avec le mode $m = 0$ peuvent tendre à déstabiliser un mode encore stable linéairement.



L'étude numérique étant menée près de la valeur critique du nombre de Rayleigh, seule la branche sur-critique de ce diagramme aurait pu être décrite numériquement.

Comme précédemment, nous commencerons par l'étude du chauffage uniforme (β). Notre approche (par collocation) permettant d'augmenter le degré de non-linéarité à moindre coût, nous avons étudié pour un nombre de Taylor de 10^8 si un tel comportement peut être observé numériquement. Nous avons étudié des valeurs de R_c allant jusqu'à $10.0 \times R_c$, sans observer ce type de comportement (voir figure 4.31).

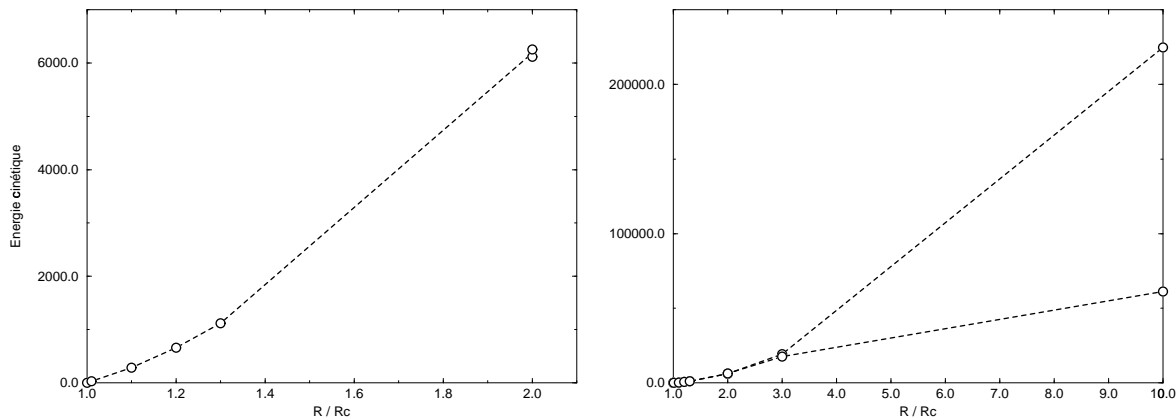


FIG. 4.31 – Diagramme de bifurcation jusqu'à des nombres de Rayleigh deux fois critiques (à gauche), puis jusqu'à dix fois critique (à droite) pour $Ta = 10^8$, $Pr = 1.0$ et en chauffage uniforme.

Lorsque le nombre de Rayleigh atteint deux fois sa valeur critique, l'énergie ne se stabilise plus en temps mais adopte un profil oscillant. Un tel comportement a également été observé expérimentalement (Cordero et Busse, 1992) et numériquement (Zhang, 1992), il correspond aux modifications de la solution par les

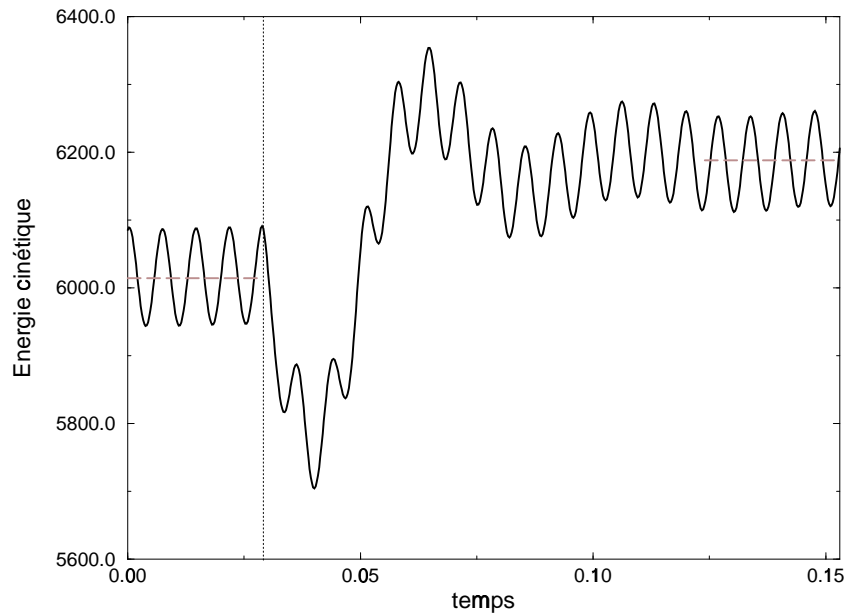


FIG. 4.32 – Evolution temporelle de l'énergie cinétique de la convection pour $Ta = 10^8$ pour un nombre de Rayleigh deux fois critique en chauffage uniforme. Dans un premier temps on ne conservant que les multiples du mode critique, puis (trait vertical pointillé) en introduisant les autres modes. L'énergie moyenne de la solution n'est modifiée que d'environ 3% .

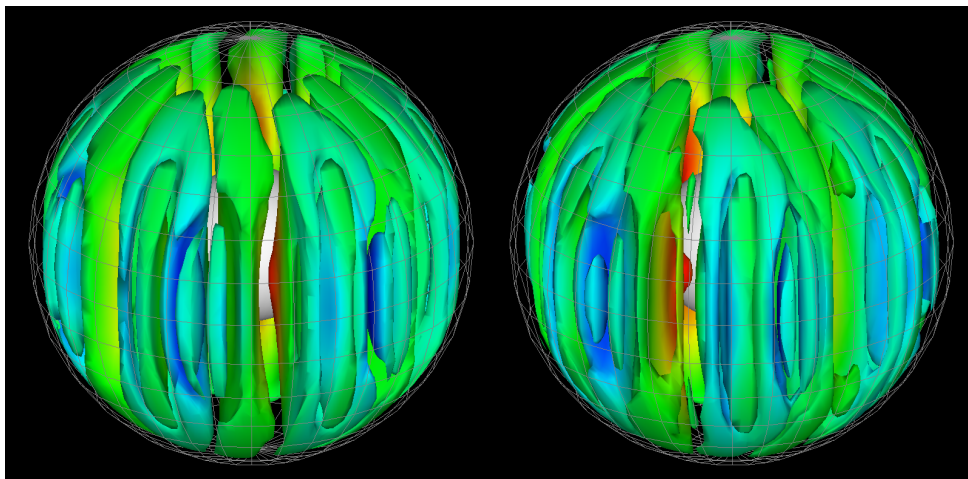


FIG. 4.33 – Convection en chauffage uniforme pour $Ta = 10^8$ pour un nombre de Rayleigh deux fois critique. On représente une isovaleur de la composante axiale de la vorticité (hors couches limites) est représentée à gauche en maintenant la solution artificiellement périodique en ne conservant que les multiples du mode critique, à droite en levant cette contrainte. Le code de couleur correspond à l'anomalie de température.

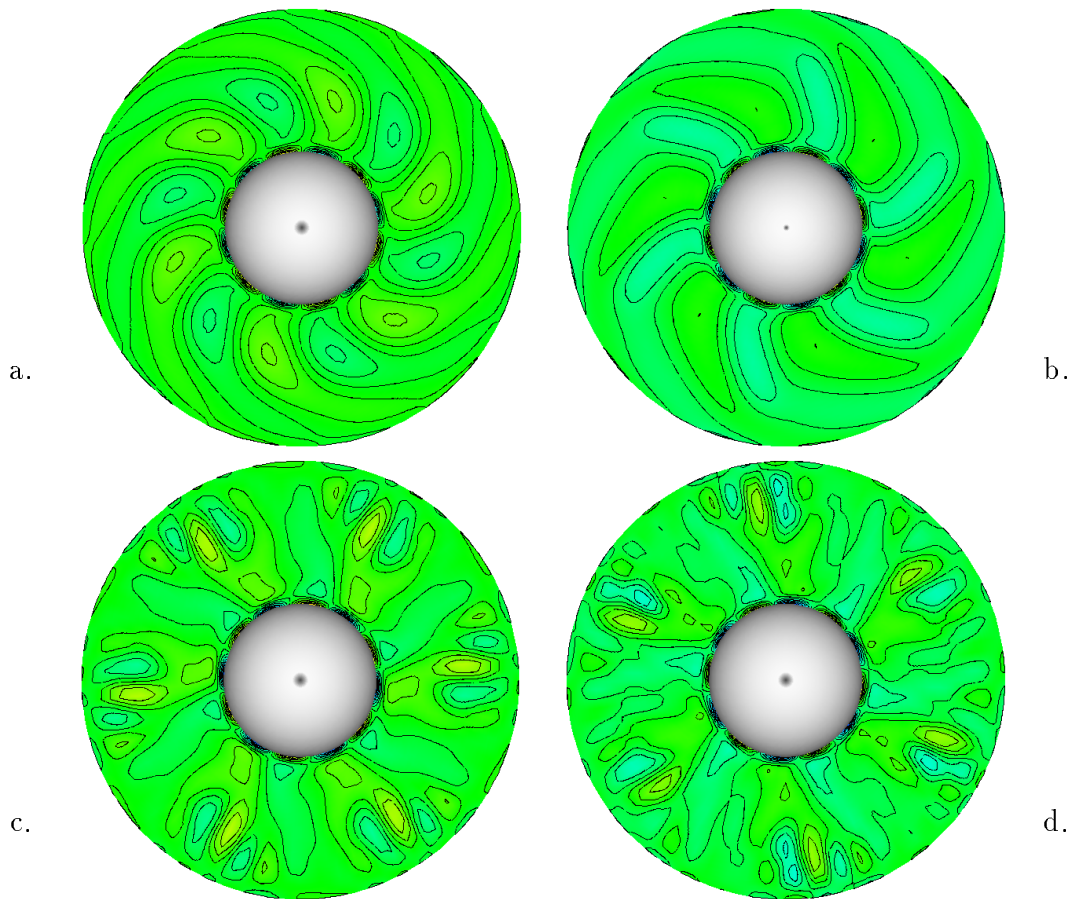


FIG. 4.34 – Convection en chauffage uniforme pour $Ta = 10^8$, coupes équatoriales de la composante axiale de la vorticité, au seuil (a), pour $R = 1.3 \times R_c$ (b) et pour $R = 2.0 \times R_c$ en maintenant la solution artificiellement périodique (c) et en levant cette contrainte (d).

termes non-linéaires qui précédent l'apparition de la turbulence. Nous pensons donc que le diagramme proposé par Proctor n'est pas réalisé pour $Ta = 10^8$.

Nous avons vérifié que notre approche consistant à ne modéliser que les modes multiples du mode critique est fondée. Pour cela, nous avons introduit l'ensemble des modes inférieurs au degré de troncature, et observé les modifications qu'ils apportent sur la solution pour un nombre de Rayleigh deux fois critique. L'énergie moyenne de la solution n'est modifiée que d'environ 3% (voir figure 4.32), et la structure de la solution ne devient que faiblement apériodique (voir figures 4.33 et 4.34). Notons également que la solution obtenue est faiblement antisymétrique, comme le montrent les lignes courants représentées figure 4.35 (  comparer à celles de la figure 4.14).

Lorsque le nombre de Rayleigh est deux fois critique, la pulsation du mode

critique se met également à osciller, nous avons représenté figure 4.37 la variation de la pulsation du mode dominant avec le nombre de Rayleigh, celle-ci atteint à peine 20% lorsque la pulsation se met à osciller. Nous confirmons donc l'hypothèse faite par Cordero et Busse de faible variation de la pulsation avec le nombre de Rayleigh. Ils l'utilisent pour déterminer expérimentalement la vitesse de phase ω de la convection au seuil. Gênés en cela par le vent thermique, ils font l'hypothèse que ω varie peu avec le nombre de Rayleigh, pour éliminer l'effet du vent thermique qui varie avec ce paramètre. Une erreur de 20% sur leur courbe ne modifierait que peu leur solution.

Nous avons effectué une simulation utilisant leurs paramètres ($\eta = 0.56$, $Ta = 8.91 \cdot 10^6$, $Pr = 6.19$). Nous obtenons les paramètres critiques suivants

$$R_c = 2.22 \cdot 10^5 ,$$

$$m_c = 8 ,$$

$$-\omega_c/\Omega = 1.8 \cdot 10^{-3} ,$$

(nous donnons $-\omega_c/\Omega$ pour permettre une comparaison avec leur étude). Leur diagramme permet de déterminer que la pulsation expérimentale est proche de $2.6 \cdot 10^{-3}$ (voir leur figure 4). L'accord entre les observations et les simulations est donc raisonnable. Nous précisons la comparaison en entreprenant des calculs non-linéaires pour le jeu de paramètres ci-dessus. Nous obtiendrons ainsi la loi de variation de la pulsation avec le nombre de Rayleigh. Nous pourrions alors reprendre la méthode proposée par Cordero et Busse pour calculer plus précisément le facteur correctif dû au vent thermique. Si la variation de la pulsation s'aurait similaire à celle que nous avons obtenue ici, la valeur expérimentale de la pulsation serait plutôt $2.2 \cdot 10^{-3}$ au lieu de $2.6 \cdot 10^{-3}$.

Une autre comparaison avec les études expérimentale peut être celle du flux de chaleur transporté par la convection. Cardin et al. (1994) ont observé que le transport d'un scalaire passif (de la fluoresceine) par la convection développée (jusqu'à cinquante fois critique) dans une sphère en rotation rapide s'effectue essentiellement dans le plan équatorial. En est-il de même de la perturbation de température? Nous observons, figure 4.36, que si le flux de chaleur radial à la sphère externe est essentiellement concentré aux extrémités des rouleaux près du seuil, celui-ci se rapproche de l'équateur lorsque le nombre de Rayleigh augmente.

Guidé par nos observations précédentes (Chapitre III, et première partie de ce Chapitre), nous proposons que le désaccord entre la théorie et les observations numériques puisse résider en l'usage de nombres de Taylor trop petits. Nous avons donc étudié (sur un domaine plus proche du seuil) l'effet du nombre de Taylor sur le diagramme de bifurcation. Notre étude présentée figure 4.38 est malheureusement incomplète. On observe que l'énergie de la solution pour une surcriticité donnée croît avec le nombre de Taylor. Le diagramme de bifurcation se redresse, et pourrait donc éventuellement devenir sous-critique pour les grandes

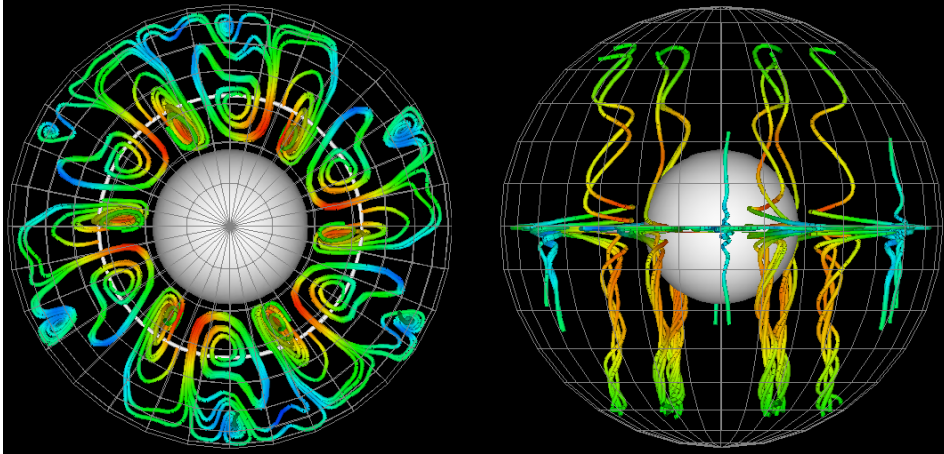


FIG. 4.35 – Lignes de courants pour convection en chauffage uniforme à un nombre de Taylor de 10^8 pour un nombre de Rayleigh deux fois critique (voir la figure 4.14 pour comparaisons). La solution n'est plus tout à fait périodique, et la composante non-axisymétrique est suffisante pour que des lignes de courant franchissent l'équateur.

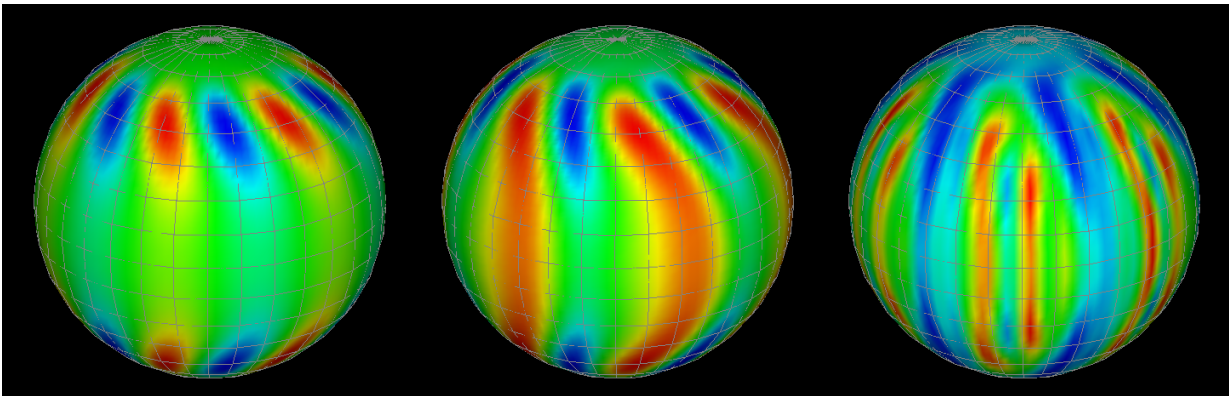


FIG. 4.36 – Flux de chaleur radial transporté par la convection, en chauffage uniforme et à un nombre de Taylor de 10^8 , pour des nombres de Rayleigh (de gauche à droite) R_c , $1,3 \times R_c$ et $2,0 \times R_c$. Celui-ci se rapproche de l'équateur lorsque le nombre de Rayleigh augmente.

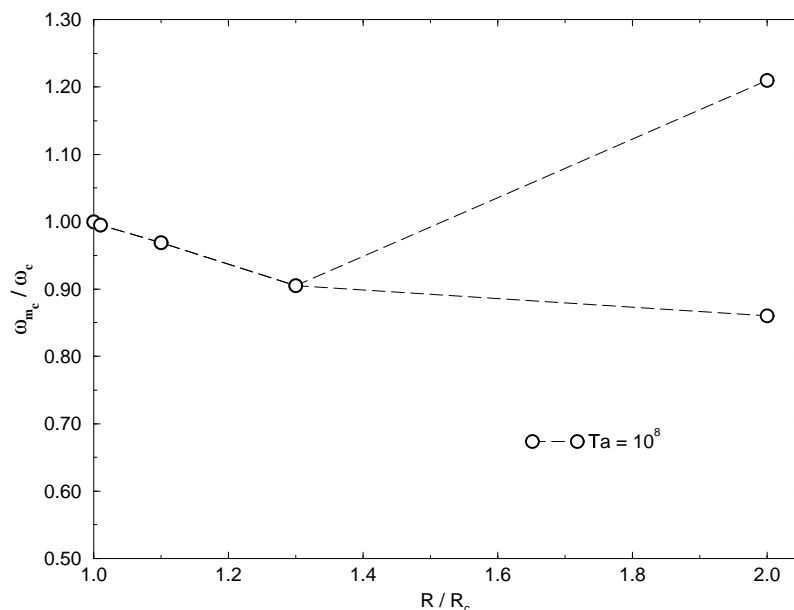


FIG. 4.37 – Evolution de la pulsation en fonction du nombre de Rayleigh. Les points correspondent aux simulations, les lignes pointillées ne sont qu’indicatives. La pulsation pour $R = 2 \times R_c$ oscille entre les deux valeurs reportées.

valeurs du nombre de Taylor. La courbe la plus intéressante ($Ta = 10^{10}$) n’est malheureusement pas assez convergée en temps pour permettre une interprétation définitive. Cette courbe, mieux convergée, ainsi que la courbe pour $Ta = 10^{11}$ seront présentés dans un travail ultérieur.

L’étude de la structure radiale de la solution non-linéaire laisse également penser que les termes non-linéaires commencent à modifier la solution dans le sens de l’étude de Soward. On observe ainsi (figure 4.39) que si l’effet des premières non-linéarités pour un nombre de Taylor de 10^8 est plutôt d’éloigner le centre de la convection de l’axe de rotation, leur effet semble s’inverser et être plus efficace pour un nombre de Taylor de 10^{10} . Les termes non-linéaires rapprochent alors le centre de la convection de la distance à l’axe de 0.5004 correspondant à la solution asymptotique. Ce changement de comportement n’est pas étonnant si l’on considère que le profil de la solution linéaire pour un nombre de Taylor de 10^8 occupe l’ensemble de la section équatoriale, alors qu’il commence à se localiser pour $Ta = 10^{10}$.

Ces observations ne constituent pour l’instant que des indications, mais elles nous encouragent à poursuivre cette étude.

Nous avons commencé une étude comparable pour les deux autres types de chauffage. Elles sont moins avancées car ces chauffages sont plus difficiles à résoudre numériquement. Ces résultats sont présentés figure 4.40. Les courbes de bifurcation se redressent également pour ces chauffages, notons toutefois que l’énergie pour un nombre de Taylor et un rapport R/R_c donné sature plus tôt pour

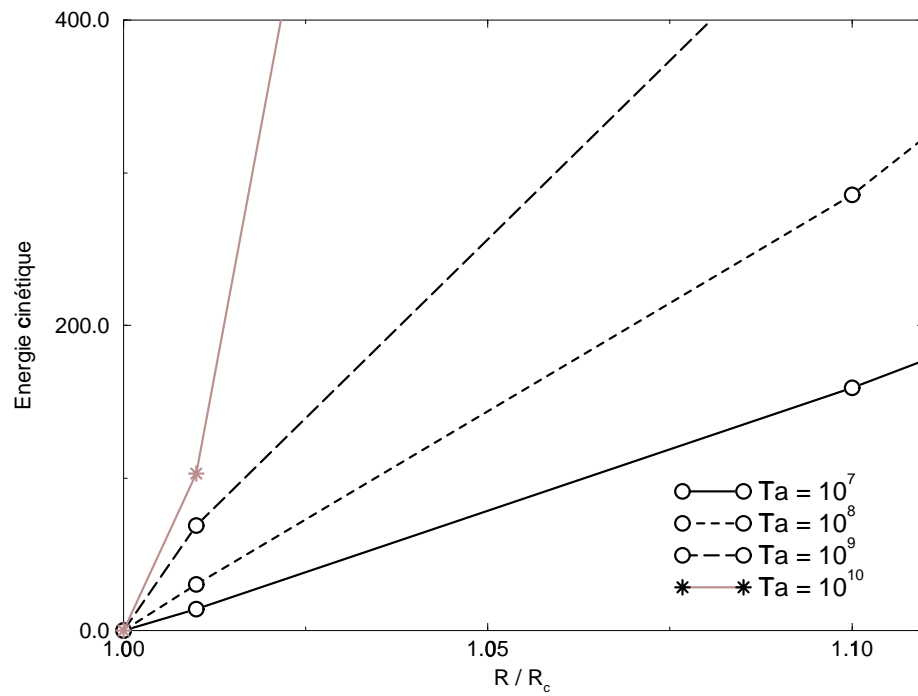


FIG. 4.38 – Diagrammes de bifurcation pour différents nombres de Taylor, en chauffage uniforme. La dernière courbe, représentée en gris, n'est pas encore parfaitement convergée en temps.

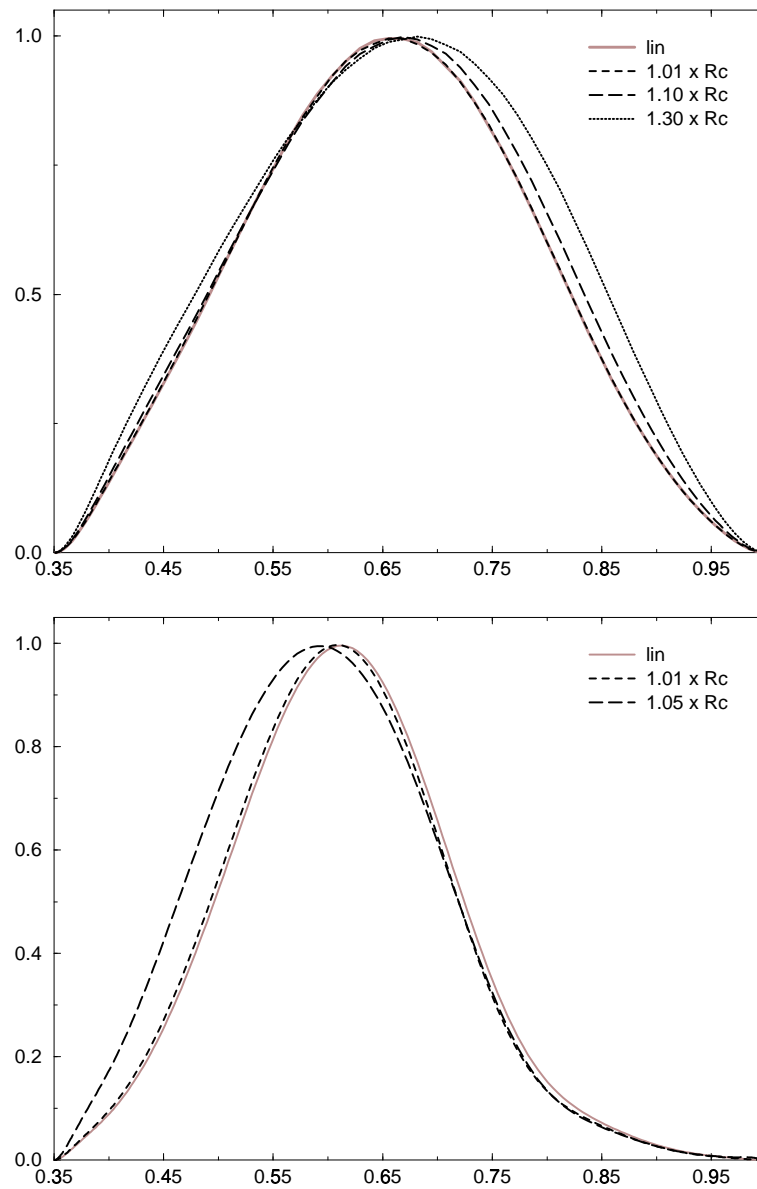


FIG. 4.39 – Calculs non-linéaires en chauffage uniforme. Sur le premier graphe pour $Ta = 10^8$, sur le second pour $Ta = 10^{10}$.

le chauffage $\underline{\Delta}$ que pour le chauffage $\underline{\beta}$, et qu'elle sature encore plus tôt pour le chauffage $\underline{\Phi}$. Ces études ne sont bien entendu pas assez avancées pour pouvoir indiquer si une bifurcation sous-critique peut exister pour ces chauffages.

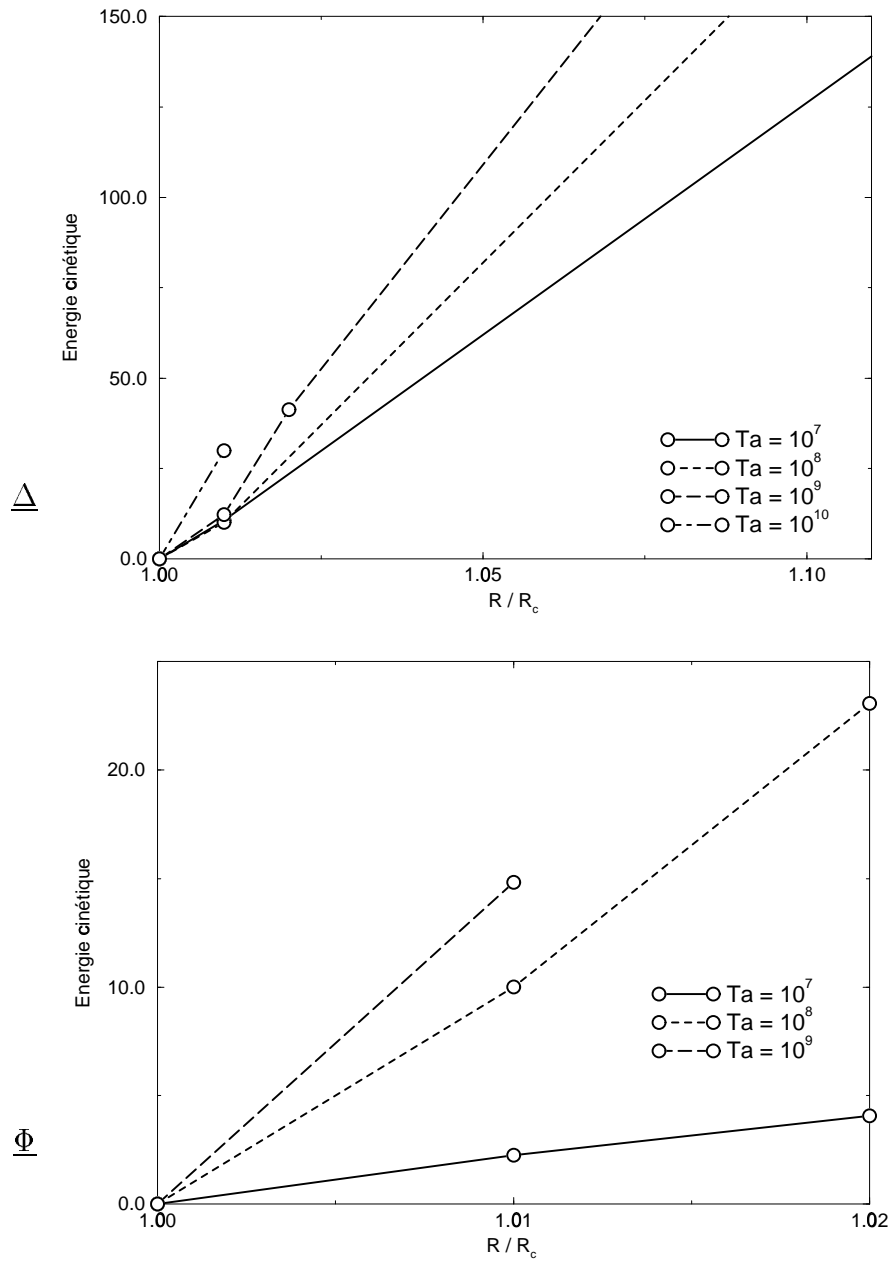


FIG. 4.40 – Diagrammes de bifurcations pour des nombres de Taylor croissants, dans le cas du chauffage $\underline{\Delta}$ en haut et dans le cas du chauffage $\underline{\Phi}$ en bas.

Bibliographie

- M. Ardes, Friedrich Busse et Johannes Wicht, 1997
Thermal Convection in Rotating Spherical Shells
 Physics of the Earth and Planetary Interiors, **99**, p. 55–67.
- Friedrich Busse, 1970
Thermal instabilities in rapidly rotating systems
 Journal of Fluid Mech., **44**, p. 441–460.
- Friedrich Busse, 1975
Thermal instabilities in rapidly rotating systems
 Geophysical J.R. Astr. Soc., **42**, p. 437–459.
- Friedrich Busse, 1982
Thermal convection in rotating systems
 Proceeding of the 9th U.S. Nat. Congr. of Appl. Mechanics
 A.S.M.E., New-York.
- Friedrich Busse, 1994
Convection driven zonal flows and vortices in the major planets
 Chaos, **4**, 2, p. 123–134.
- Philippe Cardin, 1992
*Aspects de la convection dans la terre :
 couplage des manteaux inférieur et supérieur,
 convection thermique du noyau liquide.*
 Thèse Paris VI.
- Philippe Cardin et Peter Olson, 1992
*An experimental approach to thermochemical convection
 in the Earth's core*
 Geophysical Research Letters, **19**, 20, p. 1995–1998.
- Philippe Cardin et Peter Olson, 1994
*Chaotic thermal convection in a rapidly rotating spherical shell:
 conséquences for flow in the outer core*
 Physics of the Earth and Planetary Interiors, **82**, p. 235–259.
- C. Carrigan et Friedrich Busse, 1983
*An experimental and theoretical investigation of the onset
 of convection in rotating spherical shells*
 Journal of Fluid Mechanics, **126**, p. 287–305.

- Sergio Cordero et Friedrich Busse, 1992
Experiments on convection in rotating hemispherical shells: transition to a quasi-periodic state
Geophysical Research Letters, **19**, 8, p. 733–736.
- Sergio Cordero, 1993
Experiments on convection in a rotating hemispherical shell: transition to chaos
Geophysical Research Letters, **20**, 23, p. 2587–2590.
- J. Chamberlain et C. Carrigan, 1986
An Experimental Investigation of Convection in a Rotating Sphere Subject to Time Varying Thermal Boundary Conditions
Geophysical and Astrophysical Fluid Dynamics, **35**, p. 303–327.
- Subrahmanyan Chandrasekhar, 1961
Hydrodynamic and hydromagnetic stability
Oxford, Clarendon Press.
- David Fearn, Paul Roberts, et Andrew Soward, 1986
Convection, stability and the dynamo
Energy stability and convection,
Proceeding of the workshop, Capri 1986,
Longman.
- John Hart, Gary Glatzmaier et Juri Toomre, 1986
Space-laboratory and numerical simulations of thermal convection in a rotating hemispherical shell with radial gravity
Journal of Fluid Mech., **173**, p. 519–544.
- Wolfram Hirsching et Jun-Ichi Yano, 1993
Metamorphosis of marginal thermal convection in rapidly rotating self-gravitating spherical shells
Geophysical and Astrophysical Fluid Dynamics, **74**, p. 143–179.
- D. Hurle, E. Jakeman, et E. Pike, 1967
On the solution of the Bénard problem with boundaries of finite conductivity
Proceedings of the Royal Society of London A, **296**, p. 469–475.
- Jean-Paul Poirier, 1988
Transport properties of liquid metals and viscosity of the Earth's core
Geophys. J., **92**, p. 99–105.
- M. Proctor, 1994
Convection and Magnetoconvection in a Rapidly Rotating Sphere

dans *Lectures on Solar and Planetary Dynamos*
(M. Proctor et A. Gilbert)
Publications of the Newton Institute
Cambridge University Press.

Paul **Roberts**, 1965

On the thermal instability of a highly rotating fluid sphere
The Astrophysical Journal, **141**, 1, p. 240–250.

Paul **Roberts**, 1968

On the thermal instability of a rotating-fluid sphere containing heat sources
Philosophical Transactions A, **263**, p. 93–117.

Andrew **Soward**, 1977

*On the finite amplitude thermal instability
of a rapidly rotating fluid sphere*
Geophysical and Astrophysical Fluid Dynamics, **9**, p. 19–74.

Jun-Ichi **Yano**, 1992

Asymptotic theory of thermal convection in rapidly rotating systems
Journal of Fluid Mechanics, **243**, p. 103–131.

Keke **Zhang** et Friedrich Busse, 1988

*Finite amplitude convection and magnetic field generation
in a rotating spherical shell*
Geophysical and Astrophysical Fluid Dynamics, **44**, p. 33–53.

Keke **Zhang**, 1992

*Spiralling columnar convection in rapidly rotating
spherical fluid shells*
Journal of Fluid Mechanics, **236**, p. 535–556.

Keke **Zhang** et Chris Jones, 1992

*The influence of Ekman boundary layers on rotating convection
spherical fluid shells*
Geophysical and Astrophysical Fluid Dynamics, **71**, p. 145–162.

Keke **Zhang**, 1993

On equatorially trapped boundary inertial waves
Journal of Fluid Mechanics, **248**, p. 203–217.

Summary

The main conclusion to be drawn from this work may be that a lot still has to be done. We have shown on a very simplified two-dimensional problem that viscous effects can strongly alter the solution and that the Ekman number has to be decreased below 10^6 to get an insight on the asymptotic behaviour. We haven't been able to obtain the qualitative onset of convection (subcritical) anticipated by theoretical descriptions, but features of our solutions strongly suggest that this discrepancy could as well rely on the use of overestimated Ekman numbers. We will continue this study further. We also want to study the strongly non-linear régime. Forthcoming studies could concern the onset of dynamo action. A preliminary result (numerically converged) of kinematic dynamo obtained with our convective solution (at $Ta = 10^6$) is presented. We want to study a parameter range as wide as numerically possible, in Ekman numbers, as well as in Rayleigh numbers. We also consider some modifications of our numerical algorithm, in order to reduce to the computing time associated with the resolution of Ekman layers.

Chapitre 5

Conclusions – Perspectives



La conclusion principale de ce travail pourrait bien être qu’il reste encore beaucoup à faire ! Nous avons montré sur un problème simplifié que des effets visqueux pouvaient modifier grandement l’écoulement dans une coquille sphérique en rotation, même pour des nombres d’Ekman aussi petits que 10^{-6} , et qu’il était nécessaire de faire décroître le nombre d’Ekman sous cette valeur pour que les modèles numériques soient en accord avec les études analytiques. Nous avons également montré que pour les mêmes valeurs du nombre d’Ekman, l’action d’un champ magnétique sur l’écoulement (magnétohydrodynamique) ne réduit pas l’importance des effets visqueux, et qu’au contraire un équilibre magnéto-visqueux peut être mis en évidence. Nous avons ensuite étudié dans la même géométrie la convection thermique d’amplitude finie, comme une étape préliminaire à l’étude d’une dynamo auto-excitée. Cette étude, bien qu’incomplète, indique clairement que le désaccord entre les observations de bifurcation sur-critique numériques (Zhang 1992) et l’existence démontrée analytiquement d’une bifurcation sous-critique (Soward, 1977) semble s’expliquer par l’utilisation de nombres d’Ekman trop élevés dans les simulations. Ce résultat est important, car il indique que la convection telle qu’elle est étudiée numériquement n’est pas sur la branche asymptotique significative pour le noyau terrestre. D’autres désaccords entre les descriptions théoriques et les observations numériques existent encore pour des problèmes plus proches de la dynamo. Ainsi, le phénomène de croissance illimité du champ (“runaway growth”) significatif du passage de la branche à champ faible à la branche à champ fort n’a jamais été observé numériquement.

Il reste encore énormément à faire. Tout d’abord, il faudra sans doute essayer de mener l’étude de convection d’amplitude finie pour des nombres d’Ekman inférieurs à 10^{-5} pour décrire la bifurcation sous critique. Il faudra également étudier la convection fortement non-linéaire pour différentes valeurs du nombre

d’Ekman. Ces études prendront sans doute du temps, par leur difficulté et par le volume de calculs numériques qu’elles impliquent.

L’étape suivante consistera à décrire le démarrage de l’action dynamo : le champ de vitesse convectif obtenu peut-il faire croître un champ magnétique à partir d’une perturbation ? Ce problème de “dynamo cinématique” (il n’y a pas d’effet du champ magnétique naissant sur l’écoulement) peut être comparé à la convection linéaire, en cela qu’il n’y a pas de saturation possible. Il constitue une étape préliminaire vers une dynamo auto-excitée. Dès lors que l’on s’intéresse à l’action dynamo (ne serait-ce qu’à son démarrage) un autre paramètre important est à considérer : le nombre de Roberts. Celui-ci mesure le rapport du le temps caractéristique de diffusion du champ magnétique par le temps caractéristique de diffusion thermique¹. Ce nombre est de l’ordre de 10^{-6} pour le noyau terrestre. C’est-à-dire que le champ magnétique diffuse très efficacement et cela constitue sans doute une caractéristique essentielle de l’induction dans le noyau terrestre. Le régime des petits nombres de Roberts est, comme celui des petits nombres d’Ekman, difficile à atteindre numériquement. S’il est relativement facile de maintenir par action dynamo un champ qui diffuse peu, cela est beaucoup plus difficile lorsque le champ diffuse bien. Les modèles de dynamo numériques ne savent pas pour l’instant descendre ce nombre en dessous de 10^{-1} (il est pour la plupart d’entre eux supérieur à 10) .

Nous avons commencé une étude préliminaire consistant à étudier le problème de dynamo cinématique à partir du champ de vitesse faiblement non-linéaire. Cela permet, pour une première approche, d’effectuer un changement de repère lié à la vitesse de phase de la solution près du seuil. Nous nous sommes placés dans le repère en rotation tel que l’écoulement soit indépendant du temps. Dans ce repère (où le champ de vitesse est modifié d’une vitesse angulaire constante), nous avons pu utiliser un programme de dynamo cinématique (courtoisie de Philippe Cardin), construit sur la même logique que les programmes écrits pour réaliser ce travail et qui a été validé sur de nombreux cas test pour étudier le champ induit par ces mouvements. Ces calculs numériques convergent (deux fois plus de points radiaux ont été utilisés qu’il n’est nécessaire pour résoudre l’écoulement, et les spectres sont présentés figure 5.2), et constituent donc une référence utile pour les études à venir plus loin du seuil et dans le repère du manteau. Encore terriblement éloignés d’un régime de paramètres réaliste pour l’étude du noyau terrestre (nombres d’Ekman et de Roberts sur-évalués, nombre de Rayleigh sous-évalué), ces résultats ne prétendent nullement être significatifs pour la terre. Ils constituent cependant les premiers résultats numériques convergés de démarrage de l’action dynamo avec des conditions aux limites cinématiques réalistes.

1. Qui est comparable au temps caractéristique construit sur la viscosité si le nombre de Prandtl est proche de l’unité.

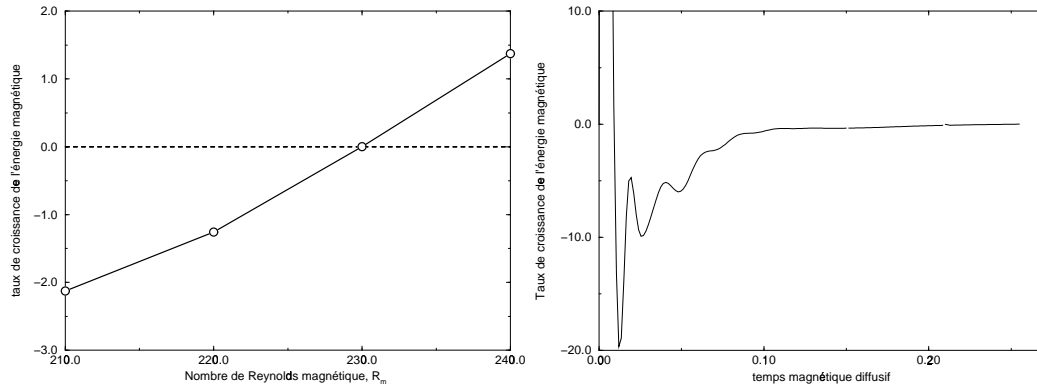


FIG. 5.1 – Recherche du nombre de Reynolds magnétique critique, pour une dynamo cinématique construite à partir du champ de vitesse de la convection d'amplitude finie (en conditions de non-glissement, et en chauffage β) pour $Ta = 10^6$. Le nombre de Reynolds magnétique critique pour le démarrage de l'action dynamo est proche de 230 (à gauche). A droite l'évolution temporelle de l'énergie magnétique pour $Rm = 230$.

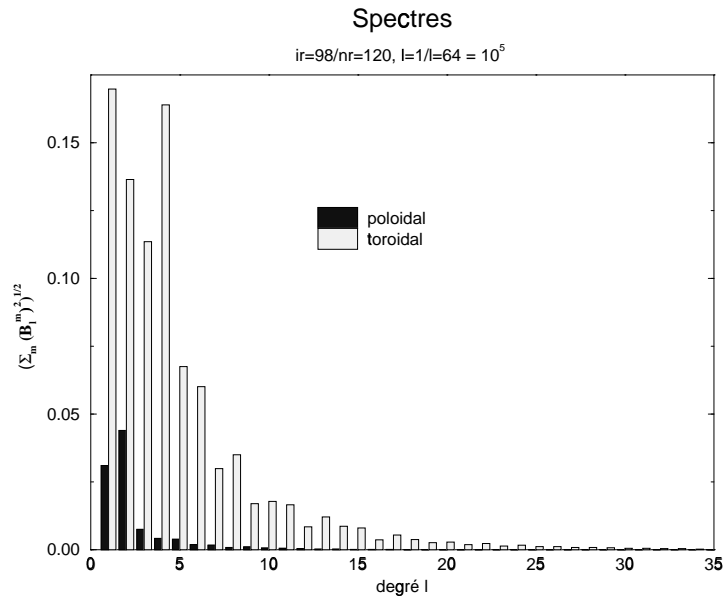


FIG. 5.2 – Cette simulation est convergée numériquement. Nous utilisons 120 coquilles (deux fois plus qu'il n'en faut pour résoudre le champ de vitesse). Le spectre est tronqué à $l < 64$ et $m < 128$, ce qui est suffisant pour bien représenter la solution.

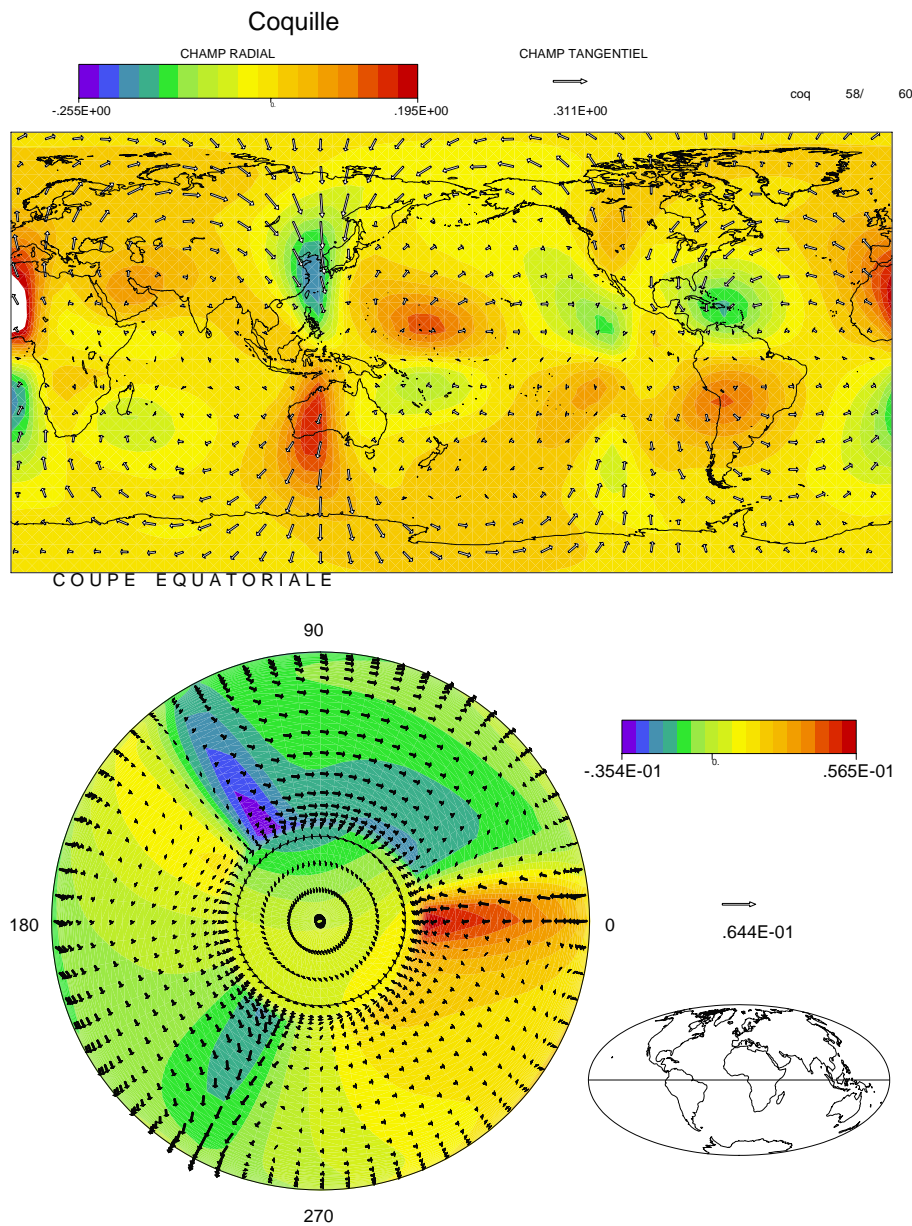


FIG. 5.3 – *Champ magnétique produit par la dynamo cinématique (flèches pour la composante tangentielle et couleurs pour la composante normale). Le champ de vitesse correspond au mode $m = 3$. Le champ est représenté à la surface (en haut) et en coupe équatoriale (en bas).*

Les études que nous venons de présenter étant très difficiles numériquement, il paraît utile d'envisager les améliorations possibles de notre approche numérique. S'il est sensé de conserver une projection sur une base harmonique en θ et ϕ , ne serait-ce que pour pouvoir écrire facilement les conditions aux limites pour le champ magnétique, nous pouvons envisager différentes modifications du schéma

radial.

Nous présentons rapidement quelques méthodes numériques qui peuvent être envisagées².

- La méthode de différences finies utilisée jusqu'à présent souffre de limitations importantes. La nécessité d'utiliser une grille "souple", de préférence à variations géométriques, nous contraint à introduire des points de calculs inutiles dans le domaine pour assurer la résolution des couches limites. De plus, ce schéma n'étant précis qu'à l'ordre deux, il peut engendrer des phénomènes de viscosité numérique.

Une amélioration possible serait d'utiliser des schémas d'ordres plus élevés. Cela entraînerait toutefois de nouvelles difficultés. Le stencil associé serait plus large, ce qui rendrait difficile une implémentation rigoureuse des conditions aux limites. De plus cela nécessiterait la résolution de systèmes plus larges à chaque pas d'intégration. Enfin, le gain apporté par ces méthodes d'ordres élevés peut être très limité dans le cas de forts cisaillements (comme les couches limites, voir Fletcher 1991).

- Des méthodes spectrales peuvent également être employées pour la résolution radiale. C'est en fait l'approche la plus souvent utilisée pour ce problème. Le choix se porte en général sur les polynômes de Chebyshev car ils offrent une grande résolution aux bords du domaine. Cette approche entraîne cependant des limitations importantes. Il est peu aisé de modifier les conditions aux limites, car cela introduit des couplages. Mais surtout il est particulièrement difficile de paralléliser efficacement ces algorithmes (tous les coefficients étant couplés).
- La méthode des Volumes finis, est souvent utilisée en mécanique des fluides (Patankar 1980, Ferziger et al. 1996). Elle permet une interprétation directe des lois de conservation et garantit que leur résolution est conservative. La décomposition en scalaires poloïdaux et toroïdaux nous amène à écrire nos équations sous forme non conservative, ce qui rend la méthode des volumes finis moins intéressante. Comme cette décomposition est extrêmement utile pour le champ magnétique et ses conditions aux limites, et qu'elle nous permet de réduire le nombre de variables à considérer, nous écartons également ce choix.
- La méthode des Éléments finis semble répondre à beaucoup de nos difficultés. Basée sur la formulation variationnelle des équation, cette méthode

2. Cette présentation rapide est limitée au cas monodimensionnel qui nous intéresse. Notons que certaines caractéristiques essentielles de ces méthodes présentées (comme l'usage de grilles non-structurées, ou le traitement de frontières irrégulières) n'ont de sens que pour des problèmes de dimensions supérieures.

est connue³ pour permettre une grande adaptativité (Zienkiewicz, 1971). Cette caractéristique est essentiellement due à l’introduction d’une matrice de masse. Pour des noeuds régulièrement espacés en monodimensionnel, l’opérateur discret, pour une base de fonctions affines, correspond à celui des différences finies centrées d’ordre deux (voir par exemple Le Pourhiet, 1988), la différence réside dans la matrice de masse. L’une des conséquences de cette matrice est que les schémas explicites en temps nécessitent la résolution d’un système linéaire, au même titre que les schémas implicites ou semi-implicites⁴. Cette approche comme celles aux différences finies peut entraîner des effets de viscosité numérique.

Pour utiliser un schéma aux éléments finis pour résoudre nos équations, il faut pouvoir résoudre le bi-laplacien dans l’équation du scalaire poloïdal. Pour résoudre ce problème d’ordre quatre avec la méthode des éléments finis (on rencontre des problèmes similaires en mécanique des solides pour les problèmes de poutres et de plaques en compression), il faut utiliser des fonctions de degré plus élevé (par exemple des cubiques, voir Burnett 1987, section 8.6), ce qui complique la formulation.

- Les Différences finies compactes, aussi appelées différences finies Hermiennes, sont moins souvent utilisées que les précédentes. La notion de “compacité” signifie ici que pour approximer la dérivée d’un champ en un point on n’utilisera que des valeurs sur ses plus proches voisins (au nombre de deux en une dimension). Le schéma de différences finies centré classique que nous avons utilisé jusqu’à présent est donc compact d’après cette définition. Le principe de ces schémas est d’augmenter l’ordre de l’approximation sans allonger l’opérateur. Il existe différentes manières d’établir ces schémas (cf Collatz 1951, 1966 ; Tolstykh 1994 ; Spatz 1995). Nous suivons l’approche proposée par Spatz (1995), en l’étendant au cas des grilles déformées (ces formules sont présentées en annexe).

Pour l’équation type

$$(5.1) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f ,$$

on obtient un schéma discret d’ordre trois, de la forme (voir annexe)

$$(5.2) \quad [\tilde{\delta}^2] (u_i) = [M] (f_i) ,$$

où

$$(5.3) \quad [M] = \left([Id] + \frac{1}{3} (h_2 - h_1) [\tilde{\delta}] + \frac{h_1^2 - h_1 h_2 + h_2^2}{12} [\tilde{\delta}^2] \right) .$$

3. Outre le fait qu’elle permet de manipuler des maillages non structurés, ce qui n’a pas grand sens en monodimensionnel.

4. Des méthodes de réductions (“lumping”) permettent de rendre cette matrice diagonale, mais le schéma perd alors de son adaptativité (voir Burnett 1987, section 11.3)

Nous voulons essayer d'adopter cette approche pour résoudre nos équations. Les formules sont données en annexe et le code correspondant est en cours de mise au point.

Enfin, il est utile de considérer une modification de notre schéma temporel. Bien qu'inconditionnellement stable, le schéma de Crank-Nicholson est oscillant pour les courtes longueurs d'ondes spatiales (voir Burnett, 1987). Ces oscillations ont toujours disparu dans nos calculs pour des temps assez grands. Elles peuvent devenir importantes lors de l'étude de problèmes turbulents.

Enfin, nous envisageons de paralléliser notre algorithme. L'usage d'un schéma aux différences réduit les modifications à lui apporter. Pour pouvoir paralléliser notre approche, il convient toutefois de modifier le solveur utilisé pour le schéma radial (chaque coquille concentrique pouvant être résolue indépendamment hormis à cette étape), par exemple en utilisant un solveur itératif.

Il reste donc effectivement beaucoup à faire. Mais n'est-ce pas là le lot de toute recherche?

Bibliographie

David **Burnett**, 1987

Finite element analysis from concepts to applications
Addison-Wesley publishing.

Lothar **Collatz**, 1951, 1966

Numerische Behandlung von Differentialgleichungen
trad. Ang. *The numerical treatment of differential equations*
Springer.

Joel **Ferziger**, Milovan Perić, 1996

Computational Methods for Fluid Dynamics
Spinger.

Clive **Fletcher**, 1988, 1991

Computational techniques for Fluid Dynamics, volumes I & II
Springer.

Suhas **Patankar**, 1980

Numerical heat transfer and fluid flow
Series in computational methods in mechanics and thermal sciences
McGraw-Hill.

Alain Le **Pourhiet**, 1988

Résolution numérique des équations aux dérivées partielles
Cepadues-Editions.

Andrew **Soward**, 1977

*On the finite amplitude thermal instability
of a rapidly rotating fluid sphere*
Geophysical and Astrophysical Fluid Dynamics, **9**, p.19–74.

William **Spotz**, 1995

*High-Order Compact Finite Differences Schemes
for Computational Mechanics*
Thèse, University of Texas at Austin.

Andrei **Tolstykh**, 1994

*High Accuracy Non-Centered Compact Difference Schemes
For Fluid Dynamics Applications*
World Scientific.

Keke Zhang et Friedrich Busse, 1988

*Finite amplitude convection and magnetic field generation
in a rotating spherical shell*

Geophysical and Astrophysical Fluid Dynamics, **44**, p.33–53.

Keke Zhang et Friedrich Busse, 1989

Convection driven magnetohydrodynamic dynamos in rotating spherical shells

Geophysical and Astrophysical Fluid Dynamics, **49**, p.97–116.

Keke Zhang et Friedrich Busse, 1990

*Generation of magnetic fields by convection in a rotating spherical
fluid shell of infinite Prandtl number*

Physics of the Earth and Planetary Interiors, **59**, p.208–222.

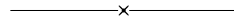
Olgierd Zienkiewicz, 1971

The Finite Element Method in Engineering Science

McGraw-Hill.

Appendix A

Notations, dimensions, et ordres de grandeurs



A.1 Notations

g	Champ de gravité,
α	Coefficient d'expansion thermique,
u	Vitesse,
ν	Viscosité cinématique,
κ	Diffusivité thermique,
η	Diffusivité magnétique,
ρ	Masse volumique,
Ω	Rotation,
B	Induction magnétique,
μ	Perméabilité magnétique,
$\vec{*}$	Vecteur,
$\overleftrightarrow{*}$	Pseudo-vecteur (i.e. tenseur antisymétrique d'ordre 2),
$\underline{*}$	Tenseur.

A.2 Abréviations

ICB	Frontière graine-noyau (en anglais “Inner Core Boundary”),
CMB	Frontière noyau-manteau (en anglais “Core Mantle Boundary”),
D''	couche fine à l’interface entre le noyau et le manteau (mal connue).
$\underline{\beta}$	Chauffage uniforme.
$\underline{\Delta}$	Chauffage différentiel.
$\underline{\Phi}$	Chauffage avec température imposée à la graine et flux de chaleur au manteau.

A.3 Dimension des principales grandeurs

$[q]$	$= Q$	Charge,
$[\vec{E}]$	$= Q^{-1}MLT^{-2}$	Champ électrique,
$[\vec{H}]$	$= QL^{-1}T^{-1}$	Champ magnétique,
$[\sigma]$	$= Q^2M^{-1}L^{-3}T$	Conductivité,
$[\vec{j}]$	$= QL^{-2}T^{-1}$	Densité de courant,
$[\rho]$	$= ML^{-3}$	Densité de masse,
$[\eta]$	$= L^2T^{-1}$	Diffusivité magnétique,
$[\kappa]$	$= L^2T^{-1}$	Diffusivité thermique,
$[\vec{g}]$	$= LT^{-2}$	Gravité,
$[\vec{D}]$	$= QL^{-2}$	Déplacement électrique,
$[\vec{B}]$	$= Q^{-1}MT^{-1}$	Induction magnétique,
$[\mu]$	$= Q^{-2}ML$	Perméabilité magnétique,
$[\varepsilon]$	$= Q^2M^{-1}L^{-3}T^2$	Permittivité,
$[\vec{\Omega}]$	$= T^{-1}$	Rotation,
$[\nu]$	$= L^2T^{-1}$	Viscosité cinématique,
$[\vec{u}]$	$= LT^{-1}$	Vitesse,
$[\vec{\nabla}]$	$= L^{-1}$	Nabla,
$[\Delta]$	$= L^{-2}$	Laplacien,
$[\vec{F}]$	$= MLT^{-2}$	Force,
$[\vec{f}]$	$= ML^{-2}T^{-2}$	Densité de force,
$[\vec{\Gamma}]$	$= ML^2T^{-2}$	Couple.

A.4 Nombres sans dimensions

A.4.1 Introduction

Reynolds

Le nombre de Reynolds mesure le rapport entre le terme advectif et le terme diffusif dans Navier-Stokes

$$(A.1) \quad Re = \frac{\{\vec{u} \nabla \vec{u}\}}{\{\nu \Delta \vec{u}\}} \simeq \frac{u\ell}{\nu}$$

où u est une vitesse caractéristique et ℓ une longueur caractéristique de l'écoulement.

Si l'on s'intéresse à l'écoulement de grande échelle ($\ell = r_e$), et que l'on met la vitesse à l'échelle par rapport à la rotation du système, on peut écrire ce nombre comme

$$(A.2) \quad Re = \frac{\Omega r_e^2}{\nu}$$

Reynolds Magnétique

Le nombre de Reynolds Magnétique mesure le rapport entre le terme advectif et le terme diffusif dans l'équation d'induction

$$(A.3) \quad Rm = \frac{\{\vec{u} \nabla \vec{B}\}}{\{\eta \Delta \vec{B}\}} \simeq \frac{u\ell}{\eta}$$

où u est toujours une vitesse caractéristique et ℓ une longueur caractéristique de l'écoulement.

Sous les mêmes hypothèses que précédemment, on peut écrire ce nombre comme

$$(A.4) \quad Rm = \frac{\Omega r_e^2}{\eta}$$

Remarque : L'équilibre entre création et diffusion de champ que nécessite une dynamo demande des Rm égaux ou supérieurs à l'unité. Pour un champ de vitesse raisonnablement efficace, on attend un Rm de l'ordre de 100 pour arriver à entretenir le champ.

Peclet

Le nombre de Peclet mesure le rapport entre le terme advectif et le terme diffusif dans l'équation d'énergie

$$(A.5) \quad Pe = \frac{\{\vec{u} \cdot \nabla T\}}{\{\kappa \Delta T\}} \simeq \frac{u\ell}{\kappa}$$

où u est toujours une vitesse caractéristique et ℓ une longueur caractéristique de l'écoulement.

Sous les mêmes hypothèses que précédemment, on peut écrire ce nombre comme

$$(A.6) \quad Pe = \frac{\Omega r_e^2}{\kappa}$$

Ekman

Le nombre d'Ekman mesure le rapport entre les forces visqueuses, et la force de Coriolis (il est utilisé sans le facteur 2 dans le chapitre 3)

$$(A.7) \quad E = \frac{\{f_\nu\}}{\{f_\Omega\}} = \frac{\{\nu \Delta \vec{u}\}}{\{2\Omega(\vec{e}_z \wedge \vec{u})\}} \simeq \frac{\nu u \ell^{-2}}{2\Omega u}$$

Remarques: On définit aussi le nombre de Taylor $T = E^{-2}$.

En fait l'intensité du terme de diffusion dépend largement de la géométrie du champ u , ce qui explique que les échelles caractéristiques de l'écoulement varient souvent non comme E mais comme ses puissances ($E^{1/2}, E^{1/3}, \dots$).

Rossby

Le nombre de Rossby mesure le rapport entre les termes d'inertie, et la force de Coriolis

$$(A.8) \quad Ro = \frac{\{\frac{d\vec{u}}{dt}\}}{\{f_\Omega\}} = \frac{\{\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \vec{u} \nabla \vec{u}\}}{\{2\Omega(\vec{e}_z \wedge \vec{u})\}} \simeq \frac{t^{-1} + u \ell^{-1}}{2\Omega u} = \frac{u}{\Omega \ell}$$

Pour les mouvements de grande échelle (comme précédemment)

$$Ro = \frac{u}{\Omega r_e}$$

Ce nombre est petit pour le noyau liquide ($\simeq 10^{-7}$) il est raisonnable de le négliger (à condition de négliger également le nombre d'Ekman, qui est encore plus petit). Si l'on néglige les deux on se place dans l'approximation magnétostrophique.

Elsasser

Le nombre d'Elsasser mesure le rapport entre les forces magnétiques et la force de Coriolis

1ère méthode:

$$(A.9) \quad \Lambda = \frac{\{f_B\}}{\{f_\Omega\}} = \frac{\{\frac{1}{\mu_0 \rho_0} (\vec{\nabla} \wedge \vec{B}) \wedge \vec{B}\}}{\{2\Omega(\vec{e}_z \wedge \vec{u})\}} \simeq \frac{1}{\mu_0 \rho_0} \frac{B^2 \ell^{-1}}{2\Omega u} = \frac{B^2}{2\Omega \rho_0 \mu_0 2\ell u}$$

si l'on met la vitesse à l'échelle avec la diffusivité magnétique, il vient

$$(A.10) \quad \Lambda = \frac{B^2}{2\Omega\rho_0\mu_0\eta}$$

2ème méthode:

$$(A.11) \quad \vec{j} = \sigma(\vec{E} + \vec{u} \wedge \vec{B})$$

On suppose que

$$(A.12) \quad \{j\} = \{\sigma u B\}$$

On a alors le même résultat :

$$(A.13) \quad \Lambda = \frac{\{f_B\}}{\{f_\Omega\}} = \frac{\{\frac{1}{\rho_0}(\vec{j} \wedge \vec{B})\}}{\{2\Omega(\vec{e}_z \wedge \vec{u})\}} \simeq \frac{\sigma u B^2}{2\Omega u \rho_0} = \frac{\sigma B^2}{2\Omega \rho_0}$$

$$(A.14) \quad \Lambda = \frac{B^2}{2\Omega\rho_0\mu_0\eta}$$

Hartmann

Le nombre de Hartmann mesure le rapport entre les forces magnétiques et les forces visqueuses

$$(A.15) \quad M^2 = \frac{\{f_B\}}{\{f_\nu\}} = \frac{\sigma u B^2}{\rho_0 \nu \Delta u} = \frac{B^2 \ell^2}{\rho_0 \nu \mu_0 \eta}$$

On a introduit ici le carré du nombre d'Hartmann, en effet il est plus commode d'utiliser

$$(A.16) \quad M = \frac{B \ell}{\sqrt{\rho_0 \nu \mu_0 \eta}}$$

pour définir l'unité de champ magnétique.

Rayleigh & Busse

Le nombre de Rayleigh, comme le nombre de Busse, mesure le rapport entre les forces qui aident la convection (Archimède) et celles qui la freinent (visqueuses)

$$(A.17) \quad R = \frac{\{f_a\}}{\{f_\nu\}} = \frac{\alpha \theta \vec{g}}{\nu \Delta \vec{u}} = \frac{\alpha \theta g \ell^2}{\nu u} \simeq \frac{\alpha T g \ell^2}{\nu u}$$

où T est une température caractéristique (en général imposée par les C.L.). Reste à mettre à l'échelle le diviseur. Si on le met à l'échelle avec κ , on définit le nombre de Rayleigh (très utile en convection)

$$(A.18) \quad R = \frac{\alpha T g \ell^3}{\nu \kappa}$$

Si on le met à l'échelle avec η , on définit le nombre de Busse (très utile en magnéto-convection, ou dynamo)

$$(A.19) \quad B = \frac{\alpha T g \ell^3}{\nu \eta}$$

Remarque: Bien sûr on n'a pas en convection $u\ell = \kappa$, sinon la valeur critique serait $R_c = 1.0\dots$

Prandtl

Le nombre de Prandtl mesure le rapport entre viscosité (“diffusivité cinétique”) et diffusivité thermique

$$(A.20) \quad P = \frac{\nu}{\kappa}$$

Prandtl Magnétique

Le nombre de Prandtl Magnétique mesure le rapport entre viscosité (“diffusivité cinétique”) et diffusivité magnétique

$$(A.21) \quad Pm = \frac{\nu}{\eta}$$

Roberts

Le nombre de Roberts mesure le rapport entre diffusivité thermique et diffusivité magnétique

$$(A.22) \quad q = \frac{\kappa}{\eta}$$

Ce nombre est important car il vaut environ 10^{-6} pour la terre (c'est à dire que le champ diffuse beaucoup, et qu'il est donc difficile d'entretenir une dynamo. C'est aussi une “raison” pour avoir un champ de grande échelle). Il est hélas toujours plus grand que 10^{-1} dans les simulations numériques.

Lewis

Le nombre de Lewis mesure le rapport entre diffusivité thermique et diffusivité chimique

$$(A.23) \quad Le = \frac{\kappa}{\chi}$$

Il est utile lorsque l'on considère une convection doublement diffusive (avec un moteur thermique et un moteur solutal).

A.4.2 Définition

E	Nombre d'Ekman	$\frac{\nu}{2\Omega r_e^2}$	ou	$\frac{\nu}{\Omega r_e^2}$
Λ	Nombre d'Elsasser	$\frac{B^2}{2\Omega\rho\mu\eta}$		
M	Nombre d'Hartmann	$\frac{r_e B}{\sqrt{\mu\rho\nu\eta}}$	$(= \left(\frac{\Lambda}{E}\right)^{1/2})$	
Le	Nombre de Lewis	$\frac{\kappa}{\chi}$		
Pe	Nombre de Peclet	$\frac{ur_e}{\kappa}$	$(= Pr \cdot Re)$	
Pr	Nombre de Prandtl	$\frac{\nu}{\kappa}$		
Pm	Nombre de Prandtl magnétique	$\frac{\nu}{\eta}$		
R	Nombre de Rayleigh	$\frac{\alpha g \beta r_e^6}{\nu\kappa}$,	$\frac{\alpha g T_a r_e^3}{\nu\kappa}$
Re	Nombre de Reynolds	$\frac{ur_e}{\nu}$		
Rm	Nombre de Reynolds magnétique	$\frac{ur_e}{\eta}$	$(= Re \cdot Pm)$	
q	Nombre de Roberts	$\frac{\kappa}{\eta}$	$(= Pm/Pr)$	
Ro	Nombre de Rossby	$\frac{u}{\Omega r_e}$		
T	Nombre de Taylor	$\left(\frac{2\Omega r_e^2}{\nu}\right)^2$	$(= E^{-2})$	

A.5 Ordres de grandeur pour la terre

Dans le noyau :

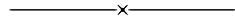
r_i	1 222	Km	Rayon interne de la coquille,
r_e	3 480	Km	Rayon externe de la coquille,
r_T	6 371	Km	Rayon terrestre,
T_i	$\in [3\,000, 8\,000]$	K	Température interne,
Φ_e	10^{13}	W	Flux de chaleur sortant du noyau,
g_i	4,4	$m \cdot s^{-2}$	Gravité à $r = r_i$,
g_e	10,7	$m \cdot s^{-2}$	Gravité à $r = r_e$,
p_i	$3,3 \cdot 10^{11}$	Pa	Pression à $r = r_i$, ($= 3,3 \text{ MBar} = 3,3 \cdot 10^6 \text{ Atm}$)
p_e	$1,3 \cdot 10^{11}$	Pa	Pression à $r = r_e$, ($= 1,3 \text{ MBar} = 1,3 \cdot 10^6 \text{ Atm}$)
Ω	$7,3 \cdot 10^{-5}$	$rad \cdot s^{-1}$	Vitesse angulaire,
σ	$7 \cdot 10^5$	$\Omega^{-1} \cdot m^{-1}$	Conductivité du noyau,
μ	$4\pi \cdot 10^{-7}$	$T \cdot m \cdot A^{-1}$	Perméabilité magnétique ($= \mu_0$),
κ	$8 \cdot 10^{-6}$	$m^2 \cdot s^{-1}$	Diffusivité thermique,
α	10^{-5}	K^{-1}	Dilatation thermique,
η	1,1	$m^2 \cdot s^{-1}$	Diffusivité magnétique,
ρ_i	$1,3 \cdot 10^4$	$Kg \cdot m^{-3}$	Masse volumique à $r = r_i$,
ρ_e	$1,0 \cdot 10^4$	$Kg \cdot m^{-3}$	Masse volumique à $r = r_e$,
ν	10^{-6}	$m^2 \cdot s^{-1}$	Viscosité cinématique (\simeq eau),
$\ \vec{u}\ $	10^{-4}	$m \cdot s^{-1}$	Vitesse du fluide,
E	10^{-15}		Nombre d'Ekman,
Λ	$\in [1, 10]$		Nombre d'Elsasser,
H	$\in [10^7, 10^{12}]$		Nombre d'Hartmann,
Pe	10^7		Nombre de Peclet,
Pr	0.14		Nombre de Prandtl,
Pm	10^{-6}		Nombre de Prandtl magnétique,
Re	10^8		Nombre de Reynolds,
Rm	$\in [10^2, 10^3]$		Nombre de Reynolds magnétique,
Le	10^3		Nombre de Lewis,
q	$\in [10^{-6}, 10^{-5}]$		Nombre de Roberts,
Ro	10^{-7}		Nombre de Rossby,
T	10^{30}		Nombre de Taylor.

Données générales :

r_T	6 400	Km	Rayon de la terre,
σ	0	$\Omega^{-1} \cdot m^{-1}$	Conductivité du manteau,
κ	$5 \cdot 10^{-4}$	$m^2 \cdot s^{-1}$	Diffusivité thermique du manteau,
$\ \vec{u}\ $	10^{-11}	$m \cdot s^{-1}$	Vitesse des plaques, majorant la vitesse dans le manteau,
	$4,5 \cdot 10^9$	ans	Age de la terre (accrétion),
	100 000	ans	Durée caractéristique entre deux inversions,
	5 000	ans	Durée caractéristique d'une inversion,
	720 000	ans	Durée de la période normale actuelle,
$\ \vec{B}_{\text{ext}}\ $	40 000	nT	Induction magnétique actuelle en surface,
$\ \vec{B}_{\text{CMB}}\ $	$5 \cdot 10^5$	nT	Induction magnétique actuelle estimée à la CMB (= 5 Gauss),
	2 000	$nT/\text{siècles}$	Variation séculaire,
	$1,5 \cdot 10^{-5}$	$m^2 \cdot s^{-1}$	Viscosité cinématique de l'air (à T et P usuels),
	$1,013 \cdot 10^{-6}$	$m^2 \cdot s^{-1}$	Viscosité cinématique de l'eau (à T et P usuels),
	$6,8 \cdot 10^{-4}$	$m^2 \cdot s^{-1}$	Viscosité cinématique de la glycérine (à T et P usuels).

Appendix B

Formules utiles, analyse vectorielle



B.1 Coordonnées cartésiennes

$$(B.1) \quad \vec{\text{grad}} U = \frac{\partial U}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial U}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{\partial U}{\partial z} \vec{e}_z$$

$$(B.2) \quad \text{div} \vec{V} = \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z}$$

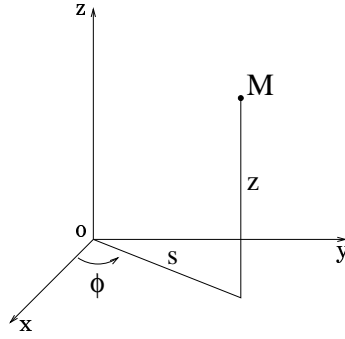
$$(B.3) \quad \vec{\text{rot}} \vec{V} = \left[\frac{\partial V_z}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial z} \right] \vec{e}_x + \left[\frac{\partial V_x}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial x} \right] \vec{e}_y + \left[\frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y} \right] \vec{e}_z$$

$$(B.4) \quad \Delta U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}$$

$$(B.5) \quad \Delta \vec{V} = [\Delta V_x] \vec{e}_x + [\Delta V_y] \vec{e}_y + [\Delta V_z] \vec{e}_z$$

$$(B.6) \quad \underline{\underline{\nabla}} \vec{V} = \begin{bmatrix} \frac{\partial V_x}{\partial x} & \frac{\partial V_x}{\partial y} & \frac{\partial V_x}{\partial z} \\ \frac{\partial V_y}{\partial x} & \frac{\partial V_y}{\partial y} & \frac{\partial V_y}{\partial z} \\ \frac{\partial V_z}{\partial x} & \frac{\partial V_z}{\partial y} & \frac{\partial V_z}{\partial z} \end{bmatrix}$$

B.2 Coordonnées cylindriques



$$(B.7) \quad \vec{\text{grad}} U = \frac{\partial U}{\partial s} \vec{e}_s + \frac{1}{s} \frac{\partial U}{\partial \phi} \vec{e}_\phi + \frac{\partial U}{\partial z} \vec{e}_z$$

$$(B.8) \quad \text{div} \vec{V} = \frac{1}{s} \frac{\partial}{\partial s} (s V_s) + \frac{1}{s} \frac{\partial V_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial V_z}{\partial z}$$

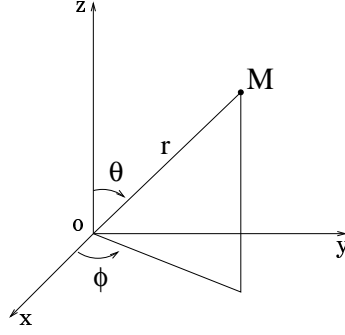
$$(B.9) \quad \vec{\text{rot}} \vec{V} = \left[\frac{1}{s} \frac{\partial V_z}{\partial \phi} - \frac{\partial V_\phi}{\partial z} \right] \vec{e}_s \\ + \left[\frac{\partial V_s}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial s} \right] \vec{e}_\phi \\ + \left[\frac{1}{s} \frac{\partial}{\partial s} (s V_\phi) - \frac{1}{s} \frac{\partial V_s}{\partial \phi} \right] \vec{e}_z$$

$$(B.10) \quad \Delta U = \frac{\partial^2 U}{\partial s^2} + \frac{1}{s} \frac{\partial U}{\partial s} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 U}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}$$

$$(B.11) \quad \Delta \vec{V} = \vec{\text{grad}} \text{div} \vec{V} - \vec{\text{rot}} \vec{\text{rot}} \vec{V}$$

$$(B.12) \quad \underline{\underline{\nabla}} \vec{V} = \begin{bmatrix} \frac{\partial V_s}{\partial s} & \frac{1}{s} \frac{\partial V_s}{\partial \phi} - \frac{V_\phi}{s} & \frac{\partial V_s}{\partial z} \\ \frac{\partial V_\phi}{\partial s} & \frac{1}{s} \frac{\partial V_\phi}{\partial \phi} + \frac{V_s}{s} & \frac{\partial V_\phi}{\partial z} \\ \frac{\partial V_z}{\partial s} & \frac{1}{s} \frac{\partial V_z}{\partial \phi} & \frac{\partial V_z}{\partial z} \end{bmatrix}$$

B.3 Coordonnées sphériques



$$(B.13) \quad \vec{\text{grad}} U = \frac{\partial U}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \theta} \vec{e}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial U}{\partial \phi} \vec{e}_\phi$$

$$(B.14) \quad \text{div} \vec{V} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 V_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta V_\theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial V_\phi}{\partial \phi}$$

$$(B.15) \quad \begin{aligned} \vec{\text{rot}} \vec{V} = & \frac{1}{r \sin \theta} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta V_\phi) - \frac{\partial V_\theta}{\partial \phi} \right] \vec{e}_r \\ & + \frac{1}{r} \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial V_r}{\partial \phi} - \frac{\partial}{\partial r} (r V_\phi) \right] \vec{e}_\theta \\ & + \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r V_\theta) - \frac{\partial V_r}{\partial \theta} \right] \vec{e}_\phi \end{aligned}$$

$$(B.16) \quad \Delta U = \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial U}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 U}{\partial \phi^2}$$

$$(B.17) \quad L_2 U = -\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial U}{\partial \theta} \right) - \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 U}{\partial \phi^2}$$

$$(B.18) \quad \Delta \vec{V} = \vec{\text{grad}} \text{div} \vec{V} - \vec{\text{rot}} \vec{\text{rot}} \vec{V}$$

$$(B.19) \quad \underline{\underline{\nabla}} \vec{V} = \begin{bmatrix} \frac{\partial V_r}{\partial r} & \frac{1}{r} \frac{\partial V_r}{\partial \theta} - \frac{V_\theta}{r} & \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial V_r}{\partial \phi} - \frac{V_\phi}{r} \\ \frac{\partial V_\theta}{\partial r} & \frac{1}{r} \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} + \frac{V_r}{r} & \frac{1}{r \sin \theta} \left(\frac{\partial V_\theta}{\partial \phi} - V_\phi \cos \theta \right) \\ \frac{\partial V_\phi}{\partial r} & \frac{1}{r} \frac{\partial V_\phi}{\partial \theta} & \frac{1}{r \sin \theta} \left(\frac{\partial V_\phi}{\partial \phi} + V_r \sin \theta + V_\theta \cos \theta \right) \end{bmatrix}$$

B.4 Identités vectorielles

$$(B.20) \quad \operatorname{div}(\overrightarrow{\operatorname{grad}} U) = \Delta U$$

$$(B.21) \quad \overrightarrow{\operatorname{rot}} \overrightarrow{\operatorname{grad}} U = \vec{0}$$

$$(B.22) \quad \operatorname{div} \overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{V} = 0$$

$$(B.23) \quad \overrightarrow{\operatorname{grad}} (U_1 U_2) = U_1 \overrightarrow{\operatorname{grad}} U_2 + U_2 \overrightarrow{\operatorname{grad}} U_1$$

$$(B.24) \quad \operatorname{div}(U \vec{V}) = U \operatorname{div} \vec{V} + (\overrightarrow{\operatorname{grad}} U) \cdot \vec{V}$$

$$(B.25) \quad \operatorname{div}(\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2) = \vec{V}_2 \cdot (\overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{V}_1) - \vec{V}_1 \cdot (\overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{V}_2)$$

$$(B.26) \quad \overrightarrow{\operatorname{rot}} (U \vec{V}) = U \overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{V} + (\overrightarrow{\operatorname{grad}} U) \wedge \vec{V}$$

$$(B.27) \quad \overrightarrow{\operatorname{rot}} (\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2) = \vec{V}_1 \operatorname{div} \vec{V}_2 - \vec{V}_2 \operatorname{div} \vec{V}_1 + (\vec{V}_2 \cdot \overrightarrow{\operatorname{grad}}) \vec{V}_1 - (\vec{V}_1 \cdot \overrightarrow{\operatorname{grad}}) \vec{V}_2$$

$$(B.28) \quad \overrightarrow{\operatorname{rot}} (\overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{V}) = \overrightarrow{\operatorname{grad}} (\operatorname{div} \vec{V}) - \Delta \vec{V}$$

Appendix C

Schéma aux différences finies compactes pour nos équations

—————×—————

Pour résoudre l'équation

$$(C.1) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f,$$

on utilise alors

$$(C.2) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = (\tilde{\delta}^2 u)_0 - \frac{1}{3}(h_2 - h_1) \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(0) - \frac{h_1^2 - h_1 h_2 + h_2^2}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(0) + (h_2 - h_1) \mathcal{O}(h^3).$$

L'idée de la méthode est de re-différencier l'équation (C.1) pour réduire l'erreur de troncature. L'équation précédente peut s'écrire

$$(C.3) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = (\tilde{\delta}^2 u)_0 - \frac{1}{3}(h_2 - h_1) \frac{\partial f}{\partial x}(0) - \frac{h_1^2 - h_1 h_2 + h_2^2}{12} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0) + (h_2 - h_1) \mathcal{O}(h^3).$$

En approchant les dérivées du second membre à l'aide des opérateurs centrés, il

vient

$$(C.4) \quad \begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= (\tilde{\delta}^2 u)_0 - \frac{1}{3} (h_2 - h_1) \left((\tilde{\delta} f)_0 - \frac{h_1 h_2}{6} \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} + \mathcal{O}(h^3) \right) \\ &\quad - \frac{h_1^2 - h_1 h_2 + h_2^2}{12} \left(\begin{aligned} &(\tilde{\delta}^2 f)_0 - \frac{1}{3} (h_2 - h_1) \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(0) \\ &-\frac{h_1^2 - h_1 h_2 + h_2^2}{12} \frac{\partial^4 f}{\partial x^4}(0) \\ &+(h_2 - h_1) \mathcal{O}(h^3) \end{aligned} \right) \\ &\quad + (h_2 - h_1) \mathcal{O}(h^3). \end{aligned}$$

Pour simplifier l'écriture, plaçons nous dans le cas d'une grille à décroissance géométrique, c'est-à-dire pour laquelle $(h_2 - h_1) \simeq \mathcal{O}(h)$, on a alors

$$(C.5) \quad \begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= (\tilde{\delta}^2 u)_0 - \frac{1}{3} (h_2 - h_1) \left((\tilde{\delta} f)_0 + \mathcal{O}(h^2) \right) \\ &\quad - \frac{h_1^2 - h_1 h_2 + h_2^2}{12} \left((\tilde{\delta}^2 f)_0 + \mathcal{O}(h) \right) \\ &\quad + \mathcal{O}(h^4). \end{aligned}$$

La version discrète de l'équation (C.1) s'écrit alors

$$(C.6) \quad (\tilde{\delta}^2 u)_0 = f + \frac{1}{3} (h_2 - h_1) (\tilde{\delta} f)_0 + \frac{h_1^2 - h_1 h_2 + h_2^2}{12} (\tilde{\delta}^2 f)_0 + \mathcal{O}(h^3).$$

Ce schéma est d'ordre trois sur une grille irrégulière, alors que le schéma de différences finies classiques n'est que d'ordre un. D'une manière matricielle ce schéma s'écrit

$$(C.7) \quad [\tilde{\delta}^2] (u_i) = \left([Id] + \frac{1}{3} (h_2 - h_1) [\tilde{\delta}] + \frac{h_1^2 - h_1 h_2 + h_2^2}{12} [\tilde{\delta}^2] \right) (f_i),$$

soit

$$(C.8) \quad [\tilde{\delta}^2] (u_i) = [K_{\tilde{\delta}^2}] (f_i).$$

Sur une grille régulière (lorsque les opérateurs $\tilde{\delta}$ et $\tilde{\delta}^2$ deviennent δ et δ^2) ce schéma s'écrit sous forme matricielle

$$(C.9) \quad \frac{1}{h^2} \begin{bmatrix} -2 & 1 & & & & & \\ 1 & -2 & 1 & & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & & \\ & & & 1 & -2 & 1 & \\ & & & & 1 & -2 & \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ u_i \\ \vdots \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5}{6} & \frac{1}{12} & & & & & \\ \frac{1}{12} & \frac{5}{6} & \frac{1}{12} & & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & & \\ & & & \frac{1}{12} & \frac{5}{6} & \frac{1}{12} & \\ & & & & \frac{1}{12} & \frac{5}{6} & \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ f_i \\ \vdots \\ \vdots \end{pmatrix}$$

Un schéma aux différences finies compactes tel que nous l'avons introduit (par redifférentiation) doit être redérivé pour chaque nouvelle équation. Nous allons à présent établir un schéma compact sur grille irrégulière pour notre système d'équations, que nous mettons sous la forme (voir équation 2.102)

$$(C.10) \quad \begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} \Delta u_{pl}^m = \Delta^2 u_{pl}^m + E^{-1} \mathbf{i} \frac{m}{l(l+1)} \Delta u_{pl}^m + E^{-1} \frac{1}{l(l+1)} Q_3 u_{tl}^m + F_1, \\ \frac{\partial}{\partial t} u_{tl}^m = \Delta u_{tl}^m + E^{-1} \mathbf{i} \frac{m}{l(l+1)} u_{tl}^m - E^{-1} \frac{1}{l(l+1)} Q_3 u_{pl}^m + F_2, \\ \frac{\partial}{\partial t} \Theta_l^m = \frac{1}{Pr} \Delta \Theta_l^m + F_3. \end{cases}$$

où F_1 et F_2 représentent les termes indépendants de u (Archimède) ainsi que les interactions non-linéaires calculées dans l'espace physique, et F_3 contient le $\vec{u} \cdot \vec{\nabla} T_s$ (indépendant de θ) et le $\vec{u} \cdot \vec{\nabla} \theta$ calculé dans l'espace physique.

Procédons par complexité croissante; commençons par traiter l'équation pour la perturbation de température

$$(C.11) \quad \frac{\partial}{\partial t} \Theta_l^m = \frac{1}{Pr} \Delta \Theta_l^m + F_3,$$

$$(C.12) \quad \frac{\partial}{\partial t} \Theta_l^m = \frac{1}{Pr} \frac{\partial^2}{\partial r^2} \Theta_l^m + \frac{1}{Pr} \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} \Theta_l^m - \frac{1}{Pr} \frac{l(l+1)}{r^2} \Theta_l^m + F_3.$$

Suivant Spatz (1995), nous posons

$$(C.13) \quad \hat{F}_3 = F_3 - \frac{\partial}{\partial t} \Theta_l^m - \frac{1}{Pr} \frac{l(l+1)}{r^2} \Theta_l^m,$$

l'équation (C.12) s'écrit alors

$$(C.14) \quad \frac{\partial^2}{\partial r^2} \Theta_l^m + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} \Theta_l^m = -Pr \hat{F}_3.$$

Appliquons alors la même approche que pour l'équation (C.1):

$$(C.15) \quad \begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial r^2} \Theta_l^m + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} \Theta_l^m &= (\tilde{\delta}^2 \Theta_l^m)_0 - \frac{1}{3} (h_2 - h_1) \frac{\partial^3 \Theta_l^m}{\partial x^3}(0) - \frac{h_1^2 - h_1 h_2 + h_2^2}{12} \frac{\partial^4 \Theta_l^m}{\partial x^4}(0) \\ &+ (h_2 - h_1) \mathcal{O}(h^3) + \frac{2}{r} \left((\tilde{\delta} \Theta_l^m)_0 - \frac{h_1 h_2}{6} \frac{\partial^3 \Theta_l^m}{\partial x^3}(0) + \mathcal{O}(h^3) \right). \end{aligned}$$

En différentiant (C.14) il vient

$$(C.16) \quad \frac{\partial^3}{\partial r^3} \Theta_l^m = -\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} \Theta_l^m \right) - Pr \frac{\partial \hat{F}_3}{\partial r},$$

$$(C.17) \quad \frac{\partial^3}{\partial r^3} \Theta_l^m = \frac{2}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \Theta_l^m - \frac{2}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} \Theta_l^m - Pr \frac{\partial \hat{F}_3}{\partial r},$$

et

$$(C.18) \quad \frac{\partial^4}{\partial r^4} \Theta_l^m = \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{2}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \Theta_l^m \right) - \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{2}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} \Theta_l^m \right) - Pr \frac{\partial^2 \hat{F}_3}{\partial r^2},$$

$$(C.19) \quad \frac{\partial^4}{\partial r^4} \Theta_l^m = -\frac{4}{r^3} \frac{\partial}{\partial r} \Theta_l^m + \frac{4}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial r^2} \Theta_l^m - \frac{2}{r} \frac{\partial^3}{\partial r^3} \Theta_l^m - Pr \frac{\partial^2 \hat{F}_3}{\partial r^2},$$

$$(C.20) \quad \frac{\partial^4}{\partial r^4} \Theta_l^m = -\frac{8}{r^3} \frac{\partial}{\partial r} \Theta_l^m + \frac{8}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial r^2} \Theta_l^m + \frac{2}{r} Pr \frac{\partial \hat{F}_3}{\partial r} - Pr \frac{\partial^2 \hat{F}_3}{\partial r^2}.$$

Avec l'équation (C.15) on a alors

$$(C.21) \quad \begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial r^2} \Theta_l^m + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} \Theta_l^m &= (\tilde{\delta}^2 \Theta_l^m)_0 - \frac{1}{3} (h_2 - h_1) \left(\frac{2}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \Theta_l^m - \frac{2}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} \Theta_l^m - Pr \frac{\partial \hat{F}_3}{\partial r} \right) \\ &\quad - \frac{h_1^2 - h_1 h_2 + h_2^2}{12} \left(-\frac{8}{r^3} \frac{\partial}{\partial r} \Theta_l^m + \frac{8}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial r^2} \Theta_l^m + \frac{2}{r} Pr \frac{\partial \hat{F}_3}{\partial r} - Pr \frac{\partial^2 \hat{F}_3}{\partial r^2} \right) \\ &\quad + (h_2 - h_1) \mathcal{O}(h^3) \\ &\quad + \frac{2}{r} \left((\tilde{\delta} \Theta_l^m)_0 - \frac{h_1 h_2}{6} \left(\frac{2}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \Theta_l^m - \frac{2}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} \Theta_l^m - Pr \frac{\partial \hat{F}_3}{\partial r} \right) + \mathcal{O}(h^3) \right). \end{aligned}$$

En remplaçant les opérateurs différentiels par leurs approximations discrètes on obtient alors

$$(C.22) \quad \begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial r^2} \Theta_l^m + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} \Theta_l^m &= (\tilde{\delta}^2 \Theta_l^m)_0 + \frac{2}{r} (\tilde{\delta} \Theta_l^m)_0 \\ &\quad - \frac{1}{3} (h_2 - h_1) \left(\frac{2}{r^2} (\tilde{\delta} \Theta_l^m)_0 - \frac{2}{r} (\tilde{\delta}^2 \Theta_l^m)_0 - Pr (\tilde{\delta} \hat{F}_3)_0 \right) \\ &\quad - \frac{h_1^2 - h_1 h_2 + h_2^2}{12} \left(-\frac{8}{r^3} (\tilde{\delta} \Theta_l^m)_0 + \frac{8}{r^2} (\tilde{\delta}^2 \Theta_l^m)_0 + \frac{2}{r} Pr (\tilde{\delta} \hat{F}_3)_0 - Pr (\tilde{\delta}^2 \hat{F}_3)_0 \right) \\ &\quad + \frac{2}{r} \left(-\frac{h_1 h_2}{6} \left(\frac{2}{r^2} (\tilde{\delta} \Theta_l^m)_0 - \frac{2}{r} (\tilde{\delta}^2 \Theta_l^m)_0 - Pr (\tilde{\delta} \hat{F}_3)_0 \right) \right) + \mathcal{O}(h^2). \end{aligned}$$

La version discrète de l'équation (C.14) s'écrit alors

$$(C.23) \quad \begin{aligned} &(\tilde{\delta}^2 \Theta_l^m)_0 \left(1 + \frac{2(h_2 - h_1)}{3r} - \frac{8(h_1^2 - h_1 h_2 + h_2^2)}{12r^2} + \frac{2h_1 h_2}{3r^2} \right) \\ &+ (\tilde{\delta} \Theta_l^m)_0 \left(\frac{2}{r} - \frac{2(h_2 - h_1)}{3r^2} + \frac{8(h_1^2 - h_1 h_2 + h_2^2)}{12r^3} - \frac{2h_1 h_2}{3r^3} \right) \\ &= -Pr \hat{F}_3 - Pr (\tilde{\delta} \hat{F}_3)_0 \left(\frac{h_2 - h_1}{3} - \frac{(h_1^2 - h_1 h_2 + h_2^2)}{6r} - \frac{2}{r} \right) \\ &\quad - Pr (\tilde{\delta}^2 \hat{F}_3)_0 \left(\frac{(h_1^2 - h_1 h_2 + h_2^2)}{12} \right). \end{aligned}$$

Soit sous forme matricielle

$$\begin{aligned}
 & \left(1 + \frac{2(h_2 - h_1)}{3r} - \frac{8(h_1^2 - h_1h_2 + h_2^2)}{12r^2} + \frac{2h_1h_2}{3r^2} \right) [\tilde{\delta}^2] (\Theta_l^m) \\
 & + \left(\frac{2}{r} - \frac{2(h_2 - h_1)}{3r^2} + \frac{8(h_1^2 - h_1h_2 + h_2^2)}{12r^3} - \frac{2h_1h_2}{3r^3} \right) [\tilde{\delta}] (\Theta_l^m) \\
 (C.24) \quad & = -Pr [Id] (\hat{F}_3) \\
 & - Pr \left(\frac{h_2 - h_1}{3} - \frac{(h_1^2 - h_1h_2 + h_2^2)}{6r} - \frac{2}{r} \right) [\tilde{\delta}] (\hat{F}_3) \\
 & - Pr \left(\frac{(h_1^2 - h_1h_2 + h_2^2)}{12} \right) [\tilde{\delta}^2] (\hat{F}_3) .
 \end{aligned}$$

Notons que pour accroître l'ordre du schéma, on n'a pas seulement introduit une matrice au second membre comme dans l'exemple précédent, mais les coefficients du premier membre du système ont eux même été modifiés.

Il est intéressant de noter également que les modifications par rapport au schéma de différences finies classiques sont toutes en h ou en puissance de h , elles disparaissent dans la limite des petits h (consistance).

On écrira encore ce schéma de manière condensée

$$(C.25) \quad [\tilde{\Delta}_r] \Theta_l^m = -Pr [K_{\tilde{\Delta}_r}] \hat{F}_3 .$$

D'où en remplaçant \hat{F}_3 par son expression

$$(C.26) \quad \frac{\partial}{\partial t} [K_{\tilde{\Delta}_r}] \Theta_l^m = \frac{1}{Pr} [\tilde{\Delta}_r] \Theta_l^m - \frac{1}{Pr} \frac{l(l+1)}{r^2} [K_{\tilde{\Delta}_r}] \Theta_l^m + [K_{\tilde{\Delta}_r}] F_3 .$$

Que l'on peut écrire

$$(C.27) \quad \frac{\partial}{\partial t} [K_{\tilde{\Delta}_r}] \Theta_l^m = \frac{1}{Pr} \underbrace{[\tilde{\Delta}_r] - \frac{l(l+1)}{r^2} [K_{\tilde{\Delta}_r}]}_{[\tilde{\Delta}]} \Theta_l^m + [K_{\tilde{\Delta}_r}] F_3 .$$

Intéressons nous à présent à l'équation du scalaire toroïdal de la vitesse

$$(C.28) \quad \frac{\partial}{\partial t} u_{tl}^m = \Delta u_{tl}^m + E^{-1} i \frac{m}{l(l+1)} u_{tl}^m - E^{-1} \frac{1}{l(l+1)} Q_3 u_{pl}^m + F_2 ,$$

Le terme Q_3 défini précédemment (équation (2.50)) introduit des dérivées radiales des harmoniques de degrés $(l+1)$ et $(l-1)$. En toute rigueur ces dérivées devraient être traitées ici par un opérateur compact, ce qui interdirait de traiter indépendamment les différents degrés. Pour une première approche, nous traiterons donc ce terme par différences classiques, et nous l'incluons au terme F_2 .

$$(C.29) \quad \frac{\partial}{\partial t} u_{tl}^m = \Delta u_{tl}^m + E^{-1} \mathbf{i} \frac{m}{l(l+1)} u_{tl}^m + F'_2,$$

$$(C.30) \quad \frac{\partial}{\partial t} u_{tl}^m = \frac{\partial^2}{\partial r^2} u_{tl}^m + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} u_{tl}^m - \frac{l(l+1)}{r^2} u_{tl}^m + E^{-1} \mathbf{i} \frac{m}{l(l+1)} u_{tl}^m + F'_2,$$

Qui se discrétise donc par le même schéma que l'équation (C.27) :

$$(C.31) \quad \frac{\partial}{\partial t} [K_{\bar{\Delta}_r}] u_{tl}^m = \underbrace{[\tilde{\Delta}_r] - \frac{l(l+1)}{r^2} [K_{\bar{\Delta}_r}]}_{[\tilde{\Delta}]} u_{tl}^m + E^{-1} \mathbf{i} \frac{m}{l(l+1)} [K_{\bar{\Delta}_r}] u_{tl}^m + [K_{\bar{\Delta}_r}] F'_2.$$

Traisons enfin le cas du scalaire poloïdal

$$(C.32) \quad \frac{\partial}{\partial t} \Delta u_{pl}^m = \Delta^2 u_{pl}^m + E^{-1} \mathbf{i} \frac{m}{l(l+1)} \Delta u_{pl}^m + E^{-1} \frac{1}{l(l+1)} Q u_{tl}^m + F'_1,$$

$$(C.33) \quad \frac{\partial}{\partial t} \Delta u_{pl}^m = \Delta^2 u_{pl}^m + E^{-1} \mathbf{i} \frac{m}{l(l+1)} \Delta u_{pl}^m + F'_1,$$

Posons

$$(C.34) \quad X = \Delta u_{pl}^m,$$

on a alors

$$(C.35) \quad \frac{\partial}{\partial t} X = \Delta X + E^{-1} \mathbf{i} \frac{m}{l(l+1)} X + F'_1.$$

On utilise alors pour cette équation le schéma d'ordre deux déjà utilisé pour les deux précédentes

$$(C.36) \quad [K_{\bar{\Delta}_r}] \frac{\partial}{\partial t} X = [\tilde{\Delta}] X + E^{-1} \mathbf{i} \frac{m}{l(l+1)} [K_{\bar{\Delta}_r}] X + [K_{\bar{\Delta}_r}] F'_1.$$

En utilisant alors le schéma également d'ordre deux

$$(C.37) \quad X = [K_{\bar{\Delta}_r}]^{-1} [\tilde{\Delta}] u_{pl}^m,$$

on peut proposer le schéma d'ordre deux

$$(C.38) \quad \frac{\partial}{\partial t} [K_{\bar{\Delta}_r}] [K_{\bar{\Delta}_r}]^{-1} [\tilde{\Delta}] u_{pl}^m = [\tilde{\Delta}] [K_{\bar{\Delta}_r}]^{-1} [\tilde{\Delta}] u_{pl}^m + E^{-1} \mathbf{i} \frac{m}{l(l+1)} [K_{\bar{\Delta}_r}] [K_{\bar{\Delta}_r}]^{-1} [\tilde{\Delta}] u_{pl}^m + [K_{\bar{\Delta}_r}] F'_1,$$

$$(C.39) \quad \frac{\partial}{\partial t} [\tilde{\Delta}] u_{pl}^m = [\tilde{\Delta}] [K_{\bar{\Delta}_r}]^{-1} [\tilde{\Delta}] u_{pl}^m + E^{-1} \mathbf{i} \frac{m}{l(l+1)} [\tilde{\Delta}] u_{pl}^m + [K_{\bar{\Delta}_r}] F'_1.$$

On utilise alors la commutativité, propriété généralement fautive pour le produit matriciel, mais vérifiée ici car les matrices sont symétriques (les matrices des opérateurs sont symétriques car les schémas sont centrés, et les matrices “de masses” sont constitués de combinaisons linéaires de l’identité et de matrices d’opérateurs, elles sont donc également symétriques).

$$(C.40) \quad \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} [\tilde{\Delta}] u_{pl}^m &= [K_{\tilde{\Delta}_r}]^{-1} [\tilde{\Delta}]^2 u_{pl}^m \\ &+ E^{-1} \mathbf{i} \frac{m}{l(l+1)} [\tilde{\Delta}] u_{pl}^m + [K_{\tilde{\Delta}_r}] F'_1, \end{aligned}$$

$$(C.41) \quad \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} [K_{\tilde{\Delta}_r}] [\tilde{\Delta}] u_{pl}^m &= [\tilde{\Delta}]^2 u_{pl}^m \\ &+ E^{-1} \mathbf{i} \frac{m}{l(l+1)} [K_{\tilde{\Delta}_r}] [\tilde{\Delta}] u_{pl}^m + [K_{\tilde{\Delta}_r}]^2 F'_1. \end{aligned}$$

où tous les opérateurs sont pentadiagonaux, comme dans le schéma de différences finies classique.

Index

- aliasing p. 73
- bifurcation p. 125
- Boussinesq (approximation) p. 30, 31
- colonnes de Busse p. 137
- conditions aux limites p. 45
 - isolant électrique p. 46
 - non glissement p. 45, 58
 - sans frottements p. 45, 59
- convection sous critique p. 171
- D.F.C
 - voir différences finies compactes
- décomposition de Mie p. 52–54
- différences finies compactes... p. 192
- effet α p. 99
- effet Ω p. 99
- Ekman
 - couches d' p. 82
 - nombre d' p. 200
 - pompage d' p. 85, 87, 91
 - spirale d' p. 87
- équilibre
 - Géostrophique p. 88, 134
 - Magnétostrophique p. 99
- force
 - Coriolis p. 34
 - Laplace p. 36
- Fourier (loi de) p. 38
- gradient adiabatique p. 30, 129
- Harmoniques Sphériques ... p. 62–73
 - Généralisées p. 69
 - Sectorielles p. 64
 - Zonales p. 64
- Hartmann
 - couche de p. 101, 104
 - nombre p. 102
- instabilité convective p. 124
- Kronecker (symbole) p. 62
- Laplacien Beltrami (L_2) p. 58
- Proudman-Taylor
 - (contrainte) p. 88, 117
- Q_3 (opérateur) p. 57, 58
- Q (fonction) p. 132
- Rossby
 - nombre p. 200
 - ondes p. 137
- Stewartson (couche de) p. 92
- Théorème
 - de Cowling p. 15, 99
- variation séculaire p. 9
- vent thermique p. 125