

### Révision pour le contrôle continu

**Exercice.** Soit  $X$  une variable aléatoire à valeurs dans  $\{-1, 0, 1\}$ . On note

$$p = P(X = 1), \quad q = P(X = -1).$$

On se place dans la situation où  $p$  et  $q$  sont inconnus. On observe  $X_1, \dots, X_n$   $n$  variables aléatoires i.i.d. de même loi que  $X$  et on cherche à estimer  $p - q$ . On pose

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i.$$

(a) Calculer l'espérance et la variance de  $\bar{X}$ .

(b) Montrer que  $\text{Var}(\bar{X}) \leq (1 - (p - q)^2)/n$ . En déduire que pour tout  $\varepsilon > 0$  on a

$$P\left(|\bar{X} - (p - q)| > \varepsilon \sqrt{1 - (p - q)^2}\right) \leq \frac{1}{n\varepsilon^2}.$$

(c) Montrer que pour tout  $\alpha \in ]0, 1]$  on a

$$P\left(\bar{X} - \frac{1}{1 + n\alpha} \sqrt{n\alpha(1 - \bar{X}^2) + 1} \leq p - q \leq \bar{X} + \frac{1}{1 + n\alpha} \sqrt{n\alpha(1 - \bar{X}^2) + 1}\right) \geq 1 - \alpha.$$