Théorème de Hewitt et Savage

On considère le domaine $D = \mathbb{R}^{2d}$, et l'ensemble $\mathcal{P}(D^{\mathbb{N}})$ des mesures de probabilité sur $D^{\mathbb{N}}$ muni de sa tribu borélienne $\mathcal{B}_{D^{\mathbb{N}}}$.

Définition (Ensemble des probabilités symétriques)**.** On appelle *ensemble des probabilités symétriques* sur $D^{\mathbb{N}}$, noté $\mathcal{P}_{sym}(D^{\mathbb{N}})$, l'ensemble des mesures $m \in \mathcal{P}(D^{\mathbb{N}})$ telles que

$$\forall (A_1 \otimes A_2 \otimes \cdots) \in \mathcal{B}_{D^{\mathbb{N}}},\ \forall \sigma \in \mathcal{S}_{\mathbb{N}},\ \#\{\sigma(i) \neq i\} < \infty \Rightarrow m(A_{\sigma(1)} \otimes A_{\sigma(2)} \otimes \cdots) = m(A_1 \otimes A_2 \otimes \cdots). \quad (1)$$

Définition (Marginale d'une mesure)**.** Pour une mesure $m \in \mathcal{P}\left(D^{\mathbb{N}}\right)$, on définit m_k sa k-ème marginale sur D^k muni de sa tribu borélienne par

$$\forall A \in \mathcal{B}_{D^k},\ m_k(A) = m(A \times D \times D \times \cdots). \quad (2)$$

Remarque. Une probabilité dont toutes les marginales sont symétriques est symétrique.

Théorème (de Hewitt et Savage)**.** *Soit $\mu \in \mathcal{P}_{sym}(D^{\mathbb{N}})$. Il existe une probabilité $\pi \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(E))$ telle que*

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \mu_k = \int_{\mathcal{P}(D)} \rho^{\otimes k} \mathrm{d}\pi(\rho). \quad (3)$$