

Cours de mathématiques à l'intention des littéraires

Première feuille d'exercices

1 - Un peu de formalisme logique

Exercice 1.

1. Exprimer les propriétés de commutativité et d'associativité d'une LCI dans le formalisme mathématique.
2. Même chose pour « Étant donnés trois nombres réels, il y en a au moins deux de même signe. ».

Exercice 2.

Donner la négation de

1. $\exists(x, y) \in E^2 : xy = 0$.
2. $\forall x \in E, \forall y \in F, x \neq y \Rightarrow x^2 \neq y^2$.

Exercice 3.

Est-ce que

1. $\exists x \in \mathbb{Z} : \exists y \in \mathbb{Z} : x \leq -y^2$?
2. $\exists x \in \mathbb{Z} : \forall y \in \mathbb{Z}, x \leq -y^2$?
3. $\forall x \in \mathbb{Z}, \exists y \in \mathbb{Z} : x \leq -y^2$?
4. $\forall x \in \mathbb{Z}, \forall y \in \mathbb{Z}, x \leq -y^2$?

2 - Opérations sur les ensembles

Exercice 4.

Que dire de deux ensembles tels que $A \cap B = A \cup B$?

Exercice 5.

Montrer que $A \cap B = A \cap C$ et $A \cup B = A \cup C \Rightarrow B = C$.

Exercice 6.

Quelle relation existe-t-il entre $\mathcal{P}(E \cup F)$ et $\mathcal{P}(E) \cup \mathcal{P}(F)$? Même question avec l'intersection.

Exercice 7.

Pour A et B deux parties d'un ensemble E , on définit leur *différence symétrique*

$$A \Delta B \doteq (A \cup B) \setminus (A \cap B).$$

1. Faire un dessin, puis calculer $\{0, 1, 2, 3\} \Delta \{1, 3, 4\}$.
2. Montrer que $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.
3. Supposons que $A \Delta B = A \cap B$. Montrer que $A = B = \emptyset$.
4. Montrer que $A \Delta B = A \Delta C \Leftrightarrow B = C$.
5. Résoudre l'équation $A \Delta X = \emptyset$ d'inconnue $X \in \mathcal{P}(E)$.

3 - Récurrence

On veut montrer la propriété suivante $P(n)$: « 3 divise $4^n + 2$. » pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer $P(0)$.
2. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, P(n) \Rightarrow P(n + 1)$.
3. En utilisant que tout ensemble non-vide de \mathbb{N} admet un plus petit élément, montrer la propriété souhaitée par contraposée.
4. Montrer que « 6 divise $7^n + 1$ » implique « 6 divise $7^{n+1} + 1$ ». Que peut-on en déduire ?