Cours de mathématiques à l'intention des littéraires

Troisième feuille d'exercices - Synthèse sur la Logique et les Ensembles

1 - Applications et cardinaux

Exercice 1. (Bijections réciproques)

1. Montrer que si $f \circ g$ est injective, alors g l'est aussi. Donner un exemple dans lequel $f \circ g$ est injective mais f ne l'est pas.
2. Montrer que si $f \circ g$ est surjective, alors f l'est aussi. Donner un exemple dans lequel $f \circ g$ est surjective mais g ne l'est pas.
3. En déduire que si $\sigma : X \to Y$ est une application telle qu'il existe $\tilde{\sigma} : Y \to X$ avec $\sigma \circ \tilde{\sigma} = \mathrm{id}_Y$ et $\tilde{\sigma} \circ \sigma = \mathrm{id}_X$, alors σ est une bijection, avec $\sigma^{-1} = \tilde{\sigma}$.

Exercice 2. (Cardinalité et bijections)

1. On a vu que deux ensembles finis en bijection ont même cardinal. Réciproquement, montrer que si X et Y ont même cardinal, être une injection de X dans Y est équivalent à être une surjection.
2. Dans le cadre de la question 3 de l'exercice 1, en déduire que si X et Y ont même cardinal, alors une seule des deux conditions est suffisante.

Exercice 3. (Exercices d'application)

1. On considère $\sigma : \begin{array}{ccc} [\![0,31]\!] & \to \{0,1\}^5 \\ n & \mapsto & \begin{pmatrix} 0 & \text{si } \left\lfloor \frac{n}{2^k} \right\rfloor \text{ est pair} \\ 1 & \text{sinon} \end{pmatrix}_{k \in [\![0,4]\!]} \end{array}$.

   Montrer que σ est une bijection avec $\sigma^{-1}\left((a_i)_{i\in[\![0,4]\!]}\right) = a_0 + 2 \times a_1 + 2^2 \times a_2 + 2^3 \times a_3 + 2^4 \times a_4$.
2. Dénombrer le nombre d'injections de l'ensemble fini X dans l'ensemble fini Y.

Exercice 4. (Principe des tiroirs de Dirichlet)

1. Tout individu possède entre 0 et 500 000 cheveux. Supposons que Paris compte 2 millions d'habitants. Montrer qu'il existe au moins 4 personnes à Paris qui possèdent exactement le même nombre de cheveux.
2. (Généralisation). Soit $f : E \to F$ non-vides finis, avec $|E| > q|F|$ pour $q \in \mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Montrer qu'il existe un élément $a \in F$ possédant au moins $q+1$ antécédents par f.

2 - Principe de récurrence

Pour une application $f : X \to \mathbb{R}$, il est possible de définir la multiplication de f par un réel $\lambda \in \mathbb{R}$ ainsi :

$$\lambda \cdot f : \begin{array}{ccc} X & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \lambda \times f(x). \end{array}$$

1. Montrer qu'une application $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ satisfaisant

$$\forall (a,b) \in \mathbb{N}^2,\ f(a+b) = f(a) + f(b)$$

   est nécessairement un multiple de l'application identité (on parle d'application *linéaire*).
2. Montrer le même résultat en remplaçant $\mathbb{N}$ par $\mathbb{Q}$.

3 - Une autre preuve de l'indénombrabilité de $\mathbb{R}$

1. Montrer qu'il n'existe pas de surjection de X dans l'ensemble $\mathcal{P}(X)$ des parties de X.
2. En utilisant l'écriture binaire des nombres réels, montrer que $\mathbb{R}$ est en bijection avec $\mathcal{P}(\mathbb{N})$.
3. Conclure.

`www.math.ens.psl.eu/~ffougeres`
Florent Fougères, florent.fougeres [at] ens.fr, bureau C21 (espace Cartan)