

Cours de mathématiques à l'intention des littéraires

Quatrième feuille d'exercices - Suites numériques (I) et Calculs

1 - Suites numériques

Exercice 1 . Calculer les quatre premiers termes des suites suivantes.

1. $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 3n + 1$.
2. $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = (-1)^n \times n$.
3. $\begin{cases} u_0 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 2u_n + 2. \end{cases}$

Exercice 2 .

1. Donner un exemple de suite non-croissante et non-majorée.
2. Donner un exemple de suite bornée et non-monotone.
3. Les suites de l'exercice 1 sont-elles bornées ? Monotones ?
4. Déterminer explicitement la suite donnée par $u_0 = 3$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + 4$.

2 - Suites et limites

Exercice 3 .

1. Montrer que la suite $\left(\frac{4}{n+1}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ converge.
2. Montrer que la suite $\left(\frac{n}{6}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ diverge.
3. Montrer que la suite $((-1)^n \times n)_{n \in \mathbb{N}}$ diverge.

Exercice 4 . (Unicité de la limite) Le but de cet exercice est de montrer l'unicité de la limite, c'est-à-dire que si $u_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \ell \in \mathbb{R}$ et $u_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \ell' \in \mathbb{R}$, alors $\ell = \ell'$. Par l'absurde, supposons que $\ell \neq \ell'$.

1. Commençons par traiter le cas $\ell < \ell'$.
 - (a) Montrer qu'à partir d'un certain rang, on a $u_n > \frac{\ell + \ell'}{2}$.
 - (b) Montrer qu'à partir d'un certain rang, on a $u_n < \frac{\ell + \ell'}{2}$.
 - (c) Conclure le cas $\ell < \ell'$.
2. Conclure à l'unicité de la limite.

Exercice 5 . (Inégalités des limites) Montrer que si deux suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergent respectivement vers des limites ℓ et ℓ' , telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $u_n \leq v_n$, alors $\ell \leq \ell'$.

3 - Exercices de pratique calculatoire

Exercice 6. En supposant qu'un engrenage à 10 dents tournant à une vitesse de 12 tours par seconde entraîne un autre possédant 15 dents, et sachant que le rapport du nombre de dents est égal au rapport des vitesses, calculer la vitesse de rotation du second engrenage.

Exercice 7. Résoudre les équations suivantes, d'inconnue x , en simplifiant les fractions.

1. $3x - 2 = 4$.
2. $6x + 3 = -2$.
3. $3x - \frac{1}{2} + \frac{4}{7} = 0$.
4. $\frac{2+x}{3} - \frac{1}{6} = 1$.