Cours de mathématiques à l'intention des littéraires

Cinquième feuille d'exercices - Suites numériques (II) et Séries

1 - Suites numériques

Exercice 1 . Montrer qu'une suite convergente est nécessairement bornée.

Exercice 2 . Étudier la convergence des suites suivantes.

1. $a_n = \dfrac{3}{n} - 2.$
2. $b_n = \dfrac{-2}{n} + n^2.$
3. $c_n = \left(9 + \dfrac{1}{4n}\right) \times \dfrac{2}{n}.$
4. $d_n = \left(9 + \dfrac{1}{4n}\right) \times \dfrac{2}{3}.$
5. $e_n = \dfrac{1}{\frac{1}{n} - \frac{1}{2}}.$
6. $f_n = \dfrac{1}{\frac{1}{n} - \frac{2}{n^2}}.$

Exercice 3. Montrer qu'une suite croissante non-majorée diverge vers $+\infty$.

2 - Séries

Exercice 3 . Étudier la convergence de la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n$.

Exercice 4 . (Série harmonique) Le but de cet exercice est de montrer la divergence de la série harmonique

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}.$$

Par l'absurde, en supposant que la série harmonique converge et en considérant les sommes partielles

$$h_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k},$$

que dire de la convergence de $h_{2n} - h_n$? Qu'en déduire ?

Exercice 5 . (Télescopage et série de Riemann) Pour tout $n \geq 1$, calculer

$$\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}.$$

Par les théorèmes de comparaison des limites, en déduire que les sommes partielles $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$ sont bornées et ne diverge donc pas vers $+\infty$.

Exercice 6 . (Télescopage et série géométrique)

1. Pour $0 < q < 1$, calculer $(1-q)\displaystyle\sum_{i=1}^{n} q^i$.
2. En déduire une expression de $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} q^i$.
3. Calculer la somme de la série géométrique $\displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} q^i$.

www.math.ens.psl.eu/~ffougeres
Florent Fougères, florent.fougeres [at] ens.fr, bureau C21 (espace Cartan)