Analyse Fonctionnelle

Isabelle Gallagher

École Normale Supérieure de Paris
Année universitaire 2019–2020

Mis à jour le 20 mai 2020

Table des matières

Chapitre A. Sur les espaces de Fréchet, de Banach et de Hilbert 1
A.1. Espaces de Fréchet 1
A.1.1. Rappels de topologie 1
A.1.2. Théorème de Baire 1
A.1.3. Semi-normes 3
A.1.4. Espaces de Fréchet 4
A.1.5. Théorème de Banach-Steinhaus 5
A.1.6. Théorèmes de l'application ouverte et du graphe fermé 6
A.2. Théorèmes de Hahn-Banach 8
A.2.1. Rappels sur le lemme de Zorn 8
A.2.2. Théorème de Hahn-Banach (forme analytique) 9
A.2.3. Théorème de Hahn-Banach (forme géométrique) 11
A.2.4. Application : théorème de Krein-Milman 16
A.3. Dualité et topologies faibles 17
A.3.1. Premières définitions 17
A.3.2. Topologies faibles et espaces de Banach 18
A.3.3. Espaces réflexifs 22
A.3.4. Uniforme convexité 25
A.3.5. Espaces séparables 26
A.3.6. Espaces de Lebesgue 29
A.4. Espaces de Hilbert 31
A.4.1. Définitions et première propriétés 31
A.4.2. Théorèmes de Riesz, de Stampacchia et de Lax-Milgram 34
A.4.3. Bases hilbertiennes et séries de Fourier 37

Chapitre B. Distributions 40
B.1. Quelques rappels 40
B.2. Limites inductives et topologie de $D(\,)$ 40
B.2.1. Sur les fonctions C^1 à support compact 40
B.2.2. Limites inductives 43
B.3. Distributions 47
B.3.1. Définition, exemples et premières propriétés 47
B.3.2. Distributions à support compact 50
B.4. Dérivation des distributions 53
B.5. Autres exemples de distributions 58
B.5.1. Mesures de Radon 58
B.5.2. Mesure de surface et distributions de simple couche 59
B.5.3. Formule des sauts 60
B.6. Produit de convolution 63
B.7. L'espace de Schwartz et les distributions tempérées 67

B.8. Solutions fondamentales d'opérateurs différentiels 71

Chapitre C. Transformation de Fourier 75
C.1. Transformation de Fourier des fonctions sommables 75
C.2. Transformation de Fourier des fonctions de la classe de Schwartz 78
C.3. Transformation de Fourier des distributions tempérées 79
C.4. Transformation de Fourier des fonctions de carré sommable 82
C.5. Transformation de Fourier des distributions à support compact 83
C.6. Transformation de Fourier et séries de Fourier 85
C.7. Espaces de Sobolev 89
C.7.1. Espaces de Sobolev sur $\mathbf{R}^d$ 89
C.7.2. Injections de Sobolev 93
C.7.3. Trace et relèvement 95
C.7.4. Espaces de Sobolev sur un ouvert de $\mathbf{R}^d$ 97

Chapitre D. Analyse spectrale 100
D.1. Opérateurs 100
D.1.1. Définitions et notations 100
D.1.2. Opérateurs de rang fini et opérateurs compacts 102
D.1.3. Alternative de Fredholm 103
D.1.4. Spectre d'opérateurs : définitions et premières propriétés 106
D.2. Spectre des opérateurs compacts 109
D.2.1. Structure spectrale des opérateurs compacts 109
D.2.2. Théorème spectral des opérateurs compacts auto-adjoints 110
D.3. Spectre des opérateurs bornés auto-adjoints 112
D.4. Spectre des opérateurs non bornés auto-adjoints 115

Chapitre E. Opérateurs maximaux monotones 116
E.1. Définition et premières propriétés 116
E.2. Théorème de Hille-Yosida 118

Chapitre F. Application à la résolution d'EDP 123
F.1. Le problème de Dirichlet homogène 123
F.1.1. Résolution du problème de Dirichlet 123
F.1.2. Fonctions propres et décomposition spectrale 124
F.2. L'équation de la chaleur dans un domaine borné 124
F.2.1. Méthode variationnelle 125
F.2.2. Méthode spectrale 126
F.3. L'équation de la chaleur dans l'espace entier 126
F.4. L'équation de Schrödinger dans l'espace entier 128

Bibliographie 130

Index 131

Chapitre A

Sur les espaces de Fréchet, de Banach et de Hilbert

A.1. Espaces de Fréchet

A.1.1. Rappels de topologie.

Rappels. Un espace vectoriel (réel) topologique E est un espace vectoriel muni d'une topologie rendant continues les applications

$$(x;y) \in E \quad E \text{ 7! } x+y \in E; \quad (\ ;x\ ) \in \mathbb{R} \quad E \text{ 7! } \quad x \in E:$$

Une application entre deux espaces vectoriels topologiques E et F est continue si et seulement si l'image réciproque de tout ouvert de F est un ouvert de E.

Un espace topologique est dit *séparé* si deux points distincts admettent des voisinages distincts.

Un espace topologique est dit *localement compact* s'il est séparé et si tout point admet un système fondamental de voisinages [1] compacts, c'est-à-dire que pour tout x_0 il existe un ensemble B de voisinages compacts de x_0 tels que tout voisinage de x_0 contienne un élément de B. Par exemple $\mathbb{R};]a;b[; \mathbb{R}^n$ sont localement compacts. En revanche $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ ne le sont pas.

Dans tout espace topologique X, l'intersection d'une famille finie d'ouverts denses est encore dense (si $(U_i)_{0 \ i \ n}$ est une telle famille et V est un ouvert non vide de X, alors $V \setminus U_0$ est un ouvert non vide de X car U_0 est dense, et ainsi de suite). Cette propriété ne se généralise pas aux familles infinies, même dénombrables (par exemple si $X = \mathbb{Q}$, muni de la topologie induite de la topologie usuelle sur $\mathbb{R}$, alors $(\mathbb{Q} \setminus \{x\})_{x \in \mathbb{Q}}$ est une famille dénombrable d'ouverts denses dont l'intersection est vide).

A.1.2. Théorème de Baire.

Définition A.1.1. *Un espace topologique est dit de Baire si l'intersection d'une famille dénombrable d'ouverts denses est dense dans cet espace.*

Théorème A.1.2 (Baire, 1874-1932)**.** *Les espaces topologiques localement compacts et les ouverts d'un espace métrique complet sont des espaces de Baire.*

Démonstration. Nous ne démontrerons que le premier cas, l'autre a été traité dans le cours de Topologie et Calcul Différentiel du premier semestre.

Soit donc X un espace topologique localement compact et soit $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une famille dénombrable d'ouverts denses. Soit V un ouvert non vide de X et montrons que $V \setminus (\bigcap_{n \in \mathbb{N}} U_n)$ est non vide. On sait que $V \setminus U_0$ est non vide, soit donc $x_0 \in V \setminus U_0$ et soit V_0 un voisinage ouvert de x_0 avec $\overline{V_0}$ compact inclus dans $V \setminus U_0$ (un tel V_0 existe parce que X est localement compact). On construit ainsi par récurrence une suite de points $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et une famille d'ouverts $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tels que V_n est un voisinage ouvert de $x_n \in V_{n-1} \setminus U_n$ et $\overline{V_n}$ est un compact inclus dans $V_{n-1} \setminus U_n$. Alors $\bigcap \overline{V_n}$ est une intersection décroissante de compacts non vides de $\overline{V}$, qui est non vide et contenue dans $V \setminus (\bigcap_{n \in \mathbb{N}} U_n)$. D'où le résultat.

1. On rappelle que U est un voisinage de x_0 si U contient un ouvert contenant x_0.

Exercice. Tout ouvert d'un espace de Baire est de Baire.

Corollaire A.1.3. *Soit X un espace de Baire. Une réunion dénombrable de fermés d'intérieur vide de X est d'intérieur vide dans X.*

Si la réunion d'une famille dénombrable de fermés de X est d'intérieur non vide dans X, alors l'un des fermés est d'intérieur non vide dans X.

Démonstration. Exercice.

Définition A.1.4. *a) Une partie d'un espace topologique est dite maigre, ou négligeable au sens de Baire, si elle est contenue dans une réunion dénombrable de fermés d'intérieur vide.*

b) Un G-dense est une intersection dénombrable d'ouverts denses.

c) Une propriété portant sur les points d'un espace topologique est vraie presque partout au sens de Baire si elle est vraie en dehors d'un ensemble maigre (donc au moins sur un G-dense).

Exemples. L'ensemble $\mathbb{Q}$ est maigre dans $\mathbb{R}$. L'ensemble $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ est un G-dense dans $\mathbb{R}$. Le corollaire A.1.6 ci-dessous indique qu'une fonction dérivable est de classe C^1, Baire presque partout.

Attention. Ne pas confondre *presque partout au sens de Baire* et *presque partout au sens des mesures*! (voir Exercices).

Proposition A.1.5. *Soit X un espace de Baire et Y un espace métrique. Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'applications continues de X dans Y, convergeant simplement vers une application f. Alors f est continue presque partout au sens de Baire.*

Démonstration. On définit les fermés, pour tous les entiers naturels n, p, q,

$$F_{n;p;q} := \left\{ x \in X \mid d\left(f_p(x), f_q(x)\right) \leq \frac{1}{n} \right\} \quad \text{et} \quad F_{n;p} := \bigcap_{q \geq p} F_{n;p;q}.$$

Pour tout $x \in X$, $f_p(x)$ converge vers $f(x)$ quand p tend vers l'infini, donc la suite $(f_p(x))_{p \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy pour tout $x \in X$ et donc

$$X = \bigcup_{p \in \mathbb{N}} F_{n;p},$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$. Soit U un ouvert non vide de X, alors U est de Baire. En écrivant

$$U = \bigcup_{p \in \mathbb{N}} F_{n;p} \cap U$$

réunion dénombrable de fermés de U, il existe par le corollaire A.1.3 un entier p_0 tel que l'intérieur de $F_{n;p_0} \cap U$ dans U soit non vide. Notons-le $A_{n;U}$. Comme U est ouvert, l'ensemble $A_{n;U}$ est inclus dans $F_{n;p_0}$. Donc l'union sur tout les ouverts U des $A_{n;U}$, notée A_n, est un ouvert dense. Notons $A := \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$, qui est un G-dense, et montrons que f est continue en tout point de A. Soit $a \in A$. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que a appartient à l'intérieur de $F_{n;p}$. Soit donc $n \in \mathbb{N}$ et $p \in \mathbb{N}$ associé. Par continuité de f_p il existe un voisinage de a dans lequel tout a' vérifie

$$d\left(f_p(a), f_p(a')\right) \leq \frac{1}{n}.$$

Par ailleurs tous les points x de $F_{n;p}$ vérifient

$$d\left(f_p(x), f(x)\right) = \lim_{q \to +\infty} d\left(f_p(x), f_q(x)\right) \leq \frac{1}{n}.$$

Le résultat suit alors par l'inégalité triangulaire : on a pour tout a^0 dans $F_{n;p}$ suffisamment proche de a

$$d\ f(a^0);f(a) \quad d\ f(a^0);f_p(a^0) + d\ f_p(a^0);f_p(a) + d\ f_p(a);f(a) \quad 3\ 2^{\ n}$$

et la proposition est démontrée.

Corollaire A.1.6. *Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, F un espace de Banach et $f : I \to F$ une application dérivable. Alors f' est continue Baire presque partout.*

Démonstration. Il suffit d'appliquer la proposition précédente à

$$f_n(x) := 2^{\ n}\ f(x + 2^{\ n}) \quad f(x) \ ;$$

ce qui démontre le résultat.

A.1.3. Semi-normes.

Définition A.1.7. *Soit E un espace vectoriel. On appelle semi-norme sur E toute application $p : E \to \mathbb{R}^+$ sous-additive et absolument homogène :*

$$\forall (x;y) \in E \quad E; \quad p(x+y) \quad p(x) + p(y);$$
$$\forall \ \in \mathbb{R}; \quad \forall x \in E; \quad p(\ x) = |\ |p(x) :$$

On dit qu'une famille P de semi-normes sépare les points (ou est séparante) si

$$p(x) = 0 \ \ \forall p \in P \quad \Rightarrow \quad x = 0 :$$

Exemples. Une norme est une semi-norme qui sépare les points.

Soit $E = C(]0;1[;\mathbb{R})$. La famille définie par $p_a(f) := |f(a)|$ est une semi norme pour tout $a \in]0;1[$ et $P := (p_a)_{a \in]0;1[}$ est une famille de semi-normes qui sépare les points.

Soit $P = (p\ )_{\ \in A}$ une famille de semi-normes. Les ouverts de la topologie associée à P sont les parties U de E telles que

$$\forall x \in U; \quad \exists B \ \ A \neq \ ; \text{ fini et } r > 0 \text{ tels que}$$
$$B_B(x;r) := \{y \in E \mid \forall \in B ; p\ (x \quad y) < r\} \quad U : \tag{A.1}$$

On rappelle que dans un espace vectoriel topologique E, une suite (x_n) converge vers X si et seulement si pour tout voisinage ouvert U de l'origine, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $x_n \quad x \in U$ pour tout $n \quad N$.

Proposition A.1.8. *Soit E un espace vectoriel topologique muni d'une famille de semi-normes $P = (p\ )_{\ \in A}$. Une suite de points (x_n) de E converge vers $x \in E$ pour la topologie associée si et seulement si pour tout $\in A$, $p\ (x_n \quad x)$ converge vers 0.*

Démonstration. Exercice.

Remarques. a) E est séparé si et seulement si P sépare les points.

b) Si P et P' sont deux familles de semi-normes avec $P \quad P'$ alors la topologie associée à P' est plus fine que celle associée à P (dans le sens où les ouverts pour P sont ouverts pour P').

On rappelle qu'un ensemble A d'un espace vectoriel topologique E est borné si pour tout voisinage V de l'origine, il existe une constante $C > 0$ telle que $A \quad C\ V$.

Proposition A.1.9. *Soit E un espace vectoriel topologique muni d'une famille séparante de semi-normes $P = (p\ )_{\ \in A}$. Un ensemble $A \quad E$ est borné si et seulement si pour tout $\in A$ il existe C tel que*

$$\forall x \in A; \quad p\ (x) < C \ :$$

Démonstration. Supposons A borné. Par la définition (A.1), pour tout $\in A$ l'ensemble

$$V := \{x \in E = p(x) < 1\}$$

est un voisinage ouvert de 0 donc il existe une constante $C > 0$ telle que $A \subset CV$. Par homogénéité de p on a donc

$$\forall x \in A, \quad p(x) < C :$$

Inversement supposons cette assertion vraie pour tout $\in A$. On sait que tout ouvert de E voisinage de 0 contient un ensemble du type

$$V = \bigcap_{=1}^{L} \{x \in E = p_j(x) < \varepsilon_j\}$$

pour un certain choix de $L; p_{1}, \ldots, p_{L}; \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_L$. On vérifie alors que

$$A \subset CV \quad \text{avec} \quad C = 2 \max_{1 \le j \le L} \frac{C_j}{\varepsilon_j}$$

La proposition est démontrée.

A.1.4. Espaces de Fréchet.

Définition A.1.10 (Fréchet (1878-1973))**.** *On dit qu'un espace vectoriel E est un pré-Fréchet s'il existe une famille dénombrable $P = (p_j)_{j \in \mathbb{N}}$ de semi-normes séparantes sur E telles que*

$$p_j(x) \le p_{j+1}(x); \quad \forall j \in \mathbb{N}; \quad \forall x \in E :$$

Notons que l'hypothèse de croissance n'est pas strictement nécessaire mais on peut toujours s'y ramener en remplaçant p_j par $\sum_{k \le j} p_k$ par exemple. La topologie d'un pré-Fréchet est métrisable avec la distance (invariante par translation)

$$d(x; y) := \sum_{j \in \mathbb{N}} 2^{-j} \min(1; p_j(x - y)) :$$

Définition A.1.11. *Un espace de Fréchet est un pré-Fréchet complet.*

Exemples. a) Soit K un compact de $\mathbb{R}^n$. L'ensemble des fonctions $C^1(K)$ est un espace de Fréchet, muni des semi-normes

$$\forall j \in \mathbb{N}; \quad p_j(f) := \sup_{j \le j} \sup_{x \in K} |\partial f(x)| :$$

b) L'espace $L^p_{loc}(\mathbb{R}^n)$ est un Fréchet (considérer les applications $f \mapsto \|f\|_{L^p(K_j)}$ pour K_j suite exhaustive de compacts de $\mathbb{R}^n$).

c) Tout sous-espace fermé d'un Fréchet est un Fréchet.

Remarque. Si est un ouvert de $\mathbb{R}^n$, il est beaucoup plus difficile de définir sur l'ensemble des fonctions $C^1(\ )$ à support compact une «bonne» topologie. On y reviendra au Chapitre B.

Lemme A.1.12. *Soient $(E; (p_j)_{j \in \mathbb{N}})$ et $(F; (q_k)_{k \in \mathbb{N}})$ deux pré-Fréchet, et soit T une application linéaire de E dans F. Alors T est continue si et seulement si*

$$\forall k \in \mathbb{N}; \quad \exists C > 0; j \in \mathbb{N}; \quad \forall x \in E; \quad q_k(Tx) \le C p_j(x) : \tag{A.2}$$

Démonstration. Supposons que l'application T est linéaire continue. Alors pour tout entier k, il existe un voisinage ouvert U de l'origine tel que

$$\forall x \in U ; \quad q_k(Tx) < 1 :$$

Mais il existe $j \in \mathbb{N}$ et $\varepsilon > 0$ tels que

$$\{ x \in E = p_j(x) < \varepsilon \} \quad U$$

et le résultat (A.2) suit alors par homogénéité. Soit en effet $x \in E$. Dans le cas où $p_j(x) = 0$ alors $x \in U$, et par homogénéité $x \in U$ pour tout > 0. Alors $q_k(Tx) < 1 =$ pour tout > 0 et donc $q_k(Tx) = 0$. Si en revanche $p_j(x) \neq 0$ alors $\frac{\varepsilon}{2p_j(x)} x$ appartient à U et donc

$$q_k(Tx) = \frac{2}{\varepsilon} p_j(x) q_k \left(\frac{\varepsilon}{2p_j(x)} Tx \right) \quad \frac{2}{\varepsilon} p_j(x) :$$

Inversement soit $T : E \to F$ une application linéaire et supposons que (A.2) soit satisfaite. Soit $x \in E$. Si U est un voisinage ouvert de Tx dans F alors il existe $k \in \mathbb{N}$ et $\varepsilon > 0$ tels que

$$\{ y \in F = q_k(Tx \quad y) < \varepsilon \} \quad U :$$

Par hypothèse il existe $C > 0$ et $j \in \mathbb{N}$ tels que si

$$p_j(x \quad x^0) \quad \frac{\varepsilon}{C}$$

alors

$$q_k(Tx \quad Tx^0) \quad \varepsilon$$

et donc Tx^0 appartient à U. Le résultat suit.

A.1.5. Théorème de Banach-Steinhaus.

Théorème A.1.13 (1927 ; Banach 1892-1945, Steinhaus 1887-1972)**.** *Soient E un espace de Fréchet muni d'une famille de semi-normes (p_j) et F un pré-Fréchet muni d'une famille de semi-normes (q_k). On considère une famille $(T_\alpha)_{\alpha \in A}$ d'applications linéaires continues de E dans F telles que pour tout $x \in E$, la famille $(T_\alpha x)_{\alpha \in A}$ est bornée dans F. Alors $(T_\alpha)_{\alpha \in A}$ est équi-continue : plus précisément*

$$\forall k \in \mathbb{N} ; \quad \exists C > 0 ; \exists j \in \mathbb{N} ; \quad \forall x \in E ; \quad \forall \alpha \in A ; \quad q_k(T_\alpha x) \quad C p_j(x) :$$

Dans le cas où E et F sont des espaces de Banach cela signifie qu'il existe $C > 0$ telle que

$$\forall x \in E ; \quad \forall \alpha \in A ; \quad \|T_\alpha x\|_F \quad C \|x\|_E :$$

Démonstration. Soit $k \in \mathbb{N}$ fixé. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on considère

$$E_n := \{ x \in E = \forall \alpha \in A ; \quad q_k(T_\alpha x) \quad n \} :$$

L'ensemble E_n est fermé, et par l'hypothèse du théorème on a

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n = E :$$

Par le théorème de Baire (Corollaire A.1.3) il existe un entier $N \in \mathbb{N}$ tel que l'intérieur de E_N est non vide. Soit alors $x_0 \in E$ et un voisinage V ouvert de 0 dans E, tels que $x_0 + V \quad E_N$. Ce voisinage contient

$$B_{j;\varepsilon} := \{ x \in E = p_j(x) < \varepsilon \}$$

pour un certain entier j et un certain réel $" > 0$. Alors pour tout $x \in B_{j;1}$

$$q_k(T\ x) = \frac{1}{"} q_k\ T\ ("x)$$
$$\frac{1}{"}\ q_k\ T\ (x_0 + "x)\ + q_k(T\ x_0) \qquad \frac{2N}{"}$$

Le théorème suit par homogénéité.

Corollaire A.1.14. *Soient E un espace de Fréchet et F un pré-Fréchet. On considère une famille $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'applications linéaires continues de E dans F convergeant simplement vers T. Alors T est linéaire continue de E dans F. De plus si (x_n) converge vers x dans E alors $(T_n x_n)$ converge vers Tx dans F.*

Démonstration. Exercice.

A.1.6. Théorèmes de l'application ouverte et du graphe fermé.

Théorème A.1.15 (Application ouverte)**.** *Soient E et F deux espaces de Fréchet et T une application de E dans F linéaire, continue et surjective. Alors T est ouverte, c'est-à-dire que l'image par T de tout ouvert de E est un ouvert de F. Si T est bijective alors c'est un homéomorphisme.*

Démonstration. On munit E et F d'une famille de semi-normes et on leur associe la topologie définie au Paragraphe A.1.3 ainsi que les distances d_E et d_F associées (voir le Paragraphe A.1.4). On veut montrer que

$$\forall " > 0;\quad \exists\ > 0;\quad \forall x \in E;\quad B_F(Tx;\ )\quad T\ B_E(x;") :$$

Montrons tout d'abord que

$$\forall r > 0;\quad \exists\ > 0;\quad \forall x \in E;\quad B_F(Tx;\ )\quad \overline{T\ B_E(x;r)} :$$

Par invariance par translation de la distance associée aux semi-normes et par linéarité de T, il suffit de démontrer

$$\forall r > 0;\quad \exists\ > 0;\quad B_F(0;\ )\quad \overline{T\ B_E(0;r)} : \tag{A.3}$$

Commençons par montrer le résultat pour $x = 0$. Soit donc $r > 0$, et soit $F_n := n\overline{T\ B_E(0;\frac{r}{2})}$. Alors $F = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n$ car T est linéaire surjective et

$$E = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} nB_E(0;\frac{r}{2}) :$$

Donc par le théorème de Baire (Corollaire A.1.3), il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que l'intérieur de F_N est non vide. Donc l'intérieur de $\overline{T\ B_E(0;\frac{r}{2})}$ est non vide (car les homothéties sont des homéomorphismes). Donc il existe $y \in F$ et $\ > 0$ tel que $B_F(y;\ )\quad \overline{T\ B_E(0;\frac{r}{2})}$. On écrit alors

$$B_F(0;\ ) = \quad y + B_F(y;\ )$$
$$y + \overline{T\ B_E(0;\frac{r}{2})}$$

et donc par symétrie et par linéarité de T,

$$B_F(0;\ )\quad \overline{T\ B_E(0;\frac{r}{2})} + \overline{T\ B_E(0;\frac{r}{2})}$$
$$\overline{T\ B_E(0;r)} :$$

Le résultat (A.3) suit.

Pour conclure montrons plus généralement le résultat suivant : si X et Y sont deux espaces métriques avec X complet et si T est une application continue de X dans Y vérifiant

$$8r > 0; \quad 9 > 0; \quad 8x 2 X; \quad B_Y(Tx;) \quad \overline{T B_X(x;r)} ; \tag{A.4}$$

alors

$$8r > 0; \quad 9 > 0; \quad 8x 2 X; \quad B_Y(Tx;) \quad T B_X(x;3r)$$

ce qui achèvera la démonstration du théorème. Soit donc $r > 0$ et associé par (A.4) et considérons une suite $(_n)_{n2\mathbb{N}}$ de réels positifs, décroissante vers zéro telle que $_0 =$ et

$$8x 2 X; \quad B_Y(Tx; _n) \quad \overline{T B_X(x;2 ^n r)} :$$

Soit maintenant $x 2 X$ fixé, et soit $y 2 B_Y(Tx;)$. Il s'agit de montrer que $y 2 T B_X(x;3r)$.

On va construire par récurrence une suite $(x_n)_{n2\mathbb{N}}$ de X telle que $Tx_n 2 B_Y(y; _n)$ et $x_n 2 B_X(x_{n 1};2^1 ^n r)$. On choisit $x_0 = x$, qui convient puisque y appartient à $B_Y(Tx;)$ et donc Tx appartient à $B_Y(y;)$. Supposons $x_0;:::;x_{n 1}$ construits. Alors y appartient à $B_Y(Tx_{n 1}; _{n 1})$, et donc à $\overline{T B_X(x_{n 1};2^1 ^n r)}$ par définition de $_{n 1}$. 0n peut donc trouver un point de $B_X(x_{n 1};2^1 ^n r)$ dont l'image par T est arbitrairement proche de y, et en particulier il existe x_n dans $B_X(x_{n 1};2^1 ^n r)$ tel que $Tx_n 2 B_Y(y; _n)$, ce qui termine la construction. La suite $(x_n)_{n2\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans X car par l'inégalité triangulaire dès que p 2

$$d_X(x_n;x_{n+p}) \quad \sum_{k=0}^{p-1} d_X(x_{n+k};x_{n+k+1}) \quad r \sum_{k=0}^{p-1} 2^{n k} < 2^1 ^n r \quad ! \quad 0; \quad n ! 1 \quad :$$

Donc la suite $(x_n)_{n2\mathbb{N}}$ converge vers une limite $x^0 2 X$, qui vérifie par le même calcul que ci-dessus (en prenant $n = 0$ et $p ! 1$)

$$d_X(x;x^0) < 3r :$$

Par continuité de T et comme $d_Y(Tx_n;y)$ $_n$, on en déduit que

$$y = \lim_{n!1} Tx_n = Tx^0:$$

On a donc $y 2 T B_X(x;3r)$, ce qu'il fallait démontrer.

Remarque. La démonstration montre que si T n'est pas surjective alors $T(E)$ est maigre.

Théorème A.1.16 (Graphe fermé)**.** *Soient E et F deux espaces de Fréchet et T une application linéaire de E dans F. Alors T est continue si et seulement si son graphe*

$$G := \quad (x;y) 2 E \quad F = y = Tx$$

est fermé dans E F.

Démonstration. Il est toujours vrai que si T est continue alors son graphe est fermé.

Inversement supposons que G est fermé. Comme T est linéaire, G est un sous-espace vectoriel de E F, qui est fermé dans E F par hypothèse, donc G est un Fréchet. L'application de première projection

$$_1 : \begin{array}{ccc} G & ! & E \\ (x;y) & 7! & x \end{array}$$

est linéaire, continue et bijective donc par le théorème de l'application ouverte c'est un isomorphisme. En notant

$$\begin{array}{rccc} {}_2 : & G & ! & F \\ & (x;y) & 7! & y \end{array}$$

l'application de deuxième projection, il s'ensuit que $T = {}_2 \quad {}_1{}^1$ est continue.

A.2. Théorèmes de Hahn-Banach

A.2.1. Rappels sur le lemme de Zorn. Soit P un ensemble muni d'une relation d'ordre partielle .

On dit qu'un sous-ensemble Q de P est *totalement ordonné* si

$$8(a;b) \; 2 \; Q; \quad \text{soit} \quad a \quad b \quad \text{soit} \quad b \quad a :$$

On dit que $c \; 2 \; P$ est un *majorant* d'un sous-ensemble Q de P si

$$8a \, 2 \; Q; \quad a \quad c :$$

On dit que $m \; 2 \; P$ est un *élément maximal* de P si

$$8x \; 2 \; P; \quad m \quad x =) \quad x = m :$$

On dit que P est *inductif* si tout sous-ensemble totalement ordonné de P admet un majorant.

Lemme A.2.1 (Zorn, 1935)**.** *Tout ensemble ordonné inductif non vide admet un élément maximal.*

Remarque. La démonstration repose sur la forme forte de l'axiome du choix (Zermelo, 1904) et sera admise. Ce lemme a des applications importantes, pour montrer des résultats d'existence (base d'un espace vectoriel, forme linéaire sur un espace vectoriel...).

Exemples.

a) Soit E un ensemble. L'ensemble des parties de E muni de l'inclusion est inductif car E majore tout sous-ensemble de E. Dans ce cas le lemme de Zorn est trivial puisque E est maximal.

b) Soit $I(E;F)$ l'ensemble des injections partielles de E dans F défini de la façon suivante. Un ensemble $G \quad E \quad F$ appartient à $I(E;F)$ si l'on a : $(x;y)$ et $(x;y^0)$ sont dans G implique que $y = y^0$ et de même $(x;y)$ et $(x^0;y)$ sont dans G implique que $x = x^0$. Muni de l'inclusion, cet ensemble est inductif. Le lemme de Zorn implique alors qu'il existe un élément maximal, dont on vérifie que c'est le graphe d'une injection de E dans F, ou d'une injection de F dans E. On en déduit que pour tous les ensembles E et F, il existe une injection de l'un dans l'autre ou réciproquement (c'est le *théorème de comparabilité cardinale*).

Les théorèmes A.2.2 et A.2.14 qui suivent peuvent être démontrés sans le lemme de Zorn (donc sans la forme forte de l'axiome du choix) si l'on suppose que l'espace de départ est de dimension dénombrable (par exemple un espace de Hilbert) ou séparable. Ils ont été obtenus de manière indépendante par Hahn et Banach dans les années 1927-1930.

L'intérêt de la «forme analytique» (Paragraphe A.2.2) est de permettre d'introduire (par dualité) des topologies faibles, pour lesquelles on a de bonnes propriétés de compacité. La «forme géométrique» (Paragraphe A.2.3) est notamment utile en analyse convexe. Nous verrons des applications des deux formes dans ce cours.

A.2.2. Théorème de Hahn-Banach (forme analytique). Soit E un espace vectoriel réel et F un sous-espace vectoriel de E. Si f est une forme linéaire sur F, on dit que $\tilde{f}$ est un prolongement linéaire de f à E si $\tilde{f}$ est une forme linéaire sur E telle que $\tilde{f}_{|F} = f$.

On rappelle qu'une application positivement homogène vérifie

$$\forall \lambda > 0; \quad \forall x \in E; \quad p(\lambda x) = \lambda p(x):$$

Théorème A.2.2 (Hahn-Banach - forme analytique)**.** *Soit E un espace vectoriel réel et $p : E \to \mathbb{R}$ une application sous-additive et positivement homogène. Si F est un sous-espace vectoriel de E et f est une forme linéaire sur F telle que*

$$\forall x \in F; \quad f(x) \leq p(x);$$

alors il existe un prolongement linéaire $\tilde{f}$ de f à E tel que

$$\forall x \in E; \quad \tilde{f}(x) \leq p(x):$$

Démonstration. Soit P l'ensemble des prolongements de f dominés par p, c'est-à-dire l'ensemble des couples $(G; g)$ avec G sous-espace vectoriel de E contenant F, et où g est une forme linéaire sur G telle que $g_{|F} = f$ et vérifiant

$$\forall x \in G; \quad g(x) \leq p(x):$$

Alors P est non vide car $(F; f) \in P$. Par ailleurs P est ordonné par la relation d'ordre partiel

$$(G_1; g_1) \preceq (G_2; g_2) \quad \text{si} \quad G_1 \subset G_2 \quad \text{et} \quad g_{2|G_1} = g_1:$$

Montrons que P est inductif : soit $Q \subset P$ un ensemble totalement ordonné, que l'on écrit sous la forme

$$Q = (G_i; g_i)_{i \in I}:$$

Un majorant de Q est le couple $(\widetilde{G}; \tilde{g})$ avec

$$\widetilde{G} := \bigcup_{i \in I} G_i \quad \text{et} \quad \forall x \in \widetilde{G}; \ \tilde{g}(x) := g_i(x) \text{ avec } x \in G_i:$$

En effet $\tilde{g}$ est bien définie, $(\widetilde{G}; \tilde{g}) \in P$ et $(\widetilde{G}; \tilde{g})$ est un majorant pour Q. L'ensemble P est donc inductif. Par le lemme de Zorn, P admet donc un élément maximal $(G_0; g_0) \in P$.

Montrons que $G_0 = E$. Sinon il existe $x_0 \in E \setminus G_0$ et on pose $G^0 := G_0 + \mathbb{R}x_0$. On définit l'application g^0 sur G^0 par

$$\forall x \in G_0; \quad \forall t \in \mathbb{R}; \quad g^0(x + tx_0) = g_0(x) + t\alpha$$

et l'on va construire $\alpha \in \mathbb{R}$ de sorte que $(G^0; g^0) \in P$ (ce qui fournira une contradiction puisque $(G_0; g_0) \prec (G^0; g^0)$). On doit donc choisir α de sorte que pour tout $x \in G_0$ et pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$g^0(x + tx_0) \leq p(x + tx_0):$$

Comme p est sous-additive et positivement homogène, il suffit de démontrer le résultat pour $|t| = 1$, donc de construire α de sorte que pour tout $x \in G_0$

$$g_0(x) + \alpha \leq p(x + x_0) \quad \text{et} \quad g_0(x) - \alpha \leq p(x - x_0):$$

Il suffit donc de démontrer qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que

$$\sup_{y \in G_0} g_0(y) - p(y - x_0) \leq \alpha \leq \inf_{y \in G_0} p(y + x_0) - g_0(y) \ : \tag{A.5}$$

Mais pour tout $y; y^0 \in G_0$

$$g_0(y) + g_0(y^0) = g_0(y + y^0) \leq p(y + y^0) \leq p(y^0 + x_0) + p(y - x_0):$$

On a donc

$$\sup_{y \in G_0} g_0(y) \quad p(y \quad x_0) \qquad \inf_{y^0 \in G_0} p(y^0 + x_0) \quad g_0(y^0) \ ;$$

et (A.5) est donc vérifié. On en déduit la contradiction cherchée, donc $G_0 = E$.

Le théorème A.2.2 est démontré en choisissant $f = g_0$.

On note dorénavant E' l'ensemble des formes linéaires continues sur E, muni de la norme

$$\|f\|_{E'} := \sup_{\|x\|_E \ 1} |f(x)| = \sup_{\|x\|_E \ 1} \Re f(x) :$$

Corollaire A.2.3. *Soit E un espace vectoriel normé et G un sous-espace de E. Si f est une forme linéaire continue sur G alors on peut la prolonger en une forme linéaire continue sur E, de même norme que f.*

Démonstration. Il suffit d'appliquer le théorème A.2.2 précédent à la fonction

$$p : \begin{array}{l} E \ ! \quad \mathrm{R}^+ \\ x \ 7! \ \|f\|_G \ \|x\|_E \end{array}$$

et le corollaire est démontré.

Corollaire A.2.4. *Soit G un espace de Banach et B un sous-ensemble de G. On note G' l'ensemble des formes linéaires continues sur G. On suppose que pour tout $f \ 2 \ G'$, l'ensemble $f(B) := \bigcup_{b \in B} f(b)$ est borné. Alors B est borné.*

Démonstration. Il suffit d'appliquer le théorème de Banach-Steinhaus à $E = G$, $F = \mathrm{R}$ et $A = B$. La famille $(T_b f)_{b \in B}$ défine par

$$T_b f := f(b) \ ; \quad f \ 2 \ G' \ ; \quad b \ 2 \ B$$

est bornée donc $(T_b f)_{b \in B}$ est uniformément bornée : il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $f \ 2 \ G'$ et tout $b \ 2 \ B$

$$|T_b f| \quad C\|f\|_G :$$

Cela implique que B est borné : sinon il existerait $b \ 2 \ B$ tel que $\|b\| \quad 2C$ par exemple, et l'on construit une forme linéaire f telle que $|f(b)| = 1$ et $\|f\|_{E'} = 1$. Le corollaire est démontré.

Proposition A.2.5. *Soit E un espace vectoriel normé, alors pour tout $x \ 2 \ E$ on a*

$$\|x\|_E = \sup_{\|f\|_{E'} \ 1} |f(x)| = \max_{\|f\|_{E'} \ 1} |f(x)| :$$

Démonstration. Soit $x \neq 0$ fixé dans E. On sait que

$$\sup_{\|f\|_{E'} \ 1} |f(x)| \quad \|x\|_E :$$

D'après le Lemme A.2.6 ci-dessous, il existe $f_x \ 2 \ E'$ telle que

$$\|f_x\|_{E'} \ = \|x\|_E \quad \text{et} \quad f_x(x) = \|x\|_E^2 :$$

Il suffit alors de poser

$$\tilde{f_x} := \frac{1}{\|x\|_E} f_x$$

qui vérifie

$$\|\tilde{f_x}\|_{E'} \ = 1 \quad \text{et} \quad \tilde{f_x}(x) = \|x\|_E :$$

Cela démontre le résultat cherché, à condition de démontrer le Lemme A.2.6 suivant.

Lemme A.2.6. *Soit E un espace vectoriel normé. Pour tout $x_0 \in E$, il existe une forme linéaire continue $f_0 \in E$ telle que*

$$\|f_0\|_{E'} = \|x_0\|_E \quad \text{et} \quad f_0(x_0) = \|x_0\|_E^2 .$$

Démonstration. Il suffit d'appliquer le Corollaire A.2.3 à $G = \mathbb{R}x_0$ et

$$f(tx_0) := t\|x_0\|_E^2 .$$

et le lemme est démontré.

A.2.3. Théorème de Hahn-Banach (forme géométrique).

A.2.3.1. *Hyperplans affines.* Soit E un espace vectoriel réel. Un *hyperplan affine* de E est un sous-espace affine de codimension 1 dans E. De manière équivalente, c'est un sous-espace H de E de la forme

$$H = \{x \in E \,;\, f(x) = \alpha\}$$

où f est une forme linéaire non identiquement nulle et $\alpha \in \mathbb{R}$ est donné. On dit que $f = \alpha$ est l'équation de H (toute autre équation est de la forme $f = \beta$ avec $\beta \neq 0$) et on note $H = [f = \alpha]$.

Proposition A.2.7. *Soit E un espace vectoriel topologique réel. L'hyperplan $H = [f = \alpha]$ est fermé si et seulement si f est continue.*

Démonstration. Si f est continue alors clairement l'hyperplan $H = [f = \alpha]$ est fermé, puisque les singletons de $\mathbb{R}$ sont fermés et $H = f^{-1}(\{\alpha\})$.

Montrons l'implication réciproque. Comme les translations sont des homéomorphismes on peut supposer que $\alpha = 0$. On rappelle[2] que l'espace quotient $E_{/H}$ est séparé si et seulement si H est fermé. En outre comme H est un hyperplan, $E_{/H}$ est de dimension 1. On définit l'application linéaire f passée au quotient

$$\tilde{f} : E_{/H} \to \mathbb{R}$$

et en notant $\pi : E \to E_{/H}$ la projection canonique (continue) on a $f = \tilde{f} \circ \pi$ donc il suffit de montrer que $\tilde{f}$ est continue, en 0 par linéarité. Notons que l'application $\tilde{f}$ est définie de la manière suivante : on fixe dorénavant $x \in E_{/H}$ non nul, et l'on a

$$\forall y = \lambda x \in E_{/H} \,; \quad \tilde{f}(y) = \lambda f(x) .$$

Soit $\varepsilon > 0$. On va montrer qu'il existe un voisinage V_ε de 0 dans $E_{/H}$ tel que si $y = \lambda x \in V_\varepsilon$ alors $|\lambda| < \varepsilon$. Comme $E_{/H}$ est séparé, il existe un voisinage ouvert W_ε de 0 dans $E_{/H}$ ne contenant pas εx. On va transformer cet ensemble W_ε en un voisinage V_ε de 0 équilibré au sens où

$$|\lambda| \leq 1 \Rightarrow \lambda V_\varepsilon \subset V_\varepsilon .$$

A cette fin on pose

$$V_\varepsilon := \bigcap_{|\lambda| \geq 1} \lambda W_\varepsilon .$$

On a clairement $V_\varepsilon \subset W_\varepsilon$, montrons que V_ε est un voisinage de 0. Par continuité de l'application $(\lambda, y) \in \mathbb{R} \times E_{/H} \mapsto \lambda y \in E_{/H}$, il existe $\eta > 0$ et un voisinage ouvert $\mathring{W}_\varepsilon$ de 0 dans $E_{/H}$ tels que pour tout $y \in \mathring{W}_\varepsilon$, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $|\lambda| \leq \eta$, on ait $y \in W_\varepsilon$. Alors $\mathring{W}_\varepsilon$ est un voisinage ouvert de 0 contenu dans V_ε — puisque si $y \in \mathring{W}_\varepsilon$ et $|\lambda| \leq 1$

2. voir TD.

alors $j = j$ et donc $y \in W_\varepsilon$. On en déduit que V_ε est un voisinage de 0. Notons enfin que par construction

$$j j \leq 1 \Rightarrow V_\varepsilon \subset V_\varepsilon :$$

En effet considérons $y \in V_\varepsilon$ et $j j \leq 1$, il s'agit de montrer que pour tout $j j \leq 1$, il existe $w \in W_\varepsilon$ tel que $y = w$. Mais $^0 := =$ vérifie $j \, ^0 j \leq 1$ donc il existe $w \in W_\varepsilon$ tel que $y = \, ^0 w$ et le résultat suit. Montrons à présent que

$$\text{si } y = x \in V_\varepsilon ; \quad \text{alors } j j < \varepsilon ;$$

ce qui impliquera que $f^e : y = x \mapsto f(x)$ est continue en 0. Supposons donc qu'il existe $y = x \in V_\varepsilon$ avec $j j \geq \varepsilon$. Alors en écrivant

$$\varepsilon x = \, ^{\varepsilon} \! -y$$

on constate que $y \in V_\varepsilon$ et $j\varepsilon = j \leq 1$ donc $\varepsilon x \in V_\varepsilon$. On a donc une contradiction et le résultat suit.

A.2.3.2. *Espaces localement convexes.* Cette notion, utile pour la théorie de la dualité (voir le paragraphe A.3.1) a été introduite dans les années trente, notamment par A. Kolmogorov. On rappelle que $A \subset E$ est convexe si

$$\forall t \in [0;1] ; \quad \forall (x;y) \in A \times A ; \quad tx + (1-t)y \in A :$$

Définition A.2.8 (Espace vectoriel topologique localement convexe)**.** *Soit E un espace vectoriel topologique réel. On dit que E est localement convexe si l'origine admet un système fondamental de voisinages convexes.*

Remarque. L'intérieur d'un convexe d'intérieur non vide est encore convexe, donc on peut rajouter "ouverts" dans la définition précédente.

Définition A.2.9 (Jauge d'un convexe)**.** *Soit E un espace vectoriel topologique réel et C un voisinage convexe de l'origine. On appelle jauge de C (ou encore fonctionnelle de Minkowski) l'application*

$$\begin{array}{rcl} k \ k_C : & E & \to \quad \mathbb{R}^+ \\ & x & \mapsto \quad \inf\{t > 0 / \frac{1}{t} x \in C\} = \inf\{t > 0 / x \in tC\}; \end{array}$$

en convenant que $\inf(\emptyset) = +\infty$.

Lemme A.2.10. *Soit E un espace vectoriel topologique réel et C un voisinage convexe de l'origine. La jauge de C est bien définie et les propriétés suivantes sont vérifiées :*

a) pour tout $\lambda > 0$ et pour tout couple $(x;y)$ de E,

$$k \lambda x k_C = |\lambda| k x k_C \quad \text{et} \quad k x + y k_C \leq k x k_C + k y k_C ;$$

b) si C est ouvert alors $C = \{x \in E / k x k_C < 1\}$;

c) la jauge de C est une application continue.

Démonstration. Remarquons que $k \ k_C$ est bien définie : pour tout $x \in E$ et pour tout t assez grand, comme C est un voisinage de 0 on a bien $\frac{1}{t} x \in C$.

a) On note que $k 0 k_C = 0$ (d'ailleurs $k \lambda x k_C = 0$ pour tout x tel que $\mathbb{R}^+ x \subset C$). Par construction $k \lambda x k_C = |\lambda| k x k_C$ si $\lambda > 0$. Montrons la sous-additivité : soient $x;y \in E$ et $s;t > 0$ tels que $\frac{1}{s} x$ et $\frac{1}{t} y$ sont dans C. Soit $\alpha := \frac{s}{s+t} \in [0;1]$. Alors

$$\frac{1}{s+t}(x+y) = \alpha \frac{x}{s} + (1-\alpha)\frac{y}{t} \in C$$

car C est convexe. Donc

$$kx + yk_C \quad s + t :$$

En prenant l'inf sur s et t on en déduit le résultat.

b) Supposons que C est ouvert. Alors pour tout $x \in C$ il existe $" > 0$ tel que $(1 + ")x$ appartient à C. On en déduit que

$$kxk_C \quad \frac{1}{1 + "} < 1 :$$

Inversement si $x \in E$ est tel que $kxk_C < 1$, montrons que $x \in C$. Comme $kxk_C < 1$, il existe $t \in (0; 1)$ tel que $\frac{1}{t}x \in C$, et donc on a

$$x = t \ \frac{1}{t}x \ + (1 \quad t)0 \in C$$

puisque C est convexe, d'où le résultat.

c) On a par *a)*

$$kxk_C \ k \ yk_C \quad k \ x \quad yk_C$$

donc il suffit de montrer la continuité en 0. Celle-ci provient du fait que pour tout $" > 0$, il existe $V_"$ voisinage ouvert de 0 contenu dans $"C$. Pour tout $x \in V_"$ on a $kxk_C \quad "$, et le résultat suit.

Théorème A.2.11. *Un espace vectoriel topologique est localement convexe si et seulement si sa topologie est définie par une famille de semi-normes.*

De même un espace vectoriel topologique admet un système fondamental dénombrable de voisinages convexes de l'origine (au sens où il existe une famille $V_0; : : : ; V_n; : : :$ d'ouverts convexes tels que tout voisinage de 0 contient l'un des V_n) si et seulement si sa topologie est définie par une famille dénombrable de semi-normes.

Démonstration. $=)$ Soit E un espace vectoriel topologique localement convexe. On remarque que pour tout voisinage ouvert convexe C de 0, l'ensemble $C \setminus \quad C$, qui est non vide, est aussi un voisinage ouvert convexe de 0, et il est de plus symétrique et contenu dans C. Soit donc V un système fondamental de voisinages ouverts de 0 pour T, convexes et symétriques, et montrons que la topologie P définie par $(k \quad k_C)_{C \in V}$ (qui est bien une semi-norme puisque C est symétrique, et dénombrable si V l'est) coïncide avec la topologie originelle T de E. Il suffit de montrer que tout voisinage de 0 pour l'une est voisinage de 0 pour l'autre et réciproquement.

- Soit $V \in V$, alors V est un ouvert de T et donc par le lemme précedent

$$V = \quad x \in E \, / kxk_V < 1$$

donc tout voisinage ouvert de 0 pour T est un voisinage ouvert de 0 pour P.

- Soit V un voisinage ouvert de 0 pour P. Alors il existe $r \in]0; 1[$, $k \quad 1$ et des éléments $C_1; : : : ; C_k$ de V tels que

$$\left\{ x \in E ; \quad kxk_{C_i} < r \ \forall 1 \quad i \quad k \right\} \quad V :$$

Mais alors le voisinage ouvert convexe de l'origine $C := \bigcap_{i=1}^{k} rC_i$ vérifie $C \quad V$ et C est dans V donc V est un voisinage ouvert de 0 pour T.

(= Soit E un espace vectoriel topologique, et $(p)_{2A}$ une famille de semi-normes sur E. Alors les ensembles

$$x \in E = 8 \quad 2B ; p(x) < "$$

où B est une partie finie de A et " un réel strictement positif, forment un système fondamental de voisinages ouverts de 0 (dénombrable si la famille A l'est, et " est rationnel) pour la topologie définie par ces semi-normes. Comme ces ensembles sont convexes par l'inégalité triangulaire, l'ensemble E muni de cette topologie est localement convexe.

Lemme A.2.12. *Soit E un espace vectoriel topologique réel et soit C un convexe ouvert non vide de E. Pour tout $x_0 \in E \cap C$, il existe une forme linéaire continue ` sur E telle que*

$$8x \in C ; \quad `(x) < `(x_0) :$$

Démonstration. Par linéarité de ` on peut supposer que $0 \in C$. Soit $F := \mathbb{R}x_0$ et soit $k\,k_C$ la jauge de C. Soit la forme linéaire

$$f : \begin{array}{ccc} F & ! & \mathbb{R} \\ x_0 & 7! & : \end{array}$$

On sait par le lemme A.2.10 que $C = \{x \in E = kxk_C < 1\}$ donc comme $x_0 \notin C$, $kx_0k_C \geq 1$. On a donc

$$8 \quad 2 \mathbb{R} ; \quad f(x_0) \quad k \quad x_0k_C$$

(notons que pour 0 c'est évident !).

Par le théorème de Hahn-Banach analytique il existe donc ` sur $E$ prolongeant $f$, telle que ` $k \quad k_C$. Donc pour tout " > 0 et pour tout $x \in "C \setminus ("C)$

$$j`(x)j = ` (\text{signe}\,`(x))\, x \qquad (\text{signe}\,`(x))\, x \quad _C \quad "$$

car $(\text{signe}\,`(x))\, x$ appartient à $"C$, donc ` est continue en 0 donc partout. De plus pour tout $x \in C$ on a

$$`(x) \quad k \; xk_C < 1$$

et comme $`(x_0) = f(x_0) = 1$ le lemme suit.

A.2.3.3. *Énoncé et démonstration du théorème.*

Définition A.2.13. *Soit E un espace vectoriel topologique réel, et A et B deux sous-ensembles de E. On dit que l'hyperplan $H = [f = \quad]$ sépare A et B si*

$$8x \in A ; \quad f(x) \qquad \text{et} \quad 8x \in B ; \quad f(x) \qquad :$$

On dit que l'hyperplan $H = [f = \quad]$ sépare strictement A et B s'il existe " > 0 tel que

$$8x \in A ; \quad f(x) \qquad " \quad \text{et} \quad 8x \in B ; \quad f(x) \qquad + ":$$

Théorème A.2.14 (Hahn-Banach - forme géométrique)**.** *Soit E un espace vectoriel topologique réel, et A et B deux convexes non vides disjoints de E.*

a) Si A est ouvert alors il existe un hyperplan affine fermé séparant A et B ;

b) Si E est localement convexe, si A est compact et B est fermé, alors il existe un hyperplan affine fermé séparant strictement A et B.

Démonstration. *a)* Soit $C := \quad x \quad y \; ; \; x \; 2 \; A ; y \; 2 \; B \quad$, convexe et non vide (car c'est le cas pour A et B), et ouvert car

$$C = \bigcup_{y2B} (A \quad y)$$

et ne contenant pas 0 car $A \setminus B = \; ;$. Par le Lemme A.2.12 avec $x_0 = 0$, il existe une forme linéaire continue $`$ sur $E$ telle que $`(c) < 0$ pour tout $c \; 2 \; C$. Alors $`(x) < ` (y)$ pour tout $x \; 2 \; A$ et $y \; 2 \; B$. Soit $:= \sup_{x2A} `(x)$, alors

$$\inf_{y2B} `(y)$$

et donc $H = [` = \quad]$ convient : il sépare $A$ et $B$ et est fermé car $`$ est continue (voir la Proposition A.2.7).

b) On a $A \setminus B = \; ;$ et B est fermé donc pour tout $x \; 2 \; A$ il existe un voisinage ouvert V_x de 0 dans E tel que

$$(x + V_x) \setminus B = \; ; \; : \tag{A.6}$$

Par continuité de l'application $(x; y) \; 7! \; x + y$ en $(0; 0)$, on peut trouver V_x^0 voisinage ouvert de 0 dans E tel que $V_x^0 + V_x^0 \quad V_x$. Mais A est compact donc il existe $x_1; : : : ; x_n$ dans A tels que $A \quad (x_1 + V_{x_1}^0) [\quad [\quad (x_n + V_{x_n}^0)$. Comme $V_{x_1}^0 \setminus \quad \setminus \quad V_{x_n}^0$ est un voisinage ouvert de 0 et E est localement convexe, il existe W voisinage ouvert convexe de 0 dans E, que l'on peut prendre symétrique, tel que l'on ait $W + W \quad V_{x_1}^0 \setminus \quad \setminus \quad V_{x_n}^0$. Soient alors $A^0 := A + W$ et $B^0 := B + W$, ouverts convexes non vides dans E. Montrons que $A^0 \setminus B^0 = \; ;$. Si $a + w = b + w^0$ avec $a \; 2 \; A$, $b \; 2 \; B$ et $w; w^0 2 \; W$, alors on peut écrire $a = x_i + v_i^0$ avec $v_i^0 2 \; V_{x_i}^0$ et alors $b = x_i + v_i^0 + w \quad w^0$ qui appartient à $B \setminus (x_i + V_{x_i})$, ce qui est en contradiction avec (A.6).

Donc $A^0 \setminus B^0 = \; ;$ et par *a)* il existe $H := [` = \quad]$ hyperplan affine fermé séparant A^0 et B^0 : on a

$$8x \; 2 \; A^0; \quad `(x) \qquad \text{et} \quad 8y \; 2 \; B^0; \quad `(y) \quad : \tag{A.7}$$

Mais alors

$$8(x; y; w; w^0) \; 2 \; A \quad B \quad W \quad W ; \quad `(x + w) \qquad `(y + w^0) :$$

Il suffit alors de choisir w et w^0 tels que $`(w) = \; " > \; 0$ et $w^0 = \quad w$, ce qui démontre le théorème puisque l'on obtient

$$8(x; y) \; 2 \; A \quad B \quad `(x) \qquad " \qquad + " \quad `(y) :$$

En choisissant $^0 = \qquad "=2$ on trouve que $H := [` = \quad ^0]$ sépare strictement A^0 et B^0.

Corollaire A.2.15. *Soit E un espace vectoriel topologique réel localement convexe et F un sous-espace vectoriel de E tel que $\overline{F} \neq E$. Alors il existe $f \; 2 \; E \quad$ non identiquement nulle telle que*

$$f(x) = 0 \quad 8x \; 2 \; F :$$

Démonstration. Soit $x_0 \; 2 \; E \setminus \overline{F}$. D'après le théorème de Hahn-Banach (forme géométrique) il existe $f \; 2 \; E \quad$ non identiquement nulle et un réel $\quad$ tels que l'hyperplan $[f = \quad]$ sépare strictement $\overline{F}$ et $f x_0 g$. On a ainsi

$$8x \; 2 \; F ; \quad f(x) < \quad < f \quad (x_0)$$

mais alors

$$8 \quad 2 \; \mathbb{R} ; \quad 8x \; 2 \; F ; \quad f \; (x) <$$

et donc $f(x) = 0$ pour tout $x \; 2 \; F$. Le corollaire est démontré.

A.2.4. Application : théorème de Krein-Milman.

Exercice. Montrer qu'un ensemble est convexe si et seulement si il contient toutes les combinaisons convexes positives finies de ses éléments.

Définition A.2.16 (Enveloppe convexe, Enveloppe convexe fermée)**.** *Soit E un espace vectoriel et A un sous-ensemble de E. L'enveloppe convexe $co(A)$ de A est le plus petit convexe contenant A. C'est donc l'ensemble de toutes les combinaisons convexes positives finies d'éléments de A, en d'autres termes*

$$co(A) := \left\{ \sum_{j \in J} \lambda_j x_j \ ; \ J \text{ fini}; \ x_j \in A \ ; \ \lambda_j \geq 0; \ \sum_{j \in J} \lambda_j = 1 \right\} :$$

L'enveloppe convexe fermée $\overline{co(A)}$ d'un ensemble A est le plus petit convexe fermé contenant A. De manière équivalente, c'est l'adhérence de l'enveloppe convexe de A.

Exercices.
(1) Si l'espace ambiant est un Banach, l'enveloppe convexe fermée d'un compact est un compact.
(2) Si A est convexe alors $A = \mathrm{co}(A)$.
(3) Si A est fermé on n'a pas nécessairement $\mathrm{co}(A) = \overline{\mathrm{co}(A)}$.
(4) Si A est compact on n'a pas nécessairement $\mathrm{co}(A) = \overline{\mathrm{co}(A)}$.

Définition A.2.17 (Partie extrémale, point extrémal)**.** *Soit K une partie d'un espace vectoriel E. On dit qu'un ensemble $A \subset K$ est une partie extrémale de K si A est compacte, non vide et*

$$\forall (x;y) \in K^2 ; \quad \exists \lambda \in (0;1) ; \ \lambda x + (1-\lambda) y \in A \quad \Rightarrow \quad (x;y) \in A^2 :$$

On dit que x_0 est un point extrémal de K si $\{x_0\}$ est une partie extrémale.

En d'autres termes, un point extrémal n'est pas un point intérieur d'un segment entièrement inclus dans K. Par exemple les points extrémaux de la boule unité euclidienne de $\mathbb{R}^d$ forment la sphère unité euclidienne. Les points extrémaux d'un pavé de $\mathbb{R}^d$ sont ses sommets.

Théorème A.2.18 (Krein-Milman, 1940)**.** *Soit E un espace vectoriel topologique localement convexe séparé, et K un convexe compact de E. Alors K coïncide avec l'enveloppe convexe fermée de ses points extrémaux.*

Démonstration. Soit $E := \{\text{points extrémaux de } K\}$. On va commencer par montrer que E est non vide, puis que $K = \overline{\mathrm{co}(E)}$ où $\mathrm{co}(E)$ est l'enveloppe convexe de E.

- Soit P l'ensemble des parties extrémales de K. Alors P est non vide car il contient K. On munit P de la relation d'ordre partielle $A \preceq B$ si $B \subset A$. Montrons que P est inductif. Soit $\hat{P} \subset P$ totalement ordonné, alors $\bigcap_{A \in \hat{P}} A$ est une partie extrémale non vide, comme intersection de fermés emboîtés dans un compact, qui majore $\hat{P}$, donc P est inductif. D'après le lemme de Zorn, P admet un élément maximal M. Montrons que M est réduit à un point : s'il existe $x_0 \neq x_1$ dans M, alors d'après le théorème de Hahn-Banach (forme géométrique), il existe une forme linéaire continue $f \in E'$ telle que $f(x_0) < f(x_1)$. Soit

$$\hat{M} := \{ x \in M / f(x) = \inf_M f \} :$$

Alors $\hat{M}$ est non vide car M est compact (comme partie extrémale) et f est continue, et $\hat{M}$ est compact car fermé dans un compact. Par ailleurs $\hat{M} \subset M$ et cette inclusion est stricte

car $f(x_0) < f(x_1)$. Montrons que $\acute{M}$ est extrémal, ce qui aboutira à une contradicton : supposons qu'il existe $x; y \in K$ et $\in (0;1)$ tels que

$$x + (1 \quad)y \in \acute{M} :$$

Alors $x + (1 \quad)y \in M$ donc $x; y \in M$. Par ailleurs

$$f(x) + (1 \quad)f(y) = \inf_{M} f$$

ce qui implique que $x; y \in \acute{M}$. Mais M est extrémal et $M \not\subset \acute{M}$, d'où la contradiction. Donc M est reduit à un point, qui est un point extrémal. Donc E est non vide.

- On sait que $\overline{\text{co}(E)} \quad K$, supposons qu'il existe $x_0 \in K \cap \overline{\text{co}(E)}$. On applique à nouveau le théorème de Hahn-Banach géométrique, qui implique qu'il existe une forme linéaire continue $f \in E$ telle que

$$\sup \{ f(x) = x \in \overline{\text{co}(E)} \} < f(x_0) :$$

Soit alors

$$A := \{ x \in K = f(x) = \sup_{K} f \} :$$

On peut reproduire l'argument précédent concernant $\acute{M}$ pour montrer que A est extrémal. De même en considérant l'ensemble P_A des parties extrémales de K incluses dans A on montre comme ci-dessus qu'il admet un élément maximal réduit à un point, noté x_1, qui appartient donc à E. On a $f(x_1) = \sup_K f$ et donc $f(x_0) \quad f(x_1)$. Mais par ailleurs comme $x_1 \in E$ on a

$$f(x_1) \quad \sup \{ f(x) = x \in \overline{\text{co}(E)} \} ;$$

d'où une contradiction. Le théorème est démontré.

A.3. Dualité et topologies faibles

A.3.1. Premières définitions. Soient E et F deux espaces vectoriels réels et soit $\langle ; \rangle$ une forme bilinéaire de $F \quad E$ dans $\mathbb{R}$ telle que

$$(\forall f \in F ; \quad \langle f; x \rangle = 0) \quad \Rightarrow \quad x = 0 : \tag{A.8}$$

On peut définir une topologie d'espace vectoriel localement convexe séparé sur E en considérant pour toute partie finie B de F la semi-norme

$$p_B : \begin{array}{ccc} E & \to & \mathbb{R}^+ \\ x & \mapsto & \sup_{f \in B} |\langle f; x \rangle| \end{array} : \tag{A.9}$$

De même si

$$(\forall x \in E ; \quad \langle f; x \rangle = 0) \quad \Rightarrow \quad f = 0 ; \tag{A.10}$$

alors on peut définir une topologie d'espace vectoriel localement convexe séparé sur F en considérant pour toute partie finie A de E,

$$q_A : \begin{array}{ccc} F & \to & \mathbb{R}^+ \\ f & \mapsto & \sup_{x \in A} |\langle f; x \rangle| \end{array} : \tag{A.11}$$

Soit E un espace vectoriel topologique localement convexe séparé. On considère l'ensemble E des formes linéaires continues sur E, et la forme bilinéaire

$$\begin{array}{ccc} E \quad E & \to & \mathbb{R} \\ (x; f) & \mapsto & \langle f; x \rangle := f(x) : \end{array}$$

Grâce au théorème de Hahn-Banach (géométrique), la relation (A.8) est vérifiée. En effet pour tout $x \neq 0$ dans E, il existe $f \in E$ et $\in \mathbb{R}$ tel que

$$\langle f; x\rangle < \alpha < 0:$$

On peut donc comme ci-dessus définir une nouvelle topologie sur E, que l'on note $(E; E')$.

De même si $f \neq 0$ appartient à E alors il existe $x \in E$ tel que $\langle f; x\rangle \neq 0$ donc (A.10) est vérifiée. On peut donc définir une nouvelle topologie sur E, que l'on note $(E; E)$ — cette dernière ne nécessitant pas Hahn-Banach pour être construite.

Théorème A.3.1. *Soit E un espace vectoriel topologique localement convexe, que l'on suppose séparé, défini par ses ouverts $\mathcal{T}$. La topologie $(E; E')$ est moins fine que $\mathcal{T}$.*

Démonstration. D'après le théorème A.2.11 la topologie $\mathcal{T}$ est définie par une famille de semi-normes que l'on note $P = (p_\alpha)_{\alpha\in A}$.

Soit U ouvert pour $(E; E')$, montrons qu'il est ouvert pour $\mathcal{T}$. Soit $x_0 \in U$, il existe B partie finie de E' et $r > 0$ tels que avec la notation (A.9),

$$p_B(x - x_0) < r \Rightarrow x \in U:$$

Chaque élément f de B est continu de $(E; P)$ dans $(\mathbb{R}; |\cdot|)$ et comme B est finie, ses éléments forment une famille uniformément continue. Il existe donc une constante $C > 0$ et un sous-ensemble fini $A' \subset A$ tel que

$$\forall x \in E;\ \forall f \in B;\quad |\langle f; x - x_0\rangle| \leq C \sum_{\alpha\in A'} p_\alpha(x - x_0):$$

Alors la boule ouverte $B_{A'}(x_0; r/2C|A'|)$ est incluse dans U, donc U est ouvert pour la topologie initiale. Le théorème est démontré.

A.3.2. Topologies faibles et espaces de Banach. Soit E un espace de Banach, on rappelle que E' est un espace de Banach muni de la norme duale

$$\|f\|_{E'} := \sup_{x\neq 0} \frac{|\langle f; x\rangle|}{\|x\|_E}$$

Pour tout espace de Banach E on note son bidual par E'', muni de la norme

$$\|\cdot\|_{E''} := \sup_{f\neq 0} \frac{|\langle \cdot; f\rangle|}{\|f\|_{E'}}$$

Définition A.3.2. *Soit E un espace de Banach.*

- *La topologie associée à $\|\cdot\|_E$ est dite topologie forte sur E*
- *La topologie $(E; E')$ est dite topologie faible sur E.*
- *La topologie $(E'; E)$ est dite topologie faible $*$ sur E'.*

Proposition A.3.3. *Soit E un espace de Banach et E'' son bidual. L'injection canonique de E dans E'' définie par*

$$j : \begin{array}{ccc} E & \to & E'' \\ x & \mapsto & j(x) : \begin{array}{ccc} E' & \to & \mathbb{R} \\ f & \mapsto & \langle j(x); f\rangle := \langle f; x\rangle \end{array} \end{array}$$

est une isométrie. En particulier $j(B_E)$ est fermée dans $B_{E''}$ pour la topologie forte de E''.

Démonstration. Pour montrer que j est une isométrie, il suffit de remarquer que

$$kj(x)k_{E''} = \sup_{kf k_{E'} \leq 1} |\langle f, x\rangle| = kxk_E$$

grâce à la Proposition A.2.5. Le fait que $j(B_E)$ soit fermée dans $B_{E''}$ pour la topologie forte de E'' provient alors du fait que $B_{E''}$ est complet et que j est une isométrie.

Remarque. On déduit de cette proposition que $E \subset E''$ (on verra plus bas des exemples où l'inclusion est stricte) donc (E, E') est moins fine que (E'', E') (et donc la topologie faible sur E est moins fine que la topologie faible sur E'').

Proposition A.3.4. *Soit E un espace de Banach.*

a) Si (x_n) converge fortement vers x dans E (on écrit $x_n \to x$) alors (x_n) converge faiblement vers x dans E (on écrit $x_n \rightharpoonup x$).

b) Si (x_n) converge faiblement vers x dans E alors (x_n) est bornée dans E. Par ailleurs

$$kxk_E \leq \liminf_{n\to\infty} kx_nk_E : \tag{A.12}$$

c) Si (x_n) converge faiblement vers x dans E et (f_n) converge fortement vers f dans E' alors

$$\langle f_n, x_n\rangle \to \langle f, x\rangle :$$

Démonstration. $a)$ résulte de la comparaison entre topologie forte et faible précédente, ou encore de la continuité de $f \in E'$: on a en effet

$$|\langle f, x_n - x\rangle| \leq kf k_{E'} kx_n - xk_E :$$

$b)$ provient du Corollaire A.2.4 du Théorème de Banach-Steinhaus A.1.13. Plus précisément on associe à x_n l'application linéaire

$$T_n : \begin{array}{ccc} E & \to & \mathbb{R} \\ f & \mapsto & \langle f, x_n\rangle \end{array},$$

et on sait que la suite réelle $(T_nf)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée pour toute $f \in E'$. Le théorème de Banach-Steinhaus assure donc qu'il existe une constante $C > 0$ telle que pour toute $f \in E'$.

$$|T_nf| \leq Ckf k_{E'} :$$

En rappelant le Corollaire A.2.4, on a donc

$$kx_nk_E = \sup_{kf k_{E'} \leq 1} |T_nf| \leq C :$$

Pour démontrer l'inégalité (A.12) on écrit

$$|\langle f, x_n\rangle| \leq kf k_{E'} kx_nk_E$$

donc

$$|\langle f, x\rangle| \leq kf k_{E'} \liminf_{n\to\infty} kx_nk_E$$

et finalement

$$kxk_E = \sup_{kf k_{E'} \leq 1} |\langle f, x\rangle| \leq \liminf_{n\to\infty} kx_nk_E :$$

$c)$ découle de l'inégalité triangulaire et des résultats précédents, puisque

$$|\langle f_n, x_n\rangle - \langle f, x\rangle| \leq |\langle f_n - f, x_n\rangle| + |\langle f, x_n - x\rangle| \leq kf_n - f k_{E'} kx_nk_E + |\langle f, x_n - x\rangle| :$$

La proposition est démontrée.

Proposition A.3.5. *Soit E est un espace de Banach de dimension finie. Alors la topologie $(E;E')$ coïncide avec T. En particulier $x_n * x$ si et seulement si $x_n \to x$.*

Démonstration. Il suffit de vérifier que tout ouvert pour la topologie forte est ouvert pour la topologie faible. Soit $x_0 \in E$ et U un voisinage de x_0 pour la topologie forte. Alors U contient la boule $B_E(x_0;r)$ pour un certain $r > 0$. Soit $(e_1;\dots;e_n)$ une base de E et $(f_1;\dots;f_n)$ sa base duale (c'est-à-dire vérifiant que $\langle f_i;e_j\rangle = \delta_{i;j} := 1$ si $i = j$, et 0 sinon). Puisqu'en dimension finie toutes les normes sont équivalentes, il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\forall x \in E;\quad \|x\|_E \leq C \max_{1 \leq i \leq n} |\langle f_i;x\rangle| :$$

Alors l'ouvert

$$V := \left\{ x \in E \,/\, |\langle f_i;x\rangle| < x_0 | < \frac{r}{C};\ \forall i \in [1;n] \right\}$$

est inclus dans $B_E(x_0;r)$ et le résultat suit.

Exercice. Soit E un espace de Banach de dimension infinie et soit

$$S := \left\{ x \in E \,/\, \|x\|_E = 1 \right\} :$$

Alors la fermeture de S pour la topologie faible est

$$B := \left\{ x \in E \,/\, \|x\|_E \leq 1 \right\} :$$

Il existe donc toujours des fermés pour la topologie forte qui ne sont pas fermés pour la topologie faible, et ces deux topologies sont donc bien distinctes.

Théorème A.3.6. *Soit E un espace vectoriel topologique localement convexe, que l'on suppose séparé. Si C est un convexe fermé de E pour T, alors il est aussi fermé pour $(E;E')$, et réciproquement.*

Démonstration. Montrons le seul sens non évident (d'après le théorème A.3.1) : soit C un convexe fermé de E pour T, montrons que le complémentaire de C dans E est ouvert pour $(E;E')$. Soit $x_0 \notin C$. Par le théorème de Hahn-Banach il existe un hyperplan qui sépare strictement $\{x_0\}$ et C. Donc il existe $f \in E'$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ tels que

$$\langle f;x_0\rangle < \alpha < \langle f;y\rangle$$

pour tout $y \in C$. Soit

$$V := \left\{ x \in E \,/\, \langle f;x\rangle < \alpha \right\} :$$

Alors $x_0 \in V$, V est inclus dans le complémentaire de C et V est ouvert pour $(E;E')$, ce qui démontre le théorème.

Corollaire A.3.7 (Lemme de Mazur, 1905-1981)**.** *Soit E un espace de Banach. Si (x_n) converge faiblement vers x dans E, alors pour tout n il existe y_n, combinaison convexe des (x_n), tel que la suite (y_n) converge fortement vers x.*

Démonstration. Soit $C := \mathrm{co}\left(\bigcup_{n \geq 1} \{x_n\}\right)$ l'enveloppe convexe des (x_n). Alors son adhérence (forte) $\overline{C}$ est convexe, donc fermée pour la topologie faible par le théorème A.3.6. Donc $\overline{C}$ contient la fermeture faible de C, qui contient x par hypothèse. Donc x appartient à sa fermeture forte.

Proposition A.3.8. *Soient E et F deux espaces de Banach et T une application linéaire de E dans F. L'application T est continue de $(E;\|\ \|_E)$ dans $(F;\|\ \|_F)$ si et seulement si elle est continue de $(E;\ \sigma(E;E'))$ dans $(F;\ \sigma(F;F'))$.*

Démonstration. $=)$ Soit $T : E \to F$ linéaire continue pour la topologie forte. Soit V un ouvert de la topologie $(F;F')$, montrons que $T^{-1}(V)$ est ouvert dans E pour la topologie $(E;E')$. Soit donc $x_0 \in T^{-1}(V)$, comme $Tx_0 \in V$, il existe I fini, des formes linéaires continues $(f_i)_{i\in I}$ sur F et des réels $(r_i)_{i\in I}$ tels que V contient les ensembles

$$\{y \in F = |\langle f_i, y - Tx_0\rangle| < r_i ; \forall i \in I\} :$$

On remarque alors que l'ensemble

$$U := \{x \in E = |\langle f_i, T(x - x_0)\rangle| < r_i ; \forall i \in I\}$$

vérifie $U \subset T^{-1}(V)$. Comme T est continue pour la topologie forte, on a que $f_i \circ T$ est une forme linéaire continue sur E est donc U est un voisinage ouvert de x_0 pour $(E;E')$.

$(=$ Soit T continue de $(E;\ (E;E'))$ dans $(F;\ (F;F'))$. Par le théorème du graphe fermé il suffit de montrer que le graphe de T est fermé pour la topologie forte. Soit donc une suite (x_n) telle que $(x_n;T(x_n)) \to (x;y) \in E \times F$ et montrons que $y = Tx$. On a $x_n \to x$ donc $x_n \rightharpoonup x$, et $Tx_n \to y$ donc $Tx_n \rightharpoonup y$. On a donc en particulier $Tx_n \rightharpoonup Tx$, et la topologie faible étant séparée il y a unicité de la limite donc $y = Tx$.

On admet le théorème suivant de Tychonov (qui repose sur le lemme de Zorn) : le produit cartésien d'une famille quelconque d'ensembles compacts est compact pour la topologie produit (i.e. la topologie qui rend continues toutes les projections sur l'une des composantes du produit). Plus précisément on a le théorème suivant.

Théorème A.3.9 (Tychonov, 1930)**.** *Soit $(X_\alpha)_{\alpha\in A}$ une famille d'espaces topologiques et soit*

$$X := \prod_{\alpha\in A} X_\alpha := \{(x_\alpha)_{\alpha\in A} = \forall \alpha \in A ;\ x_\alpha \in X_\alpha\} :$$

On munit X de la topologie la moins fine rendant continues toutes les projections canoniques définies pour tout $\alpha \in A$ par

$$P_\alpha : \begin{array}{ccc} X & \to & X_\alpha \\ (x_\alpha)_{\alpha\in A} & \mapsto & x_\alpha : \end{array}$$

Si pour tout $\alpha \in A$, X_α est compact, alors X l'est aussi.

Théorème A.3.10 (Banach-Alaoglu, 1938)**.** *Soit E un espace vectoriel normé. La boule unité fermée de E'*

$$B_{E'} := \{f \in E' = |f(x)| \leq \|x\|_E \ \forall x \in E\}$$

est compacte pour la topologie faible $\sigma(E',E)$.

Démonstration. Avec les notations du théorème de Tychonov, on pose $A = E$ et $X_\alpha = \mathbb{R}$ pour tout $\alpha \in A$. On identifie $X := \prod_{x\in E} \mathbb{R} = \mathbb{R}^E$ à l'ensemble $\mathcal{F}(E;\mathbb{R})$ des fonctions de E dans $\mathbb{R}$ via l'application (bijective)

$$\Phi : \begin{array}{ccc} \mathcal{F}(E;\mathbb{R}) & \to & \mathbb{R}^E \\ f & \mapsto & f(x)\}_{x\in E} : \end{array}$$

Les éléments de $\mathbb{R}^E$ sont notés $\lambda = (\lambda_x)_{x\in E}$. Les projections canoniques sont donc, pour tout $x \in E$,

$$P_x : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^E & \to & \mathbb{R} \\ \lambda & \mapsto & \lambda_x : \end{array}$$

Soit la bijection réciproque de , restreinte à (E) :

$$\begin{array}{rccc} : & (E) & \mathbb{R}^{\boldsymbol{E}} & \to & E \quad F \ (E;\mathbb{R}) \\ & & \to & \mapsto & f \ t.q. \ f(x) = \ _{\boldsymbol{x}} \ \forall x \in E : \end{array}$$

Montrons tout d'abord que est continue de (E) (muni de la topologie produit de $\mathbb{R}^{\boldsymbol{E}}$) dans E (muni de la topologie faible) : il suffit de vérifier que pour tout $x \in E$, l'application

$$\begin{array}{rccc} _{\boldsymbol{x}} : & (E) & \to & \mathbb{R} \\ & & \mapsto & (\ )(x) \end{array}$$

est continue. On a $_{\boldsymbol{x}} (f) = f(x) = P_{\boldsymbol{x}} (f)$ pour tout $f \in E$ donc

$$_{\boldsymbol{x}} = P_{\boldsymbol{x}} \circ (\boldsymbol{E})$$

et le résultat suit du fait que $P_{\boldsymbol{x}}$ est continue.

Pour démontrer le théorème, il suffit alors de montrer que la boule unité fermée de E est l'image par d'un compact de $\mathbb{R}^{\boldsymbol{E}}$. Soit

$$K := \left\{ \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{E}} = \forall x \in E ; | _{\boldsymbol{x}}| \ \|x\|_{\boldsymbol{E}} \right\} :$$

Alors

$$K = \prod_{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{E}} \left[\|x\|_{\boldsymbol{E}}; \|x\|_{\boldsymbol{E}} \right]$$

donc K est compact par le théorème de Tychonov. Soit enfin

$$F := \left\{ \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{E}} = \forall (x;y) \in E \quad E ; \forall (;) \in \mathbb{R}^2 ; _{\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}} = _{\boldsymbol{x}} + _{\boldsymbol{y}} \right\} :$$

Pour $(x;y) \in E \quad E$ et $(;) \in \mathbb{R} \quad \mathbb{R}$ donnés, l'application

$$\begin{array}{rccc} _{\boldsymbol{x};\boldsymbol{y}} : & \mathbb{R}^{\boldsymbol{E}} & \to & \mathbb{R} \\ & & \mapsto & _{\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}} \quad _{\boldsymbol{x}} \quad _{\boldsymbol{y}} \end{array}$$

est continue. L'ensemble F est l'intersection de l'image réciproque de $\{0\}$ par des fonctions continues, donc $K \setminus F$ est compact. Comme

$$B_{\boldsymbol{E}} = (K \setminus F)$$

on a le résultat cherché. Le théorème est démontré.

A.3.3. Espaces réflexifs.

Définition A.3.11. *Soit E un espace de Banach. On dit que E est réflexif s'il est le dual de son dual, i.e. si j (l'application définie en Proposition A.3.3) est surjective (donc bijective).*

Théorème A.3.12 (Kakutani, 1941)**.** *Soit E un espace de Banach. Alors E est réflexif si et seulement si sa boule unité fermée $B_{\boldsymbol{E}}$ est compacte pour $(E;E)$.*

Démonstration. $\Rightarrow$ On sait que $B_{\boldsymbol{E}}$ est compacte pour la topologie de $(E;E)$ grâce au théorème de Banach-Alaoglu A.3.10. Comme $j(B_{\boldsymbol{E}}) = B_{\boldsymbol{E}}$, il suffit de montrer que j^{-1} est continue de $(E; (E;E))$ dans $(E; (E;E))$. Si U est un ouvert pour $(E;E)$, montrons que $j(U)$ est un ouvert de E pour $(E;E)$. Soit $x_0 \in U$. Il existe $" > 0$, $f_1;\dots;f_{\boldsymbol{n}} \in E$ tels que

$$V := \left\{ x \in E = \sup_{1 \le \boldsymbol{i} \le \boldsymbol{n}} |f_{\boldsymbol{i}}; x \quad x_0| < " \right\} \quad U :$$

Alors

$$j(V) = \left\{ 2E \;=\; = j(x) \text{ et } \sup_{1 \le i \le n} |\langle f_i, x\rangle - x_0| < \varepsilon \right\}^{o}$$

et comme

$$\langle \; , f_i\rangle = \langle f_i, x\rangle \quad \text{si} \quad = j(x)$$

alors

$$j(V) = \left\{ 2E \;= \sup_{1 \le i \le n} |\langle \quad j(x_0); f_i\rangle| < \varepsilon \right\}^{o};$$

ce qui démontre le résultat.

(= On utilise le lemme suivant, que l'on démontrera plus bas.

Lemme A.3.13 (Goldstine 1930)**.** *Soit E un espace de Banach, alors $j(B_E)$ est dense dans B_E pour la topologie $(E \;; E)$ (et donc $j(E)$ est dense dans E pour cette même topologie).*

Retournons à la démonstration du théorème. Supposons donc que B_E est faiblement compacte, et montrons que $j(E) = E$. Comme j est une isométrie de E sur E , elle est continue de l'espace $(E; (E;E))$ dans l'espace $(E \;; (E \;;E))$ d'après la Proposition A.3.8, mais alors aussi dans $(E \;; (E \;;E))$ puisque cette dernière topologie est moins fine que $(E \;;E)$. Comme B_E est faiblement compacte, alors $j(B_E)$ est compacte pour $(E \;;E)$. Par le lemme de Goldstine A.3.13 on a donc $j(B_E) = B_E$ puisqu'elle est dense, et fermée dans E . Le résultat est démontré.

Démonstration du lemme de Goldstine A.3.13. Cette démonstration nécessite le lemme suivant, admis pour l'instant.

Lemme A.3.14 (Helly 1920)**.** *Soit E un espace de Banach, soient $f_1; \ldots; f_n$ dans E et $\alpha_1; \ldots; \alpha_n$ des réels. Les deux propriétés suivantes sont équivalentes :*

a) Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $x_\varepsilon \in B_E$ tel que pour tout $i \in [1;n]$,

$$|f_i(x_\varepsilon) - \alpha_i| < \varepsilon \;;$$

b) Pour tous $\alpha_1; \ldots; \alpha_n$ réels,

$$\left| \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \alpha_i \right| \le \left\| \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i \right\|_E :$$

Démonstration le lemme de Goldstine A.3.13. Soit $\in B_E$ et V un voisinage de pour la topologie $(E \;;E)$. Il s'agit de montrer que $V \cap j(B_E) \neq \emptyset$. Il existe $\varepsilon > 0$ et $f_1; \ldots; f_n$ dans E tels que

$$V^0 := \left\{ 2E \;= h \quad ; f_i\rangle < \varepsilon; \quad \forall i \in [1;n] \right\}^{o} \subset V :$$

Donc on cherche $x \in B_E$ tel que $j(x) \in V^0$, donc (en rappelant que $\langle j(x); f_i\rangle = \langle f_i, x\rangle$) tel que

$$\langle f_i, x\rangle - h \quad ; f_i\rangle < \varepsilon; \quad \forall i \in [1;n]:$$

On pose $\alpha_i := h; f_i\rangle$, alors par le lemme de Helly A.3.14 il suffit de montrer que

$$\forall \; \alpha_1; \ldots; \alpha_n \text{ réels}; \quad \left| \sum_i \lambda_i \alpha_i \right| \le \left\| \sum_i \lambda_i f_i \right\|_E$$

ce qui est évident puisque

$$\left| \sum_i \lambda_i \alpha_i \right| = |h; \sum_i \lambda_i f_i\rangle|$$

et $\| \| \le 1$. Le lemme A.3.13 est donc démontré.

Démonstration du lemme de Helly A.3.14. *=)* Soit $" > 0$ fixé, et n réels $_1;:::; _n$. Alors

$$\sum_i {}_i f_i(x") + \sum_i {}_i f_i(x")$$

donc

$$\sum_i {}_i f_i(x") \quad " \sum_i j {}_i j + \sum_i {}_i f_i(x")$$

$$" \sum_i j {}_i j + \sum_i {}_i f_i \; _E \; kx"k_E$$

et on conclut en faisant tendre $"$ vers zéro (en utilisant $kx"k_E \quad 1$).

(= On considère

$$' : \begin{array}{l} E \; ! \quad \mathbb{R}^n \\ x \; 7! \quad hf_1;xi;:::;hf_n;xi \; : \end{array}$$

L'assertion *a)* signifie que $:= (_1;:::; _n) \; 2 \; \overline{' (B_E)}$, donc par contraposition supposons que $=2 \; \overline{' (B_E)}$. Comme $\overline{' (B_E)}$ est un convexe fermé de $\mathbb{R}^n$, on déduit du théorème de Hahn-Banach (forme géométrique) qu'il existe $= (_1;:::; _n) \; 2 \; \mathbb{R}^n$ et $2 \; \mathbb{R}$ tels que

$$' (x) < \; < \quad ; \quad 8x \; 2 \; B_E :$$

Mais

$$\sum_i {}_i f_i \; _E = \sup_{kxk_E \; 1} \sum_i {}_i hf_i;xi = \sup_{kxk_E \; 1} ' (x)$$

donc

$$\sum_i {}_i f_i \; _E < \sum_i {}_i \; _i ;$$

contradiction. Le lemme est donc démontré.

Exercice. Si T est une isométrie surjective entre deux espaces de Banach F et G, alors F est réflexif si et seulement si G est réflexif.

Exercice. Les espaces c_0 des suites nulles à l'infini, $`^1$ des suites sommables et $`^{1}$ des suites bornées ne sont pas réflexifs.

Proposition A.3.15. *Soit E un espace de Banach réflexif, et M un sous-espace vectoriel fermé de E. Alors M est réflexif.*

Démonstration. D'après le théorème de Kakutani A.3.12 il s'agit de vérifier que la boule unité fermée B_M est compacte pour la topologie $(M;M)$, dont on vérifie sans peine qu'elle est la trace sur M de la topologie $(E;E)$. Mais B_E est compacte pour la topologie $(E;E)$ et M est fermée pour la topologie $(E;E)$ par le théorème A.3.6, donc B_M est compacte pour la topologie $(E;E)$ et donc pour la topologie $(M;M)$. La proposition est démontrée.

Proposition A.3.16. *Soit E un espace de Banach, on a*

$$E \quad \textit{réflexif} \quad () \quad E \quad \textit{réflexif} :$$

Démonstration. $=)$ Par le théorème de Banach-Alaoglu A.3.10, B_{E} est compacte pour la topologie $(E ; E)$. Comme E est réflexif les topologies $(E ; E)$ et $(E ; E)$ coïncident donc B_{E} est compacte pour la topologie $(E ; E)$ et donc E est réflexif par le théorème de Kakutani A.3.12.

$($ = Supposons que E est réflexif, alors par l'étape précédente on sait que E est réflexif, et donc $j(E)$ est réflexif comme sous-espace fermé de E d'après la Proposition A.3.15 et donc E est réflexif puisque j^{-1} est un isomorphisme isométrique entre $j(E)$ et E.

A.3.4. Uniforme convexité.

Définition A.3.17. *Un espace vectoriel normé E est uniformément convexe si pour tout réel $" > 0$ il existe un réel $ > 0$ tel que pour tous $x ; y$ dans B_{E},*

$$\frac{1}{2}(x + y) \quad _{E} \quad 1 \quad =) \quad k x \quad y k_{E} \quad ":$$

Exemples. a) L'espace $\mathbb{R}^2$ muni de la norme $kxk_2 := \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ est uniformément convexe mais pas s'il est muni des normes kxk_1 et kxk_1 .

b) On verra au paragraphe A.3.6 que L^{p} muni de sa norme naturelle est uniformément convexe si $1 < p < 1$.

Théorème A.3.18 (Milman-Pettis 1938)**.** *Tout espace de Banach uniformément convexe est réflexif.*

Démonstration. Soit E un espace de Banach uniformément convexe, il s'agit de démontrer que $j(E) = E$, ou encore que $j(B_{E}) = B_{E}$. On rappelle (voir la Proposition A.3.3) que $j(B_{E})$ est fermée dans B_{E} pour la topologie forte, il suffit donc de montrer qu'elle est dense dans B_{E} pour cette même topologie. Par homogénéité on peut se ramener à

$$S_{E} := \{ \quad 2 E \quad = k \; k_{E} \quad = 1 \quad : \}$$

Soit donc $2 S_{E}$ et soit $" > 0$ auquel on associe le paramètre de la Définition A.3.17. Montrons qu'il existe $x 2 B_{E}$ tel que

$$kj(x) \quad k_{E} \quad ": \tag{A.13}$$

Comme $k \; k_{E} = 1$, il existe $f 2 E$ tel que $kf k_{E} = 1$ et

$$h ; f i \quad 1 \quad \frac{}{2} \tag{A.14}$$

Soit le voisinage ouvert de pour la topologie $(E ; E)$

$$V := \{ \quad 2 E \quad = h \quad ; f i < \frac{}{2} \quad : \}$$

On sait par le lemme de Goldstine A.3.13 que $j(B_{E})$ est dense dans B_{E} pour la topologie $(E ; E)$, donc il existe $x 2 B_{E}$ tel que $j(x) 2 V$. En écrivant $hj(x) \quad ; f i < = 2$, il vient

$$h ; f i \;\; h \; f ; x i < \frac{}{2} \tag{A.15}$$

Montrons que $kj(x) \quad k_{E} \quad "$ par contradiction.

Supposons que $kj(x) \quad k_{E} > "$, alors $2 W := {}^{c} j(x) + "B_{E}$ et W est un voisinage de pour la topologie $(E ; E)$ (puisque B_{E} est fermé pour cette topologie par le théorème de Banach-Alaoglu). Par le lemme de Goldstine A.3.13 à nouveau, il existe $y 2 B_{E}$ tel que $j(y) 2 W \setminus V$ et donc

$$h ; f i \;\; h \; f ; y i < \frac{}{2} \tag{A.16}$$

Notons que par construction, puisque $j(y) \in W$ on a

$$kj(x - y)k_E > \varepsilon. \tag{A.17}$$

Par l'inégalité triangulaire on conclut de (A.15) et (A.16) que

$$2h; f i < hf; x + yi + k x + yk_E + :$$

Mais alors par (A.14) il vient

$$\frac{1}{2}kx + yk_E > 1$$

et donc $kx - yk_E < \varepsilon$ par uniforme convexité, ce qui contredit (A.17). D'où le résultat.

Remarque. Les espaces vectoriels de dimension finie sont réflexifs.

Proposition A.3.19. *Soit E un espace de Banach uniformément convexe et soit (x_n) une suite de E convergeant faiblement pour $\sigma(E; E')$ vers x. Si*

$$\limsup_{n\to\infty} kx_nk_E \leq k xk_E;$$

alors (x_n) converge fortement vers x.

Démonstration. On peut toujours supposer que $x \neq 0$, sinon le résultat est évident. Soit $\lambda_n := \max(kxk_E; kx_nk_E)$, soit $y_n := \lambda_n^{-1}x_n$ et $y = kxk_E^{-1}x$. Alors $\lambda_n \to k xk_E$ et $y_n \rightharpoonup y$ faiblement $\sigma(E; E')$. Par la Proposition A.3.4 on a puisque $\frac{1}{2}(y_n + y) \rightharpoonup y$,

$$kyk_E \leq \liminf_{n\to\infty} \frac{1}{2}ky_n + yk_E :$$

Mais $kyk_E = 1$ et $ky_nk_E \leq 1$ donc on déduit que nécessairement

$$\frac{1}{2}ky_n + yk_E \to 1:$$

Par uniforme convexité on a donc

$$ky_n - yk_E \to 0;$$

d'où la proposition.

A.3.5. Espaces séparables.

Définition A.3.20. *On dit qu'un espace métrique X est séparable s'il existe un sous-ensemble dénombrable dense dans X.*

Proposition A.3.21. *Soit E un espace de Banach. Si E' est séparable alors E est séparable.*

Démonstration. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dense dans E' et soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de E telle que

$$kx_nk_E = 1 \quad \text{et} \quad hf_n; x_ni \geq \frac{1}{2}kf_nk_{E'} :$$

Soit F l'ensemble des combinaisons linéaires finies à coefficients rationnels des x_n. Alors F est dénombrable, montrons qu'il est dense dans E. Par le corollaire A.2.15 du théorème de Hahn-Banach il suffit de montrer que toute forme linéaire $f \in E'$ qui s'annule sur F est identiquement nulle. Soit donc f une telle forme linéaire, et soit $\varepsilon > 0$. Il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que

$$kf - f_nk_{E'} \leq \varepsilon:$$

On écrit alors, puisque f s'annule sur F,

$$\frac{1}{2}kf_nk_{E'} \leq h f_n; x_ni = hf_n - f; x_ni \leq \varepsilon;$$

et donc

$$kf\,k_{E} \quad k\ f \quad f_{n}k_{E} + kf_{n}k_{E} \qquad 3''$$

et donc f est identiquement nulle. La proposition est démontrée.

La réciproque n'est pas vraie (on verra ci-dessous que L^1 est séparable, mais $(L^1) = L^1$ ne l'est pas).

Corollaire A.3.22. *Soit E un espace de Banach. On a*

$$E \quad \textit{réflexif et séparable} \quad () \quad E \quad \textit{réflexif et séparable:}$$

Démonstration. $($ = provient des Propositions A.3.16 et A.3.21.

$=)$ est dû au fait que si E est réflexif et séparable alors E l'est aussi, et donc E aussi.

On rappelle qu'un espace topologique E est dit métrisable s'il existe une métrique sur E qui induit la topologie de E.

Exercice. Soit E un espace de Banach de dimension infinie, alors E n'est jamais métrisable pour la topologie $(E;E\ )$, et E n'est jamais métrisable pour la topologie $(E\ ;E)$.

Théorème A.3.23. *Soit E un espace de Banach. Alors E est séparable si et seulement si B_{E} est métrisable pour la topologie $(E\ ;E)$.*

Démonstration. $=)$ Soit $(x_{n})_{n\ 1}$ une suite dense dans B_{E}, on définit la métrique suivante sur B_{E} :

$$8(f;g)\ 2\ B_{E} \quad B_{E}\ ; \quad d(f;g) := \sum_{n=1}^{+1} 2^{\,n} jhf \quad g;x_{n}ij :$$

Montrons que la topologie associée à d coïncide avec $(E\ ;E)$ sur B_{E} .

- soit $f\ 2\ B_{E}$, soit $r > 0$ un réel, $p \quad 1$ un entier et soit

$$V := \left\{ g\ 2\ B_{E} \ =jhf \quad g;y_{i}ij < r\ ;\ \ 8i\ 2\ f\,1;:::;pg \right\}$$

un voisinage de f pour $(E\ ;E)$, avec (sans perte de généralité) $y_{i}\ 2\ B_{E}$ pour tout i dans $f\,1;:::;pg$. Montrons qu'il existe $r^{0} > 0$ tel que

$$U := \left\{ g\ 2\ B_{E} \ =d(f;g) < r^{\,0} \right\} \quad V :$$

Pour tout $i\ 2\ f\,1;:::;pg$ on peut trouver n_{i} tel que

$$kx_{n_{i}} \quad y_{i}k_{E} \quad \frac{r}{4}$$

Alors en choisissant r^{0}tel que pour tout $i\ 2\ f\,1;:::;pg$ on ait $2^{n_{i}}r^{0} < \frac{r}{2}$ on a pour tout $g\ 2\ U$

$$jhf \quad g;y_{i}ij \quad jh\ \ f \quad g;y_{i} \quad x_{n_{i}}ij + jhf \quad g;x_{n_{i}}ij \ < \ 2\ \ \frac{r}{4} + 2^{n_{i}}r^{0} < r$$

donc $g\ 2\ V$.

- soit $f\ 2\ B_{E}$, soit $r > 0$ et soit

$$U^{0} := \left\{ g\ 2\ B_{E} \ =d(f;g) < r \right\} :$$

Montrons qu'il existe $r^{0} > 0$ et p tels que

$$V^{0} := \left\{ g\ 2\ B_{E} \ =jhf \quad g;x_{n}ij < r^{\,0};\ 8n\ 2\ f\,1;:::;pg \right\} \quad U^{0}:$$

On choisit $r^0 < \frac{r}{4}$ et p assez grand pour que $2^{1-p} < \frac{r}{2}$, et on a alors pour tout $g \in V^0$

$$d(f;g) = \sum_{n=1}^{p} 2^{-n} |\langle f-g; x_n\rangle| + \sum_{n=p+1} 2^{-n} |\langle f-g; x_n\rangle|$$
$$2r^0 + 2 \sum_{n=p+1} 2^{-n} < r;$$

donc $f \in U^0$.

($\Leftarrow$) Supposons que $B_{E'}$ est métrisable pour $\sigma(E';E)$ (avec une distance d) et montrons que E est séparable. On définit pour tout entier $n \geq 1$

$$U_n := \left\{ f \in B_{E'} \,;\, d(f;0) < \frac{1}{n} \right\}$$

et l'on considère un voisinage V_n de 0 pour $\sigma(E';E)$, inclus dans U_n, que l'on écrit sous la forme

$$V_n := \left\{ f \in B_{E'} \,;\, |\langle f;x\rangle| < r_n \,;\, x \in A_n \right\}$$

où $r_n > 0$ et A_n est un sous-ensemble fini de E. L'ensemble $A := \bigcup_{n \geq 1} A_n$ est dénombrable. Montrons que l'espace vectoriel $\overline{A}$ engendré par A est dense dans E. Il suffit de remarquer que $\bigcap_{n \geq 1} V_n = \{0\}$ donc

$$(\langle f;x\rangle = 0 \quad \forall x \in A) \Rightarrow f = 0$$

et donc par le corollaire A.2.15, $\overline{A}$ est dense dans E. D'où le résultat.

Remarque. Un argument analogue permet de démontrer que si E est séparable alors $B_{E'}$ est métrisable. La réciproque est vraie mais est plus délicate à démontrer (voir [**2**]).

Montrons enfin les deux corollaires suivants sur les suites bornées de E et E'.

Corollaire A.3.24. *Soit E un espace de Banach séparable et soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite bornée de E'. Alors il existe une sous-suite extraite de (f_n) qui converge pour la topologie $\sigma(E';E)$.*

Démonstration. Sans perte de généralité on peut supposer que $f_n \in B_{E'}$, et le résultat est un corollaire immédiat des théorèmes A.3.10 (Banach-Alaoglu) et A.3.23 (métrisabilité de $B_{E'}$).

Corollaire A.3.25. *Soit E un espace de Banach réflexif et soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite bornée de E. Alors il existe une sous-suite extraite de (x_n) qui converge pour la topologie $\sigma(E;E')$.*

Démonstration. Sans perte de généralité on peut supposer que $x_n \in B_E$. Soit X l'espace vectoriel engendré par les x_n. Alors $F := \overline{X}$ est séparable, et réflexif comme sous-espace fermé d'un espace réflexif (Proposition A.3.15). Par le Corollaire A.3.22, F' est séparable, donc la boule unité fermée $B_{F'}$ de F' est métrisable pour $\sigma(F';F)$ grâce au théorème A.3.23. Par ailleurs grâce au Théorème A.3.10 de Banach-Alaoglu on sait que $B_{F'}$ est compacte pour $\sigma(F';F)$. Donc $B_{F'}$ est compacte métrisable pour $\sigma(F';F)$, et donc B_F, qui est isomorphe à $B_{F''}$ puisque F est réflexif, est compacte métrisable pour la topologie $\sigma(F;F')$. Le résultat est démontré.

A.3.6. Espaces de Lebesgue.

Rappels. Pour tout ouvert de $\mathbb{R}^d$, l'espace $L^p(\Omega)$, pour $1 \leq p < \infty$, est l'ensemble des $f : \Omega \to \mathbb{R}$ mesurables telles que $|f|^p$ est intégrable sur Ω (pour la mesure de Lebesgue), quotienté par la relation d'équivalence d'égalité presque partout, et muni de la norme

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} := \left(\int_\Omega |f(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}} : \tag{A.18}$$

On définit de même

$$\|f\|_{L^\infty(\Omega)} := \text{supess } |f| = \inf \{ C ; |f(x)| \leq C \text{ p.p. dans } \Omega \} :$$

Si $1 \leq p \leq \infty$, l'espace $L^p(\Omega)$ est complet.
Si $1 \leq p < \infty$, l'espace $D(\Omega)$ des fonctions C^∞ à support compact sur Ω (cet espace sera étudié au Chapitre B) est dense dans $L^p(\Omega)$.
On rappelle l'inégalité de Hölder : si $f \in L^p(\Omega)$ et $g \in L^{p'}(\Omega)$ avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ alors

$$\int_\Omega |f g| \, dx \leq \|f\|_{L^p(\Omega)} \, \|g\|_{L^{p'}(\Omega)} :$$

Théorème A.3.26. *Si $1 \leq p < \infty$, l'espace $L^p(\mathbb{R}^d)$ est séparable (ainsi que $L^p(\Omega)$ si Ω est mesurable).*

Démonstration. Le résultat se démontre en pavant $\mathbb{R}^n$ par des ensembles $\prod_{k=1}^{n}]a_k ; b_k[$ de côtés rationnels et en considérant les fonctions caractéristiques de ces domaines. Les détails sont laissés en exercice.

Théorème A.3.27. *Si $1 < p < \infty$, l'espace $L^p(\Omega)$ est uniformément convexe, donc réflexif.*

Démonstration. Soit la fonction h définie sur $\mathbb{R}^+$ par

$$h(r) := (1 + r^{\frac{1}{p}})^p + |1 - r^{\frac{1}{p}}|^p :$$

Alors

$$h'(r) = (1 + r^{\frac{1}{p}})^{p-1} + (1 - r^{\frac{1}{p}})^{p-1} (1 - r^{\frac{1}{p}})$$

et

$$h''(r) = \frac{p-1}{p} r^{-1-\frac{1}{p}} \left(1 - r^{\frac{1}{p}} \right)^{p-2} (1 + r^{\frac{1}{p}})^{p-2}$$

donc h est convexe sur $\mathbb{R}^+$ si $p \geq 2$, concave si $p \leq 2$. Rappellons l'inégalité de Jensen : si H est concave alors

$$\frac{\int_\Omega u^p H\left(\frac{v}{u}\right)^p dx}{\int_\Omega u^p \, dx} \leq H\left(\frac{\int_\Omega v^p \, dx}{\int_\Omega u^p \, dx} \right) ;$$

et l'inégalité est inversée si H est convexe.

- Dans le cas $p \geq 2$ on a donc

$$\left\| \frac{u+v}{2} \right\|^p_{L^p(\Omega)} + \left\| \frac{u-v}{2} \right\|^p_{L^p(\Omega)} \leq \frac{1}{2} \|u\|^p_{L^p(\Omega)} + \frac{1}{2} \|v\|^p_{L^p(\Omega)} \tag{A.19}$$

donc si $\|u\|_{L^p(\Omega)} = \|v\|_{L^p(\Omega)} = 1$ et $\|u - v\|_{L^p(\Omega)} > 2\varepsilon$ il vient

$$\left\| \frac{1}{2}(u+v) \right\|_{L^p(\Omega)} \leq (1 - \varepsilon^p)^{\frac{1}{p}}$$

et le résultat est démontré.

- Dans le cas $p \geq 2$ on a la même inégalité (A.19) inversée et on l'applique à $u = \frac{u+v}{2}$, $v = \frac{u-v}{2}$ et $\|u\|_{L^p(\Omega)} = \|v\|_{L^p(\Omega)} = 1$. Alors

$$\left\|\frac{1}{2}(u+v)\right\|_{L^p(\Omega)}^p + \left\|\frac{1}{2}(u-v)\right\|_{L^p(\Omega)}^p \leq \frac{1}{2}\|u+v\|_{L^p(\Omega)}^p + \frac{1}{2}\|u-v\|_{L^p(\Omega)}^p \leq 2$$

et le résultat est démontré dans le cas où $\|u-v\|_{L^p} \leq \|u+v\|_{L^p}$ puisque $p > 1$: on a en effet

$$\left\|\frac{1}{2}(u+v)\right\|_{L^p(\Omega)} \leq 2^{1-\frac{p}{p}}.$$

Dans le cas contraire alors on utilise (par une formule de Taylor sur $t \mapsto t^p$ pour $p \geq 2$) que pour tout $a \geq b \geq 0$

$$\frac{1}{2}(a+b)^p + \frac{1}{2}(a-b)^p \leq a^p + \frac{1}{2}p(p-1)b^2(a+b)^{p-2}.$$

Alors en appliquant cette inégalité à

$$a := \left\|\frac{1}{2}(u+v)\right\|_{L^p(\Omega)} \quad \text{et} \quad b := \left\|\frac{1}{2}(u-v)\right\|_{L^p(\Omega)}$$

on obtient

$$\left\|\frac{1}{2}(u+v)\right\|_{L^p(\Omega)}^p + \frac{1}{2}p(p-1)\left\|\frac{1}{2}(u-v)\right\|_{L^p(\Omega)}^2 \left\|\frac{1}{2}(u+v)\right\|_{L^p(\Omega)}^{p-2} \leq 1$$

que l'on multiplie par $\left\|\frac{1}{2}(u+v)\right\|_{L^p(\Omega)}^{2-p}$. On trouve

$$\left\|\frac{1}{2}(u+v)\right\|_{L^p(\Omega)}^2 + p(p-1)\left\|\frac{1}{2}(u-v)\right\|_{L^p(\Omega)}^2 \left\|\frac{1}{2}(u+v)\right\|_{L^p(\Omega)}^{2-p} \leq 1$$

et le résultat suit.

Théorème A.3.28 (Représentation de Riesz)**.** *Soit $1 < p < +\infty$ et soit $\ell' \in (L^p(\Omega))'$. Soit p' défini par*

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1 :$$

Alors il existe $u \in L^{p'}(\Omega)$ unique tel que

$$\forall f \in L^p(\Omega) \; ; \quad \langle \ell, f \rangle = \int_\Omega u(x) f(x)\, dx :$$

De plus on a

$$\|u\|_{L^{p'}(\Omega)} = \|\ell'\|_{(L^p(\Omega))'}$$

Démonstration. Soit T l'opérateur défini par

$$T : \begin{array}{ccc} L^{p'}(\Omega) & \to & (L^p(\Omega))' \\ u & \mapsto & Tu : \begin{array}{ccc} L^p(\Omega) & \to & \mathbb{R} \\ f & \mapsto & \langle Tu, f \rangle := \int_\Omega u(x) f(x)\, dx : \end{array} \end{array}$$

Montrons que T est une isométrie surjective. L'inégalité de Hölder implique que

$$\|Tu\|_{(L^p(\Omega))'} \leq \|u\|_{L^{p'}(\Omega)} :$$

Pour montrer

$$\|Tu\|_{(L^p(\Omega))'} \geq \|u\|_{L^{p'}(\Omega)} \tag{A.20}$$

posons

$$v(x) := |u(x)|^{p'-2}u(x) \; ; \quad v(x) := 0 \text{ si } u(x) = 0 :$$

Alors $v \in L^p(\Omega)$ et

$$\|v\|^p_{L^p(\Omega)} = \|u\|^{p'}_{L^{p'}(\Omega)} :$$

Par ailleurs

$$\langle Tu; v\rangle = \|u\|^{p'}_{L^{p'}(\Omega)}$$

donc

$$\|Tu\|_{(L^p(\Omega))'} \qquad \frac{\langle Tu; v\rangle}{\|v\|_{L^p(\Omega)}} = \|u\|_{L^{p'}(\Omega)} ;$$

ce qui démontre (A.20).

Montrons maintenant que T est surjectif, ce qui achèvera la démonstration. L'espace $E := T(L^{p'}(\Omega))$ est un sous-espace fermé de $(L^p(\Omega))'$ (parce que $L^{p'}(\Omega)$ est complet et T est une isométrie) donc il s'agit de démontrer qu'il est dense dans $(L^p(\Omega))'$. On applique le Corollaire A.2.15 et le fait que $L^p(\Omega)$ est réflexif ; supposons donc qu'il existe $h \in L^p(\Omega)$, tel que

$$\langle Tu; h\rangle = 0 \quad \forall u \in L^{p'}(\Omega) :$$

Alors en posant $u(x) := |h(x)|^p \, \overline{h(x)}$ on en déduit que $h = 0$, d'où le résultat.

Si $1 < p < \infty$ on a l'identification $(L^p)' = L^{p'}$.

Exercice. Soit $\ell \in (L^1(\Omega))'$. Il existe $u \in L^\infty(\Omega)$ unique tel que

$$\forall f \in L^1(\Omega) \; ; \quad \langle \ell; f\rangle = \int_\Omega u(x) f(x)\, dx :$$

De plus on a

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} = \|\ell\|_{(L^1(\Omega))'}$$

L'espace L^1 n'est pas réflexif (et L^∞ non plus). L'espace L^∞ n'est pas séparable.

A.4. Espaces de Hilbert

A.4.1. Définitions et première propriétés.

Définition A.4.1 (Produit scalaire)**.** *Soit H un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$. Un produit scalaire sur H est une forme sesquilinéaire $(\,|\,)$ de $H \times H$ dans $\mathbb{C}$ (linéaire en la première variable et antilinéaire en la seconde), hermitienne, définie positive : elle vérifie pour tous $x; y \in H; \; \lambda \in \mathbb{C}$*

$$\begin{aligned}
&(x + x' | y) = (x|y) + (x'|y) ;\\
&(x | y + y') = (x|y) + (x|y') ;\\
&(y|x) = \overline{(x|y)} ;\\
&(x|x) \geq 0; \quad \text{et} \quad (x|x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 :
\end{aligned}$$

La norme $x \mapsto \|x\| := \sqrt{(x|x)}$ associée au produit scalaire vérifie les propriétés suivantes :

$$|(x|y)| \leq \|x\|\|y\| \quad \text{(inégalité de Cauchy-Schwarz)} ;$$

$$\left\|\frac{x+y}{2}\right\|^2 + \left\|\frac{x-y}{2}\right\|^2 = \frac{1}{2}\|x\|^2 + \|y\|^2 \quad \text{(identité de la médiane)} :$$

Définition A.4.2 (Espace de Hilbert – 1862-1943)**.** *Un espace pré-hilbertien est un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ muni d'un produit scalaire. Un espace de Hilbert est un espace pré-hilbertien, complet pour la norme $x \mapsto \|x\|$.*

Exemples. L'espace C^n muni du produit scalaire

$$(x|y) := \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y_i}$$

est un espace de Hilbert séparable (car de dimension finie).

L'espace $\ell^2(Z)$ muni du produit scalaire

$$(x|y) := \sum_{i=1}^{+\infty} x_i \overline{y_i}$$

est un espace de Hilbert séparable.

L'espace $L^2(\Omega)$, avec Ω ouvert de $\mathbb{R}^n$, muni du produit scalaire

$$(f|g) := \int_{\Omega} f\overline{g}(x)\,dx$$

est un espace de Hilbert. On verra plus bas qu'il est séparable.

Proposition A.4.3. *Les espaces de Hilbert sont uniformément convexes, donc réflexifs.*

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$ et soient x, y dans un espace de Hilbert H, tels que

$$\|x\| \leq 1, \|y\| \leq 1, \quad \text{et} \quad \|x - y\| > \varepsilon.$$

Alors par l'identité de la médiane on a

$$\left\|\frac{x+y}{2}\right\|^2 < 1 - \frac{\varepsilon^2}{4}$$

et le résultat suit.

Le théorème suivant est très important.

Théorème A.4.4 (Projection sur un convexe fermé)**.** *Soit K un convexe fermé non vide d'un espace de Hilbert H et soit $x \in H \setminus K$. Alors*

a) Il existe un unique point $y = p_K(x) \in K$ tel que

$$\|x - y\| = \min_{y' \in K} \|x - y'\|. \tag{A.21}$$

On prolonge p_K à H en posant $p_K(y) = y$ pour tout $y \in K$.

b) Le point $p_K(x) \in K$ est l'unique point $y \in K$ tel que

$$\mathrm{Re}(x - y|z - y) \leq 0 \quad \forall z \in K.$$

c) L'application p_K est 1-lipschitzienne :

$$\|p_K(x) - p_K(y)\| \leq \|x - y\| \quad \forall x, y \in H.$$

d) Si K est un sous-espace vectoriel fermé de H alors p_K est linéaire, et $p_K(x)$ est l'unique élément y de K tel que $x - y$ soit orthogonal à tout élément de K.

Démonstration. *a)* Soit $x \in H \setminus K$ et soit $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite minimisante pour (A.21), c'est-à-dire une suite telle que

$$y_n \in K \quad \text{et} \quad d_n := \|x - y_n\| \to d := \inf_{y' \in K} \|x - y'\|, \quad n \to \infty.$$

L'identité de la médiane fournit

$$x - \left\|\frac{y_n + y_m}{2}\right\|^2 + \left\|\frac{y_n - y_m}{2}\right\|^2 = \frac{1}{2}\,d_n^2 + d_m^2.$$

Comme $\frac{y_n + y_m}{2}$ appartient à K, on a

$$x \quad \frac{y_n + y_m}{2} \qquad d$$

et donc

$$\frac{y_n \quad y_m}{2}^{\,2} \quad \frac{1}{2}\, d_n^2 + d_m^2 \qquad d^2$$

donc $(y_n)_{n2\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans H. Elle converge donc vers une limite $y\ 2\ K$ et on a $d = kx \quad yk$.

On montrera l'unicité en $b)$.

$b)$ Soit $x\ 2\ H\, n\, K$ et supposons que $y\ 2\ K$ vérifie

$$kx \quad yk = \min_{y^0 2 K} kx \quad y^0 k :$$

Soit $z\ 2\ K$. Puisque $(1 \quad t)y + tz\ 2\ K;$ on a

$$kx \quad yk \qquad x \quad (1 \quad t)y + tz \quad = k(x \quad y) \quad t(y \quad z)k :$$

Il suit que

$$kx \quad yk^2 \quad k\ x \quad yk^2 \quad 2t\,\mathrm{Re}\,(x \quad yjy \quad z) + t^2 ky \quad zk^2$$

et en faisant tendre t vers 0 on obtient que

$$\mathrm{Re}\,(x \quad yjz \quad y) \quad 0 \quad 8z\ 2\ K : \tag{A.22}$$

Inversement si $y\ 2\ K$ vérifie (A.22) alors on écrit

$$kx \quad yk^2 \quad k\ x \quad zk^2 = 2\,\mathrm{Re}\,(x \quad yjz \quad y) \quad k\ z \quad yk^2 \quad 8z\ 2\ K\ ;$$

donc

$$kx \quad yk^2 \quad k\ x \quad zk^2 \quad 0; \quad 8z\ 2\ K$$

ce qui implique l'équivalence entre (A.22) et (A.21).

Montrons enfin que y est unique. Si y_1 et y_2 vérifient (A.22), alors

$$\mathrm{Re}\,(x \quad y_1 jz \quad y_1) \quad 0; \quad 8z\ 2\ K$$
$$\mathrm{Re}\,(x \quad y_2 jz \quad y_2) \quad 0; \quad 8z\ 2\ K$$

et en choisissant $z = y_2$ dans la première ligne et $z = y_1$ dans la seconde on obtient en faisant la somme des deux inégalités obtenues

$$ky_1 \quad y_2 k^2 \quad 0$$

d'où le résultat.

$c)$ Soit $x; y\ 2\ K$, on a

$$\mathrm{Re}\ x \quad p_K(x)jz \quad p_K(x) \qquad 0; \quad 8z\ 2\ K$$
$$\mathrm{Re}\ y \quad p_K(y)jz \quad p_K(y) \qquad 0; \quad 8z\ 2\ K :$$

En choisissant comme ci-dessus $z = p_K(y)$ dans la première ligne et $z = p_K(x)$ dans la seconde on obtient

$$p_K(x) \quad p_K(y)^{\,2} \quad \mathrm{Re}\ x \quad yjp_K(x) \quad p_K(y)$$

et le théorème suit par l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

$d)$ Si K est un sous-espace vectoriel fermé, alors c'est un convexe fermé non vide, et donc la projection $y = p_K(x)$ est l'unique élément y de K tel que pour tout $z\ 2\ K$

$$\mathrm{Re}\,(x \quad yjz) \quad 0 :$$

Par stabilité de K par passage à l'opposé et multiplication par i, on en déduit que $y = p_K(x)$ est l'unique élément y de K tel que pour tout $z \in K$

$$(x - y|z) = 0 :$$

La linéarité de p_K en résulte puisque si $x; x^0$ sont dans H et $\in \mathbb{C}$, alors $p_K(x) + p_K(x^0) \in K$ donc pour tout $z \in K$

$$x + x^0 - (p_K(x) + p_K(x^0))|z = x - p_K(x)|z + x^0 - p_K(x^0)|z = 0$$

et donc par unicité

$$p_K(x) + p_K(x^0) = p_K(x + x^0) :$$

Le théorème est démontré.

A.4.2. Théorèmes de Riesz, de Stampacchia et de Lax-Milgram.

Théorème A.4.5 (de représentation de Riesz)**.** *Soit H un espace de Hilbert réel et soit L une forme linéaire continue sur H. Alors il existe un unique vecteur $h \in H$ tel que*

$$\langle L; x\rangle = (h|x) \quad \forall x \in H :$$

De plus

$$\|L\|_H = \|h\|_H :$$

Démonstration. Soit $M := L^{-1}\{0\}$, sous-espace fermé de H. Si $M = H$ alors le résultat est évident. Sinon soit $x_0 \in H \setminus M$ et posons

$$x_1 := \frac{x_0 - p_M(x_0)}{\|x_0 - p_M(x_0)\|}$$

Alors

$$\|x_1\| = 1 \quad \text{et} \quad (x_1|y) = 0 \quad \forall y \in M :$$

Posons maintenant

$$h := \langle L; x_1\rangle x_1 :$$

On a alors

$$\|h\|_H = \langle L; x_1\rangle \leq \|L\|_H :$$

Par ailleurs pour tout $x \in H$ on note que

$$x - \frac{\langle L; x\rangle}{\langle L; x_1\rangle} x_1 \in M ;$$

donc

$$(x|x_1) - \frac{\langle L; x\rangle}{\langle L; x_1\rangle} = 0$$

donc

$$\langle L; x\rangle = (h|x) \quad \forall x \in H :$$

En particulier par Cauchy-Schwarz

$$\|L\|_H \leq \|h\|_H :$$

L'unicité est immédiate car

$$(h|x) = 0 \ \forall x \in H \implies h = 0 :$$

Le théorème est démontré.

Pour tout sous-ensemble A de H on définit son supplémentaire orthogonal

$$A^? := \{ x \in H : (x|a) = 0 \ \forall a \in A \} :$$

C'est un sous-espace vectoriel fermé de H, et $A^? = (\overline{A})^?$. En outre $A \subset (A^?)^?$. Si A est un sous-espace vectoriel fermé, alors tout élément x de H se décompose de manière unique en

$$x = p_A(x) + p_{A^?}(x) ;$$

et $A = (A^?)^?$. En outre il y a équivalence entre A dense et $A^? = \{0\}$.

Définition A.4.6. *Soit H un espace de Hilbert sur $\mathbb{R}$ et a une forme bilinéaire sur H. On dit que a est*

a) continue s'il existe une constante $C > 0$ telle que

$$|a(x;y)| \leq C\|x\|\|y\| \quad \forall x;y \in H :$$

b) coercive s'il existe une constante > 0 telle que

$$a(x;x) \geq \|x\|^2 \quad \forall x \in H :$$

Théorème A.4.7 (Théorème de Stampacchia (1922-1978))**.** *Soit a une forme bilinéaire continue et coercive sur un espace de Hilbert réel H et soit K un convexe fermé non vide de H. Pour toute forme linéaire continue L sur H il existe un unique $x \in K$ tel que*

$$a(x;y - x) \geq \langle L;y - x\rangle \quad \forall y \in K : \tag{A.23}$$

De plus, si a est symétrique alors x est caractérisé par

$$x \in K ; \quad \frac{1}{2}a(x;x) - \langle L;x\rangle = \min_{y \in K} \frac{1}{2}a(y;y) - \langle L;y\rangle :$$

Démonstration. Soit $L \in H$. D'après le Théorème A.4.5, il existe un unique $h \in H$ tel que

$$\langle L;y\rangle = (h|y) \quad \forall y \in H :$$

Pour tout $x \in H$, l'application

$$y \mapsto a(x;y)$$

est une forme linéaire continue sur H donc par le Théorème A.4.5 encore, il existe un unique élément de H que nous noterons Ax tel que

$$a(x;y) = (Ax|y) \quad \forall y \in H :$$

L'application A est linéaire de H dans H et on a pour tout $x \in H$

$$\|Ax\|^2 = a(x;Ax) \leq C\|x\|\|Ax\|$$

et

$$(Ax|x) = a(x;x) \geq \|x\|^2$$

donc

$$\|Ax\| \leq C\|x\| \text{ et } (Ax|x) \geq \|x\|^2 \quad \forall x \in H : \tag{A.24}$$

Il s'agit donc de trouver $x \in K$ tel que

$$(Ax|y - x) \geq (h|y - x) \quad \forall y \in K :$$

Si > 0 est une constante donnée (que nous fixerons plus loin) il est équivalent de démontrer qu'il existe un unique $x \in K$ tel que

$$(h - Ax) + x - x|y - x \leq 0 \quad \forall y \in K ;$$

ou encore

$$x = p_K \quad (h \quad Ax) + x \ :$$

Notons $S(y) := p_K \quad (h \quad Ay) + y$; nous allons choisir de telle sorte qu'il existe $k < 1$ tel que

$$8y; y^0 2 K; \quad kS(y) \quad S(y^0)k \quad kky \quad y^0k$$

ce qui répondra au problème grâce au théorème de point fixe de Picard. La projection étant une contraction (voir le Théorème A.4.4) on sait que

$$8y; y^0 2 K; \quad kS(y) \quad S(y^0)k \quad y \quad y^0 \quad (Ay \quad Ay^0)$$

donc par (A.24) il vient pour tous $y; y^0 2 K$,

$$kS(y) \quad S(y^0)k^2 \quad k \ y \quad y^0k^2 \quad 2 \ Ay \quad Ay^0jy \quad y^0 + \ ^2kAy \quad Ayk^2$$
$$k \ y \quad y^0k^2(1 \quad 2 \quad + \ ^2C^2) :$$

Il suffit donc de choisir $0 < \ < \ 2=C$ et $k^2 = 1 \quad 2 \quad + \ ^2C^2 < 1$ et le résultat suit.

Supposons maintenant que a est symétrique, alors a définit un produit scalaire sur H, et la norme $\sqrt{a(x;x)}$ est équivalente à la norme $k \ k$ par hypothèse. Soit $L \ 2 \ H$. En appliquant le Théorème A.4.5 il existe un unique $h^0 2 \ H$ tel que

$$hL; yi = a(h^0; y) \quad 8y \ 2 \ H :$$

Alors on a par (A.23)

$$a(h^0 \quad x; y \quad x) \quad 0 \quad 8y \ 2 \ K \tag{A.25}$$

donc $x = p_K h^0$ pour le produit scalaire défini par a. Par le Théorème A.4.4, (A.25) revient à ce que $x \ 2 \ K$ réalise

$$a(h^0 \quad x; h^0 \quad x) = \min_{y 2 K} a(h^0 \quad y; h^0 \quad y)$$

ou de manière équivalente réalise

$$\frac{1}{2}a(x;x) \quad a(h^0; x) \ = \min_{y 2 K} \ \frac{1}{2}a(y;y) \quad a(h^0; y)$$

et la conclusion provient de la définition de h^0. Le théorème est démontré.

Le corollaire suivant est particulièrement important pour résoudre des EDP elliptiques par exemple, par une approche variationnelle (voir le Chapitre F). Il est aussi à la base des méthodes d'éléments finis en analyse numérique.

Corollaire A.4.8. *[Théorème de Lax (1926-)-Milgram (1912-1961)] Soit a une forme bilinéaire continue et coercive sur un espace de Hilbert réel H. Alors pour toute forme linéaire continue $L \ 2 \ H$ il existe un unique $x \ 2 \ H$ tel que*

$$a(x; y) = \ hL; yi \quad 8y \ 2 \ H :$$

De plus, si a est symétrique alors x est caractérisé par

$$\frac{1}{2}a(x;x) \ \ h \ L; xi = \min_{y 2 H} \ \ \frac{1}{2}a(y;y) \ \ h \ L; yi \ :$$

Démonstration. Il suffit d'appliquer le Théorème A.4.7 à $K = H$, qui implique que

$$a(x; y \quad x) \ \ h \ L; y \quad xi \quad 8y \ 2 \ H;$$

et le résultat suit.

A.4.3. Bases hilbertiennes et séries de Fourier.

Théorème A.4.9. *Soit H un espace de Hilbert séparable. Il admet une base hilbertienne, c'est-à-dire une suite $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ totale et orthonormée. En outre pour tout $x \in H$ on a*

$$x = \sum_{n\in\mathbb{N}} (x|e_n)e_n$$

et la série converge dans H, avec

$$\|x\|^2 = \sum_{n\in\mathbb{N}} |(x|e_n)|^2 .$$

Enfin pour tous x, y dans H, en notant $x_n := (x|e_n)$ et $y_n := (y|e_n)$ on a

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n\overline{y_n} = (x|y) . \tag{A.26}$$

Démonstration. On commence par remarquer le fait suivant : si $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de H telle que

$$(h_n|h_m) = 0 \quad \forall m \neq n \quad \text{et} \quad \sum_{n\in\mathbb{N}} \|h_n\|^2 < 1 \ ;$$

alors la série $S := \sum_{n\in\mathbb{N}} h_n$ converge dans H et de plus

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \|h_n\|^2 = |S|^2 .$$

Ce résultat suit simplement du fait que la suite des sommes partielles S_N est de Cauchy dans H.

Soit maintenant $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un ensemble dénombrable dense de H et posons

$$F_n := \mathrm{Vect}\{y_1, \ldots, y_n\},$$

suite croissante d'espaces vectoriels de dimension finie, dont la réunion est dense dans H. On choisit un vecteur unitaire e_1 dans F_1, puis si $F_2 \neq F_1$ un vecteur e_2 de F_2 tel que (e_1, e_2) est une base orthonormale de F_2, etc. On construit ainsi une base hilbertienne sur H (c'est le procédé de Gram-Schmidt).

Soit alors $x_n := (x|e_n)$ et $S_N = \sum_{n\ N} x_n e_n$. On note que par le Théorème A.4.4,

$$\sum_{n=1}^{n} |(x|e_n)|^2 = \sum_{n=1}^{n} (x|e_n)e_n \ ^2 \quad \|x\|^2$$

don on peut appliquer la remarque précédente à $h_n = x_n e_n$: la série S_N converge dans H, vers une limite y et l'on a

$$\|y\|^2 = \sum_{n\in\mathbb{N}} |(x|e_n)|^2 .$$

Mais pour tout entier n on a

$$(x - y|e_n) = x_n - x_n = 0$$

donc $x - y$ est orthogonal à un système total, il est donc nul.

Le résultat se reformule ainsi : l'application linéaire qui à $x \in H$ fait correspondre la famille $x_n := (x|e_n)$ est une bijection isométrique de H sur ℓ^2. Le résultat (A.26) suit alors du fait que les isométries conservent le produit scalaire.

Exemples. (1) Polynômes de Legendre : ils sont définis sur $]a;b[$ R par

$$P_k(x) := c_k \frac{d^k}{dx^k} (x \quad a)^x (x \quad b)^k$$

et forment (pour c_k bien choisi) une base hilbertienne de $L^2(a;b)$, où chaque P_k est un polynôme de degré k.

(2) Fonctions d'Hermite : elles sont définies sur R par

$$_k(x) := c_k e^{\frac{x^2}{2}} \frac{d^k}{dx^k} e^{\ x^2} =: c_k(\ \ 1)^k e^{\ \frac{x^2}{2}} H_k(x)$$

et forment (pour c_k bien choisi) une base hilbertienne de $L^2(\mathrm{R})$, où chaque H_k est un polynôme de degré k.

Les séries de Fourier sont un exemple particulièrement important de base hilbertienne. On note L^2_T l'espace des fonctions T-périodiques dont la restrction à $[0;T]$ est de carré sommable, et l'on définit le produit scalaire sur L^2_T

$$(f\,jg) := \int_0^T f(t)\overline{g}(t)\,\frac{dt}{T}$$

On pose, pour tout entier $n \ 2 \ \mathrm{Z}$

$$e_n(t) := e^{in!t} \ ; \quad ! := \frac{2}{T}$$

Le théorème suivant est une conséquence immédiate du Théorème A.4.9, associé au Théorème de Stone-Weierstrass et de la densité des fonctions continues sur $[0;T]$ dans L^2_T.

Théorème A.4.10. *Les fonctions $e_n; n \ 2 \ \mathrm{Z}$ forment une base hilbertienne de L^2_T, et toute fonction $f \ 2 \ L^2_T$ peut se décomposer de manière unique en*

$$f = \sum_{n2\mathrm{Z}} c_n(f)e_n ; \quad c_n(f) := \int_0^T e_{\ n}(t)f(t)\,\frac{dt}{T}$$

dans L^2_T. On a

$$\int_0^T jf(t)j^2\,\frac{dt}{T} = \sum_{n2\mathrm{Z}} c_n(f)^{\ 2} \qquad \textit{(Formule de Parseval) :}$$

Réciproquement s'il existe des scalaires $_n$ tels que

$$\sum_{n2\mathrm{Z}} j\ _n j^2 < 1 \ ;$$

alors la série $\sum_{n2\mathrm{Z}} {}_n e_n$ converge dans L^2_T vers une fonction $f \ 2 \ L^2_T$ telle que

$$c_n(f) = \ _n ; \quad 8n \ 2 \ \mathrm{Z} :$$

Notons que ce résultat ne dit rien de la convergence ponctuelle de la série de Fourier. On peut montrer (mais c'est un résultat difficile, dû à Carleson en 1965) que les sommes partielles symétriques de la série de Fourier d'une fonction f de L^2_T convergent presque partout vers f.

Les propriétés suivantes se démontrent facilement.

(1) Si f est à valeurs réelles, les c_n possèdent la symétrie hermitienne : $c\ _n = \overline{c_n}$.

(2) Si f possède la symétrie hermitienne ($f(\ x) = \overline{f(x)}$), les c_n sont réels.

(3) Si f est paire (resp. impaire), les c_n sont pairs, c'est-à-dire $c_n = c\ _n$ (resp. impairs).

(4) Si f est réelle et paire, les c_n sont réels et pairs.

On utilise aussi la forme trigonométrique suivante pour la série de Fourier de $f \in L^2_T$:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t \quad ;$$

avec

$$a_n = c_n + c_{-n} = 2\int_0^T f(t)\cos n\omega t \, \frac{dt}{T}$$

$$b_n = i(c_n - c_{-n}) = 2\int_0^T f(t)\sin n\omega t \, \frac{dt}{T}$$

Cette formulation est surtout intéressante lorsque f est réelle (les a_n et b_n sont réels) ou possède des propriétés de parité (séries de sinus ou de cosinus).

Exercice. (1) Soit f une fonction T-périodique dans L^1_T. La suite de ses coefficients de Fourier, définis par

$$c_n(f) := \int_0^T e^{-in\omega t} f(t) \frac{dt}{T}$$

est bornée par $\|f\|_{L^1_T}$ et tend vers 0 quand n tend vers l'infini.

(2) Soit f une fonction T-périodique de classe C^k. On a

$$c_n\left(f^{(k)}\right) = (in\omega)^k c_n(f) \, ;$$

et il existe une constante C telle que l'on ait

$$c_n(f) \leq \frac{C}{|n|^k} \, ; \quad \forall n \neq 0 \, .$$

(3) Soit f une fonction T-périodique de classe C^1 par morceaux. En tout point t où f est continue, les sommes partielles symétriques

$$S_N(t) := \sum_{-N}^{N} c_n(f) e_n(t)$$

convergent vers $f(t)$.

En un point t où f est discontinue, $S_N(t)$ converge vers $\left(f(t^+) + f(t^-)\right)/2$.

Notons qu'il existe $f \in L^1_T$ dont la série de Fourier diverge en tout point (Kolmogorov 1926).

Remarque. On peut étendre les séries de Fourier au cas multidimensionnel, pour des fonctions périodiques relativement à un réseau (qui parfois n'a aucune relation avec la structure euclidienne, auquel cas il faut introduire la notion de "réseau réciproque").

Chapitre B

Distributions

B.1. Quelques rappels

Nous énonçons ici sans preuve un certain nombre de définitions et de résultats qui nous seront utiles par la suite et qui doivent être connus (et sinon devront être traités à titre d'exercices !).

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$ et $f \in L^p(\Omega)$ avec $1 \leq p < +\infty$. On considère l'ouvert ω des points au voisinage desquels $f = 0$ p.p. Alors le support (essentiel) de f est $\Omega \setminus \omega$. Si f est continue, le support de f coïncide avec l'adhérence de l'ensemble des points en lesquels f ne s'annule pas :

$$\mathrm{Supp}(f) = \overline{\{x \in \Omega \ ; f(x) \neq 0\}}.$$

Si f, g sont dans $L^1(\mathbb{R}^d)$ alors leur produit de convolution est la fonction de $L^1(\mathbb{R}^d)$ définie par

$$f \star g(x) := \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y) g(y)\, dy$$

et l'on a

$$\|f \star g\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} \leq \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} \|g\|_{L^1(\mathbb{R}^d)}.$$

C'est une opération commutative et associative. Plus généralement le produit de convolution de $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ par $g \in L^q(\mathbb{R}^d)$ vérifie

$$\|f \star g\|_{L^r(\mathbb{R}^d)} \leq \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \|g\|_{L^q(\mathbb{R}^d)}, \quad 1 + \frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$$

En outre le produit de convolution de f par g est bien défini et est continu et borné sur $\mathbb{R}^d$ si $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$ et $g \in C_c(\mathbb{R}^d)$, où l'on note $C_c(\mathbb{R}^d)$ l'ensemble des fonctions continues à support compact dans $\mathbb{R}^d$. On rappelle que si $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ et $\partial g \in L^1(\mathbb{R}^d)$ pour tout $|\alpha| \leq k$ alors pour tout $|\alpha| \leq k$, $\partial(f \star g) \in L^1(\mathbb{R}^d)$ et

$$\partial(f \star g) = f \star \partial g.$$

Enfin

$$\mathrm{Supp}(f \star g) \subset \overline{\mathrm{Supp}(f) + \mathrm{Supp}(g)}.$$

B.2. Limites inductives et topologie de $D(\Omega)$

B.2.1. Sur les fonctions C^1 à support compact.

Lemme B.2.1. *Soit K un compact de $\mathbb{R}^d$ et U voisinage ouvert de K. Il existe une fonction $\varphi \in C^1$, à valeurs dans $[0;1]$, nulle hors de U et telle que $\varphi_{|K} \equiv 1$.*

Démonstration. On commence par montrer l'existence d'une fonction $\in C^1$, positive ou nulle, strictement positive sur K, et nulle hors de U. Soit la fonction C^1

$$\theta(t) := 0 \quad \text{si} \quad t \leq 0; \qquad \theta(t) := e^{-\frac{1}{t}} \quad \text{si} \quad t > 0.$$

Pour tout $a \in K$ il existe une boule ouverte $B(a;r)$ incluse dans U, et on recouvre K par m telles boules ouvertes $B(a_j;r_j)_{1 \leq j \leq m}$. On constate alors que la fonction

$$\chi(x) := \sum_{j=1}^{m} (r_j^2 - \|x - a_j\|^2)$$

convient. Soit maintenant r le minimum sur K de la fonction $x \mapsto d(x;{}^cU)$ et soient les voisinages ouverts de K

$$V_1 := \left\{ x \in \mathbb{R}^d \,/\, d(x;K) < \frac{r}{3} \right\} \quad \text{et} \quad V_2 := \left\{ x \in \mathbb{R}^d \,/\, d(x;K) < \frac{2r}{3} \right\} :$$

On a alors $\overline{V_1} \subset V_2 \subset \overline{V_2} \subset U$ et la construction précédente fournit une fonction g dans C^1, positive ou nulle, strictement positive sur $\overline{V_1}$, et nulle hors de V_2 ainsi que d'une fonction h dans C^1, positive ou nulle, strictement positive sur $\overline{V_2} \setminus V_1$, et nulle sur K. Alors en prolongeant h en une fonction strictement positive sur le complémentaire de V_1 dans $\mathbb{R}^d$ on peut poser

$$\psi := \frac{g}{g+h}$$

Le lemme est démontré.

Corollaire B.2.2 (Partition de l'unité). *Soit K un ensemble compact de $\mathbb{R}^d$ et $(U_j)_{1 \leq j \leq N}$ des ouverts de $\mathbb{R}^d$ tels que $K \subset \bigcup_{j=1}^{N} U_j$. Il existe des fonctions $\psi_j \in C^1(\mathbb{R}^d)$, à valeurs dans $[0;1]$ et nulles en dehors de U_j, telles que*

$$\sum_{j=1}^{N} \psi_j = 1 \quad \textit{au voisinage de } K :$$

Démonstration. On commence par construire des compacts $K_j \subset U_j$ tels que $K \subset \bigcup_{j=1}^{N} K_j$. Le lemme précédent fournit des fonctions $\chi_j \in C^1(\mathbb{R}^d)$, à valeurs dans $[0;1]$, égales à 1 au voisinage de K_j et nulles en dehors de U_j. Soit V l'ouvert sur lequel $\sum_{j=1}^{N} \chi_j$ est non nul. On construit également χ_0 égale à 0 au voisinage de K et à 1 au voisinage du complémentaire de V. La fonction $S := \sum_{j=0}^{N} \chi_j$ est strictement positive sur $\mathbb{R}^d$ et les fonctions

$$\psi_j := \frac{\chi_j}{S}$$

conviennent. Le corollaire est démontré.

Définition B.2.3 (Suite régularisante). *Soit $\rho \in D(\mathbb{R}^d)$ une fonction positive d'intégrale 1, supportée dans $B(0;1)$. La suite $(\rho_\varepsilon)_{\varepsilon \in]0;1[}$ définie par*

$$\rho_\varepsilon := \frac{1}{\varepsilon^d} \, \rho\left(\frac{\cdot}{\varepsilon}\right)$$

est appelée suite régularisante.

Théorème B.2.4 (Densité de $D(\mathbb{R}^d)$ dans $C_c(\mathbb{R}^d)$). *Soit f une fonction continue à support compact dans $\mathbb{R}^d$ et soit $(\rho_\varepsilon)_{\varepsilon \in]0;1[}$ une suite régularisante. Alors $\rho_\varepsilon * f$ appartient à $D(\mathbb{R}^d)$ et*

$$\rho_\varepsilon * f \to f, \quad \varepsilon \to 0,$$

uniformément sur $\mathbb{R}^d$. *De même si* $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ *alors* $\varphi_\varepsilon * f$ *appartient à* $C^1(\mathbb{R}^d)$ *et*

$$\varphi_\varepsilon * f \to f, \quad \varepsilon \to 0;$$

dans $L^p(\mathbb{R}^d)$.

Démonstration. Soit f une fonction continue à support compact dans $\mathbb{R}^d$. Le fait que $\varphi_\varepsilon * f$ appartient à $D(\mathbb{R}^d)$ est une conséquence immédiate des règles de dérivation du produit de convolution. La convergence s'obtient en constatant que

$$\begin{aligned}\varphi_\varepsilon * f(x) - f(x) &= \frac{1}{\varepsilon^d}\int_{\mathbb{R}^d} \varphi\left(\frac{y}{\varepsilon}\right) f(x-y)\,dy - f(x)\\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(y) f(x-\varepsilon y)\,dy - f(x)\\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(y)\big(f(x-\varepsilon y) - f(x)\big)\,dy\end{aligned}$$

et le résultat suit de la continuité (uniforme sur le support de φ) de f.

Si $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ alors de même $\varphi_\varepsilon * f$ appartient à $C^1(\mathbb{R}^d)$ (puisque $\varphi \in L^{p'}(\mathbb{R}^d)$, ainsi que toutes ses dérivées). Par densité des fonctions continues à support compact dans $L^p(\mathbb{R}^d)$ on peut se ramener au cas où f est continue à support compact puisque si $g \in C_c(\mathbb{R}^d)$ alors

$$\|\varphi_\varepsilon * f - f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \le \|\varphi_\varepsilon * g - g\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} + \|f - g\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} + \|\varphi_\varepsilon * (f-g)\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}$$

et

$$\|\varphi_\varepsilon * (f-g)\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \le \|f - g\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}:$$

Enfin calcul précédent implique que

$$\|\varphi_\varepsilon * g - g\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \le \sup_{x \in \mathbb{R}^d} |\varphi_\varepsilon * g(x) - g(x)|\,|B(0;R+\varepsilon)|^{\frac{1}{p}} \to 0; \quad \varepsilon \to 0$$

où R est tel que le support de g est inclus dans $B(0;R)$.

Définition B.2.5 (Suite exhaustive de compacts)**.** *Soit* Ω *un ouvert de* $\mathbb{R}^d$. *Une suite exhaustive de compacts* $(K_j)_{j \in \mathbb{N}}$ *de* Ω *est une suite de compacts inclus dans* Ω *tels que* K_j *est inclus dans l'intérieur de* K_{j+1} *et* $\Omega = \bigcup_j K_j$. *Par exemple*

$$K_j = \left\{x \in \mathbb{R}^d / |x| \le j; \quad d(x; \Omega^c) \ge \frac{1}{j}\right\}:$$

Proposition B.2.6. *Soient* f *et* g *deux fonctions de* $L^1_{loc}(\Omega)$. *On a les équivalences entre*

a) $f = g$ *p.p sur* Ω

b) $\int_\Omega f'(x)\,dx = \int_\Omega g'(x)\,dx$ *pour toute fonction* $' \in D(\Omega)$.

Démonstration. On a clairement a) $\Rightarrow$ b). Inversement définissons $h := f - g$ et soit $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite exhaustive de compacts de Ω. Soit $(\chi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de $D(K_{n+1})$ telle que $\chi_n = 1$ sur K_n et soit φ une suite régularisante. Alors pour tout entier n

$$\varphi_\varepsilon * h\,\chi_n \to h\,\chi_n \quad \text{quand} \quad \varepsilon \to 0$$

dans L^1. Mais $\varphi_\varepsilon * h\,\chi_n = 0$ par hypothèse, d'où le résultat.

Exercices. *a*) Soit $'$ une fonction de classe C^1 sur R, à support dans $[0;1]$ et posons

$$_n(x) := \sum_{j=1}^{x^n} \frac{1}{j^2}\, '\,(x \quad j) :$$

Montrer que $(\ _n)_{n\ 1}$ est une suite de Cauchy dans $D(\mathrm{R})$ muni de la famille de semi-normes

$$k'\ k_k := \max_{j\ j\ k;x2\mathrm{R}} j@'\ (x)j$$

et que sa limite n'est pas à support compact.

b) Soit un ouvert de R^d et K un compact de .

L'espace $D_K(\ ) := \ ' \ 2\ C^1\ (K) = \mathrm{Supp}\ ' \quad K$ des fonctions indéfiniment différentiables à support dans K, muni de la famille de semi-normes

$$p_n(') := \max_{j\ j\ n;x2K} j@'\ (x)j$$

est un espace de Fréchet.

L'espace $D(\ ) := \ ' \ 2\ C^1\ (\ ) = \mathrm{Supp}\ '$ est compact des fonctions indéfiniment différentiables sur à support compact, muni de la famille de semi-normes

$$k'\ k_n := \max_{j\ j\ n;x2} j@'\ (x)j$$

est un pré-Fréchet, mais il n'est pas complet. Sa complétion est l'ensemble $C_0^1\ (\ )$ des fonctions C^1 tendant vers 0, ainsi que toutes leurs dérivées, sur le bord de (resp. à l'infini si n'est pas borné).

Pour compléter $D(\ )$ on va rendre la topologie plus fine. Cette topologie s'avèrera ne pas être métrisable mais ce ne sera pas un problème dans la pratique.

B.2.2. Limites inductives.

Définition B.2.7. *Soit E un espace vectoriel topologique localement convexe et soit une suite croissante $(E_k;T_k)_{k2\mathrm{N}}$ d'espaces vectoriels topologiques localement convexes telle que $E := \bigcup_{k2\mathrm{N}} E_k$. On suppose que pour tout $k\ 2\ \mathrm{N}$, E_k est fermé dans E_{k+1} pour la topologie T_{k+1} et que la topologie de E_k est celle induite de celle de E_{k+1} sur E_k (en d'autres termes $T_k = T_{k+1\,jE_k}$). On associe à chaque topologie T_k une famille de semi-normes $P_k = (p_k)_{2A_k}$. La topologie T sur E définie par la famille de semi-normes*

$$P := \left\{ p \text{ semi-norme sur } E = p_{jE_k} \text{ est continue pour tout } k\ 2\ \mathrm{N} \right\};$$

autrement dit

$$\begin{aligned} p\ 2\ P \ \emptyset\ 8 \quad k\ 2\ \mathrm{N};\ 9C > 0;J \quad A_k \text{ finie};\\ p \quad C \sup_{2J} p_k \text{ sur } E_k ; \end{aligned} \tag{B.1}$$

est appelée topologie limite inductive des topologies $(T_k)_{k2\mathrm{N}}$.

Notons que les injections canoniques

$$J_k : E_k\ !\ \ E$$

sont donc continues de $(E_k;T_k)$ vers $(E;T)$.

Dans tout ce paragraphe on se placera dans le contexte de la Définition B.2.7.

Remarque. La topologie T limite inductive des topologies $(T_k)_{k2\mathbb{N}}$ est la topologie d'espace vectoriel topologique localement convexe la plus fine rendant continues les injections canoniques $J_k : E_k \; ! \; E$ pour tout $k \; 2 \; \mathbb{N}$. En effet soit T^0 une topologie d'espace vectoriel topologique localement convexe sur E, qui rend continues ces projections canoniques, et soit P^0 la famille de semi-normes associée. Comme les injections canoniques sont continues on a par (B.1) que $P^0 \;\; P$, donc T a plus d'ouverts que T^0 et est donc plus fine.

Exemples. Soit un ouvert de $\mathbb{R}^n$. L'espace $C_c( )$ des fonctions continues dans à support compact, $C_c^m( )$ des fonctions de classe C^m dans à support compact, et $C_c^1 ( ) = D( )$ des fonctions de classe C^1 dans à support compact, sont limites inductives des suites d'espaces $C_{K_i}( )$, $C_{K_i}^m( )$ et $C_{K_i}^1 = D_{K_i}( )$ respectivement, où (K_i) est une suite exhaustive de compacts de , munis respectivement des semi-normes p_0, p_m et $(p_n)_{n2\mathbb{N}}$. On vérifie facilement que la topologie définie par ces limites inductives ne dépend pas du choix de la suite de compacts.

Lemme B.2.8. *Soit $(E; T)$ limite inductive d'une suite croissante $(E_k; T_k)$ d'espaces vectoriels topologiques localement convexes. Soit F un espace vectoriel topologique localement convexe et T une application linéaire de E dans F. Alors T est continue si et seulement si T_{jE_k} est continue (pour T_k) pour tout k.*

Démonstration. Si T est continue alors T_{jE_k} l'est aussi comme composée de T et de l'injection canonique $J_k : E_k \; ! \; E$. Inversement supposons que T_{jE_k} est continue pour tout k, et soit Q une famille de semi-normes définissant la topologie de F et $q \; 2 \; Q$. Alors $q \;\; T$ est une semi-norme sur E continue sur chaque E_k et appartient donc à P. Le résultat suit.

Lemme B.2.9. *Soit E un espace vectoriel topologique localement convexe et F un sous-espace vectoriel de E. Si U est un ouvert convexe de F pour la topologie induite par celle de E, il existe C ouvert convexe de E tel que $U = C \setminus F$.*

Démonstration. On peut supposer sans perte de généralité que $0 \; 2 \; U$. Par définition il existe un ouvert V de E tel que $U = V \setminus F$ et par locale convexité il existe W ouvert convexe de E contenant 0 tel que $W \;\; V$. On pose alors

$$C := \bigcup_{t2[0;1]} tW + (1 \;\; t)U \; :$$

Comme pour tout $x \; 2 \; U$ on peut écrire

$$x = "^2 x + (1 \;\; ")(1 + ")x \; ; \quad \text{avec } (1 + ")x \; 2 \; U \text{ et } "x \; 2 \; W \text{ pour } " \text{ assez petit}$$

on a

$$C = \bigcup_{t2]0;1]} tW + (1 \;\; t)U \; ;$$

donc C est ouvert, et il est évidemment convexe. On a clairement $U \;\; C \setminus F$, et enfin on a $C \setminus F \;\; U$ car pour tout $t \; 2]0; 1]$

$$tW + (1 \;\; t)U \setminus F = tW \setminus F + (1 \;\; t)U \;\; tV \setminus F + (1 \;\; t)U \;\; tU + (1 \;\; t)U \;\; U$$

car U est convexe. Le lemme est démontré.

Proposition B.2.10. *Soit $(E; T)$ limite inductive d'une suite croissante $(E_k; T_k)$ d'espaces vectoriels topologiques localement convexes vérifiant les hypothèses de la Définition B.2.7. On a les propriétés suivantes :*

a) Si U est un convexe symétrique de E contenant 0 tel que $U \setminus E_k$ est un ouvert de E_k pour tout k, alors U est un voisinage ouvert de 0 dans $(E; T)$.

b) La topologie $\mathcal{T}_{|E_k}$ induite par celle de E sur E_k coïncide avec celle de E_k.

c) Si chaque $(E_k, \mathcal{T}_k)$ est séparé, alors $(E, \mathcal{T})$ l'est aussi.

d) E_k est fermé dans $(E, \mathcal{T})$ pour tout k.

Démonstration. a) Par définition, pour tout k il existe une boule ouverte B_k pour P_k centrée en 0 incluse dans $U \cap E_k$. On rappelle que $\|\cdot\|_C$ désigne la jauge d'un convexe C, et c'est une semi-norme si C est symétrique. Alors $\|\cdot\|_{U \cap E_k} \leq \|\cdot\|_{B_k}$ donc par le Lemme A.2.10 on déduit que $\|\cdot\|_U$ est une semi-norme continue sur $(E, \mathcal{T})$. Mais l'ensemble $\{x = \|x\|_U < 1\}$ est inclus dans U, donc U est un voisinage de 0 dans $(E, \mathcal{T})$. Montrons maintenant qu'il est ouvert : soit $x \in U$, et montrons qu'il existe V voisinage de 0 pour E tel que $x + V \subset U$. On a $x \in E_k$ pour un certain k et comme $U \cap E_k$ est un ouvert de E_k, il existe V_k voisinage ouvert (convexe symétrique) de 0 dans E_k el que $x + V_k \subset U \cap E_k$. On construit alors une famille croissante $(V_{k+\ell})_{\ell \geq 0}$ de voisinages ouverts convexes symétriques de 0 dans $E_{k+\ell}$ tels que $V_k = V_{k+\ell} \cap E_k$ et $x + V_{k+\ell} \subset U \cap E_{k+\ell}$. On remarque que pour tout $m \geq k$, $V_k \cap E_m$ est un voisinage ouvert de 0 dans E_m et donc en prenant $V := \bigcup_{\ell \geq 1} V_{k+\ell}$ on trouve que V est un voisinage de 0 pour E tel que $x + V \subset U$.

b) On a $\mathcal{T}_{|E_k} \subset \mathcal{T}_k$ car pour tout ouvert U de $(E, \mathcal{T})$ on a $U \cap E_k = J_k^{-1}(U) \in \mathcal{T}_k$ puisque l'injection canonique J_k est continue.

Inversement soit U_k un ouvert (convexe symétrique contenant 0 sans perte de généralité) de $(E_k, \mathcal{T}_k)$, et montrons qu'il existe un voisinage ouvert non vide U de 0 dans $(E, \mathcal{T})$ tel que $U_k = U \cap E_k$. On construit itérativement, par application du Lemme B.2.9, une suite croissante de convexes (que l'on peut supposer symétriques) $(U_{k+\ell})_{\ell \geq 1}$ tels que pour tout $\ell \geq 1$, $U_{k+\ell}$ est ouvert dans $E_{k+\ell}$ et $U_k = U_{k+\ell} \cap E_k$. L'ensemble $U := \bigcup_{\ell \geq 1} U_{k+\ell}$ contient 0, il est convexe parce que la suite $(U_{k+\ell})_{\ell \geq 1}$ est croissante, il est symétrique, et on a $U_k = U \cap E_k$ par construction. Donc U est un voisinage ouvert de 0 dans $(E, \mathcal{T})$ grâce à a), donc U convient.

c) Soit $x \neq 0$ un élément de E, montrons qu'il existe U voisinage ouvert de 0 dans $\mathcal{T}$ tel que $x \notin U$(il suffit de montrer que le singleton $\{0\}$ est fermé puisque la diagonale de $E \times E$ est alors fermée comme image réciproque de $\{0\}$ par l'application $(x, y) \mapsto x - y$). On sait qu'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $x \in E_k$, et un ouvert convexe symétrique U_k contenant 0 tel que $x \notin U_k$. Comme dans le point b) on construit une suite croissante de convexes symétriques $(U_{k+\ell})_{\ell \geq 1}$ tels que $U_{k+\ell}$ est ouvert dans $E_{k+\ell}$ et $U_k = U_{k+\ell} \cap E_k$. L'ensemble $U := \bigcup_{\ell \geq 1} U_{k+\ell}$ est un voisinage ouvert non vide de 0 dans E et on a $U_k = U \cap E_k$ donc U ne contient pas x.

d) Soit $k \in \mathbb{N}$, soit $x \in E \setminus E_k$, montrons qu'il existe U voisinage ouvert de 0 dans $\mathcal{T}$ tel que $(x + U) \cap E_k = \emptyset$. Soit $m > k$ tel que $x \in E_m$. On sait que E_k est fermé dans E_m donc il existe un voisinage de 0 convexe symétrique U_m de $\mathcal{T}_m$ tel que $(x + U_m) \cap E_k = \emptyset$. On construit comme ci-dessus une suite croissante de convexes symétriques $(U_{m+\ell})_{\ell \geq 1}$ tels que $U_{m+\ell}$ est ouvert dans $E_{m+\ell}$ et $U_m = U_{m+\ell} \cap E_m$. Par ailleurs $(x + U_{m+\ell}) \cap E_k = \emptyset$: en effet si $y \in (x + U_{m+\ell}) \cap E_k$ alors $y - x \in U_{m+\ell} \cap E_m = U_m$ ce qui est impossible. L'ensemble U réunion des $(U_{m+\ell})_{\ell \geq 1}$ est un voisinage ouvert de 0 dans $(E, \mathcal{T})$ tel que $(x + U) \cap E_k = \emptyset$. Donc E_k est fermé dans $(E, \mathcal{T})$.

La proposition est démontrée.

Théorème B.2.11. *Soit $(E;T)$ limite inductive d'une suite croissante $(E_k;T_k)$ d'espaces vectoriels topologiques localement convexes séparés. Soit $(x_n)_{n2\mathbb{N}}$ une suite de E et $x\ 2\ E$. On a les équivalences*

a) (x_n) converge vers x dans E ;

b) Il existe un entier k tel que $x\ 2\ E_k$ et $x_n\ 2\ E_k$ pour tout $n\ 2\ \mathbb{N}$, et tel que (x_n) converge vers x dans E_k.

Démonstration. $a) =) b)$: On remarque que l'on peut supposer que la famille (E_k) est strictement croissante. Supposons que (x_n) converge vers x dans E. Montrons qu'il existe k tel que $x_n\ 2\ E_k$ pour tout $n\ 2\ \mathbb{N}$. On aura alors $x\ 2\ E_k$ puisque E_k est fermé par la Proposition B.2.10 d). Supposons qu'il n'existe pas de tel k. Alors on peut construire des sous-suites $k_\cdot$ et $n_\cdot$ telles que pour tout $` \ 2\ \mathbb{N}$ on ait $x_{n_\cdot}\ 2\ E_{k_\cdot+1}\ n E_{k_\cdot}$ et $E_{k_\cdot+1}$ strictement croissante. Pour tout $` \ 2\ \mathbb{N}$, comme $E_{k_\cdot}$ est fermé dans E il existe par le le théorème de Hahn-Banach une forme linéaire $T_\cdot\ 2\ E'$ (pour la topologie T) telle que

$$T_{\cdot jE_{k_\cdot}} \quad 0 \quad \text{et} \quad T_\cdot(x_{n_\cdot}) \not= 0 :$$

Définissons sur E la fonction p par

$$8y\ 2\ E ; \quad p(y) := \sum_{\cdot\ 0}^{\cdot\ `} \frac{jT_\cdot(y)j}{jT_\cdot(x_{n_\cdot})j}$$

Cette somme est finie sur chaque E_k donc p est une semi-norme continue sur chaque E_k et donc sur E. En particulier la suite $(p(x_{n_\cdot}))_\cdot$ devrait être bornée puisque $(x_{n_\cdot})$ converge vers x, alors que par construction

$$p(x_{n_\cdot}) \quad `:$$

On en déduit donc qu'il existe k tel que $x_n\ 2\ E_k$ pour tout $n\ 2\ \mathbb{N}$, et $x\ 2\ E_k$. On donc (x_n) converge vers x pour la topologie T_{jE_k} et donc dans $(E_k;T_k)$ par la Proposition B.2.10 b).

$b) =) a)$: C'est une conséquence directe de la Proposition B.2.10 b).

Le théorème est démontré.

Proposition B.2.12. *Soit $(E;T)$ limite inductive d'une suite croissante $(E_k;T_k)$ d'espaces vectoriels topologiques localement convexes séparés. Si chaque E_k est complet, alors E l'est aussi.*

Démonstration. Soit (x_n) une suite de Cauchy de $(E;T)$ et commençons par montrer qu'il existe $k\ 2\ \mathbb{N}$ tel que $x_n\ 2\ E_k$ pour tout $n\ 2\ \mathbb{N}$. Il suffit de remarquer que pour tout $p\ 2\ P$ la suite $(p(x_n))$ est bornée puis procéder par l'absurde exactement comme dans la démonstration du Théorème B.2.11. Comme $T_{jE_k} = T_k$ on conclut que (x_n) est de Cauchy dans $(E_k;T_k)$ et elle converge donc par complétude de E_k.

Corollaire B.2.13. *L'espace $D(\ )$ muni de la topologie limite inductive des topologies de $D_{K_i}(\ )$ avec K_i suite exhaustive de compacts de , est complet.*

Proposition B.2.14. *Soit $(E;T)$ limite inductive d'une suite $(E_k;T_k)$ strictement croissante d'espaces de Fréchet. Alors E n'est pas métrisable.*

Démonstration. Chaque E_k est fermé dans E, et d'intérieur vide. En effet s'il existait k tel que E_k est d'intérieur non vide, E_k contiendrait un voisinage de 0 dans E ce qui impliquerait que $E_k = E$ (car pour tout $x\ 2\ E$ il existerait suffisamment petit tel que x soit dans ce voisinage), ce qui est impossible puisque la suite (E_k) est strictement croissante. Mais E est complet donc s'il était métrisable, par le théorème de Baire on aurait $E = \bigcup E_k$ union dénombrable de fermés d'intérieur vide, donc serait d'intérieur vide ce qui est absurde.

Proposition B.2.15. *Soit $(E;T)$ limite inductive d'une suite croissante $(E_k;T_k)$ d'espaces vectoriels topologiques localement convexes et soit T une forme linéaire sur E. Si chaque E_k est métrisable, alors T est continue si et seulement si elle est séquentiellement continue.*

Démonstration. Si T est séquentiellement continue, alors T_{jE_k} est séquentiellement continue pour tout k et donc T_{jE_k} est continue pour tout k, ce qui implique le résultat par le Lemme B.2.8.

On en déduit la généralisation suivante du théorème de Banach-Steinhaus A.1.13.

Théorème B.2.16. *Soit $(E;T)$ limite inductive d'une suite croissante $(E_k;T_k)$ d'espaces de Fréchet (de topologie associée à une famille de semi-normes P_k) et F un pré-Fréchet (de topologie associée à une famille de semi-normes Q). On considère une famille $(T_\alpha)_{\alpha\in A}$ d'applications linéaires continues de E dans F telles que pour tout $x\in E$, la famille $(T_\alpha x)_{\alpha\in A}$ est bornée dans F. Alors pour tout $q\in Q$ et tout k il existe $C>0$, $\ell\in\mathbb{N}$ et $p_1;\dots;p_\ell$ dans P_k tels que*

$$\forall x\in E_k,\quad \forall \alpha\in A,\quad q(T_\alpha x)\leq C\sup_{1\leq j\leq \ell} p_j(x).$$

B.3. Distributions

B.3.1. Définition, exemples et premières propriétés. La théorie des distributions a été formalisée par L. Schwartz dans les années 50, après des idées de Heaviside à la fin du dix-neuvième siècle, mais aussi Hadamard, Leray, Poincaré et Sobolev au début du vingtième siècle. Il s'agit de généraliser la notion de fonction et d'étendre la notion de dérivée à toute fonction localement intégrable.

Dans toute la suite, sauf mention explicite du contraire, Ω sera un ouvert de $\mathbb{R}^d$. On munit $D(\Omega)$ de la topologie définie au paragraphe précédent (Corollaire B.2.13).

Définition B.3.1. *Une distribution T sur Ω est une forme linéaire continue sur $D(\Omega)$*

$$T:\begin{array}{ccc} D(\Omega) & \to & \mathbb{R} \\ \varphi & \mapsto & \langle T,\varphi\rangle \end{array}.$$

L'espace des distributions est noté $D'(\Omega)$. L'espace $D(\Omega)$ est parfois appelé espace de fonctions test.

La proposition suivante découle directement des propriétés vues dans le paragraphe précédent.

Proposition B.3.2. *On a les équivalences entre*

- *T est une distribution sur Ω*
- *pour tout compact K de Ω il existe un entier m et une constante $C>0$ tels que pour tout $\varphi\in D_K(\Omega)$*
$$|\langle T,\varphi\rangle|\leq C\sup_{x\in K,\ \alpha\in\mathbb{N}^d,\ |\alpha|\leq m}|\partial^\alpha\varphi(x)|,$$
- *T est séquentiellement continue sur $D(\Omega)$*
- *T est séquentiellement continue en 0.*