Analyse fonctionnelle
TD n° 1

Autour du théorème de Baire

Séance du 12 février 2018

Exercice 1. *Échauffement : formes linéaires continues*

Soit E un espace vectoriel topologique sur $\mathbb{K}$, et ℓ une forme linéaire non nulle sur E. On suppose que $\ker \ell$ est un sous-espace fermé de E.

1. Montrer qu'il existe $x \in E$ et V un voisinage équilibré de 0 tels que

$$(x+V) \cap \ker \ell = \emptyset.$$

2. Montrer que $\ell(V)$ est un ensemble borné de $\mathbb{K}$, et en déduire que ℓ est continue.

⋆

Exercice 2. *Espaces quotient*

Soit E un espace vectoriel topologique séparé, et F un sous-espace vectoriel de E. On rappelle que la topologie quotient sur E/F est la topologie la plus fine parmi celles qui rendent continue la projection canonique $\pi : E \to E/F$.

1. Montrer que si U est un ouvert de E, alors $\pi(U)$ est un ouvert de E/F.
2. En déduire que E/F possède une structure d'espace vectoriel topologique.
3. Montrer que E/F est séparé si et seulement si F est fermé.

⋆

Exercice 3. *Sur certains sous-espaces de L^1*

Soit (Ω, μ) un espace mesuré. Soit V un sous-espace fermé de $L^1(\Omega, \mathbb{C})$ possédant la propriété suivante : pour tout $f \in V$, il existe $p = p(f) > 1$ tel que $f \in L^p(\Omega, \mathbb{C})$.

1. Rappeler pourquoi, si $g \in L^1 \cap L^p$ pour un $p > 1$, alors $g \in L^q$ pour tout $q \in [1, p]$.
2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit $F_n := \{f \in V \cap L^{1+\frac{1}{n}},\ \|f\|_{L^{1+\frac{1}{n}}} \leq n\}$. Montrer que
— $\bigcup_{n\geq 1} F_n = V$,
— pour tout $n \geq 1$, F_n est un fermé de V. *(On pourra utiliser le lemme de Fatou.)*
3. En déduire qu'il existe $p_0 > 1$ tel que $V \subset L^{p_0}$, avec injection continue.

⋆

Exercice 4. *Sur les hypothèses du théorème de l'application ouverte*

1. Trouver une application linéaire continue $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui n'est pas ouverte.
2. Trouver une application continue surjective $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui n'est pas ouverte.
3. On note E l'ensemble des suites $\{x_n\}_{n\geq 0}$ presque nulles, muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$. Trouver $T \in \mathcal{L}(E)$ bijectif, dont l'inverse n'est pas continu.

⋆

Exercice 5. *La transformée de Fourier sur $L^1([0,2\pi])$*

Pour $f \in L^1([0,2\pi])$, on définit la suite de ses coefficients de Fourier par

$$c_n(f) := \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)e^{-inx}dx, \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

On considère l'application $\mathcal{F} : f \mapsto \{c_n(f)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ sur $L^1([0,2\pi])$.

1. Montrer que $\mathcal{F}$ prend ses valeurs dans $c_0(\mathbb{Z})$, l'ensemble des suites tendant vers 0 à l'infini.

2. Montrer que $\mathcal{F}$ est injective.

3. Montrer par l'absurde que $\mathcal{F}$ n'est pas surjective.

Bonus : Quel serait un meilleur espace sur lequel considérer $\mathcal{F}$?

$\star$

Exercice 6. *Un théorème de Grothendieck*

Le but de cet exercice est de démontrer le résultat suivant :

Théorème. *Soit (Ω,μ) un espace mesuré de mesure totale finie et $p \in [1,+\infty[$. On considère S un sous-espace fermé de $L^p(\Omega,\mathbb{C})$, inclus dans $L^\infty(\Omega)$. Alors S est de dimension finie.*

1. On commence par se ramener au cas où $p = 2$. Montrer qu'il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $f \in S$, $\|f\|_{L^\infty} \leq C\|f\|_{L^p}$. En déduire (en distinguant les cas $p \leq 2$ et $p > 2$) que, pour une certaine constante $M > 0$, on a, $\forall f \in S$,

$$\|f\|_{L^\infty} \leq M\|f\|_{L^2}.$$

2. Soit $n \geq 1$. On suppose qu'il existe une famille libre de n fonctions de S. Montrer qu'il existe alors une famille de fonctions $\phi_1,\ldots,\phi_n$ de S, orthonormale pour le produit scalaire (hermitien) de $L^2(\Omega,\mathbb{C})$.

3. On note $B := \{\lambda = (\lambda_1,\ldots,\lambda_n) \in \mathbb{C}^n,\ \sum_{i=1}^n |\lambda_i|^2 \leq 1\}$ la boule unité de $\mathbb{C}^n$. Pour $\lambda \in B$, on introduit $f_\lambda = \sum_{i=1}^n \lambda_i\phi_i$. Montrer qu'il existe un ensemble $\mathcal{N} \subset \Omega$ de mesure nulle tel que

$$\forall \lambda \in B,\ \forall x \in \Omega\backslash\mathcal{N},\ |f_\lambda(x)| \leq M.$$

4. En déduire que $\forall x \in \Omega\backslash\mathcal{N}$, on a $\sum_{i=1}^n |\phi_i(x)|^2 \leq M^2$, et conclure.

5. Montrer qu'en revanche, il existe des sous-espaces fermés de $L^2([0,2\pi])$, inclus dans $L^4([0,2\pi])$ et de dimension infinie. On pourra considérer par exemple

$$E := \left\{ f : x \mapsto \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n e^{i2^n x},\ \{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^2(\mathbb{N}) \right\}.$$

Généraliser.

$\star$

Exercice 7. *Théorème de Sunyer i Balaguer*

Soit $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ une fonction lisse telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe $n = n(x) \in \mathbb{N}$ tel que $f^{(n(x))}(x) = 0$. Montrer que f est polynomiale.

Indication : On peut poser $X = \{x \in \mathbb{R} \mid \forall a < x < b,\ f|_{]a,b[} \text{ n'est pas polynomiale}\}$, et montrer par l'absurde que $X = \emptyset$ en utilisant Baire.

$\star$