Analyse fonctionnelle
TD n° 10

Espaces de Sobolev

Séance du 2 mai 2018

Exercice 1. *Échauffement : petites questions sur $H^s(\mathbb{R}^d)$*

1. Vérifier que $\delta_0 \in H^s$ pour $s < -d/2$.

2. Montrer que l'injection de H^{s_1} dans H^{s_2}, pour $s_1 \geq s_2$, est continue.

3. Montrer que $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^d) \subset \bigcup_s H^s$.

4. On suppose maintenant que $s \in]\frac{d}{2}, \frac{d}{2}+1[$. Montrer que pour tout $\alpha \in [0,1]$ et x, y, $\xi \in \mathbb{R}^d$, il existe une constante $C > 0$ (dépendant de d et α) telle que

$$|e^{ix\cdot\xi} - e^{iy\cdot\xi}| \leq C|x-y|^\alpha |\xi|^\alpha.$$

En déduire que pour tout $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, tout $\alpha \in]0, s - \frac{d}{2}[$, il existe $C(\alpha, d)$ tel que

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^d, \quad \frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^\alpha} \leq C(\alpha, d)\|u\|_{H^s}.$$

En conclure que $H^s(\mathbb{R}^d)$ s'injecte continûment dans $\mathcal{C}^\alpha(\mathbb{R}^d)$, l'ensemble des fonctions α-höldériennes bornées.

⋆

Exercice 2. *Cas limite d'injection de Sobolev*

1. Montrer que $H^1(\mathbb{R}^2)$ ne s'injecte pas dans $L^\infty(\mathbb{R}^2)$.

Indication : On pourra considérer la fonction $x \mapsto \sqrt[3]{\ln|x|}$.

2. Soit $u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^2)$. Montrer que $\|u\|_{L^2}^2 \leq \|\partial_{x_1} u\|_{L^1}\|\partial_{x_2} u\|_{L^1}$.

3. En déduire que

$$\forall \theta \geq 2, \quad \|u\|_{L^{2\theta}}^\theta \leq \theta \|u\|_{L^{2(\theta-1)}}^{\theta-1}\|\nabla u\|_{L^2}.$$

4. Montrer que pout tout $\theta \geq 1$, il existe une constante $C(\theta)$ telle que

$$\|u\|_{L^{2\theta}} \leq C(\theta)\left(\|u\|_{L^{2(\theta-1)}} + \|\nabla u\|_{L^2}\right).$$

En conclure que pour tout $q \geq 2$, $H^1(\mathbb{R}^2) \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^2)$.

⋆

Exercice 3. *L'équation des ondes*

1. Soit $u_0 \in H^1(\mathbb{R}^N), u_1 \in L^2(\mathbb{R}^N)$. Résoudre dans $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}, L^2(\mathbb{R}^N))$:

$$\begin{cases} \partial_t^2 u - \Delta u = 0 & \text{dans } \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N, \\ u(0,\cdot) = u_0, \\ \partial_t u(0,\cdot) = u_1. \end{cases}$$

2. Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$. On suppose de plus $\operatorname{supp} \widehat{f} \subset \{\xi \in \mathbb{R}^N \mid 1 \leq |\xi| \leq 2\}$. Soit $\chi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$, radiale, telle que $\chi(\xi) = 0$ pour $|\xi| \leq \frac{1}{2}$ et $|\xi| \geq 3$, et $\chi(\xi) = 1$ pour $1 \leq |\xi| \leq 2$. Montrer que $\mathcal{F}^{-1}(e^{it|\xi|}\hat{f}) = K(t,x) * f$, où

$$K(t,x) = \int_{\mathbb{R}^N} \chi(\xi) e^{it|\xi| + ix\cdot\xi} d\xi.$$

3. Montrer que $|K(x,t)| \leq \frac{C}{|t|^{\frac{N-1}{2}}}$.

Indication : On pourra séparer les cas $|x| \leq \frac{t}{2}$, $\frac{t}{2} \leq |x| \leq 2t$ et $2t \leq |x|$.

4. En déduire une estimation de décroissance, quand $N \geq 2$, pour la solution de l'équation des ondes, avec des données initiales u_0, u_1 qui vérifient l'hypothèse de la question 2.

⋆

Exercice 4. *Théorème de Riesz-Fréchet-Kolmogorov*

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$, $p \in [1, \infty[$ et $\mathcal{F} \subseteq L^p(\Omega)$. Si $f \in L^p(\Omega)$, on étend implicitement f à $\mathbb{R}^d$ en posant $f(x) = 0$ pour $x \notin \Omega$. On peut alors considérer, pour $h \in \mathbb{R}^d$,

$$\tau_h f : x \longmapsto f(x+h).$$

Le but de cet exercice est de démontrer le résultat suivant :

Théorème. *$\mathcal{F}$ est relativement compacte dans $L^p(\Omega)$ si et seulement si $\mathcal{F}$ satisfait les trois conditions suivantes :*

(i) *$\mathcal{F}$ est bornée.*

(ii) *$\mathcal{F}$ vérifie le critère d'équicontinuité suivant :*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \quad \forall f \in \mathcal{F},\ \forall h \in B(0,\delta), \quad \|\tau_h f - f\|_{L^p(\Omega)} < \varepsilon.$$

(iii) *$\mathcal{F}$ vérifie le critère d'uniforme intégrabilité suivant :*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists R > 0, \quad \forall f \in \mathcal{F}, \quad \|f\|_{L^p(\Omega \setminus B(0,R))} < \varepsilon.$$

Partie réciproque. On suppose que $\mathcal{F}$ vérifie (i), (ii) et (iii).

1. Soient $R > 0$, $\rho \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ telle que $\operatorname{supp} \rho \subseteq B(0,1)$, $\rho \geq 0$, $\int \rho = 1$. On définit $\rho_n(x) := n^d \rho(nx)$, pour $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $\mathcal{F}_{n,R} = \left\{ (\rho_n * f)|_{\overline{\Omega \cap B(0,R)}} \,\middle|\, f \in \mathcal{F} \right\}$ est relativement compacte dans $C^0(\overline{\Omega \cap B(0,R)})$ (pour tout $n \in \mathbb{N}$).

2. Soit $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe N tel que pour $n \geq N$,

$$\forall f \in \mathcal{F}, \quad \|\rho_n * f - f\|_{L^p} < \varepsilon.$$

3. En déduire que $\mathcal{F}$ est précompacte dans $L^p(\Omega)$ et conclure.

Partie directe. On suppose que $\mathcal{F}$ est relativement compacte.

4. Soit $f \in \mathcal{C}_c^0(\mathbb{R}^d)$. Montrer que $\|\tau_h f - f\|_{\mathcal{C}^0} \to 0$ quand $|h| \to 0$.

5. En déduire que pour $f \in L^p(\Omega)$, $\|\tau_h f - f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \to 0$ quand $|h| \to 0$.

6. Conclure : montrer que $\mathcal{F}$ vérifie (i), (ii) et (iii).

Application.

7. On suppose Ω borné. Montrer que l'injection $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ est compacte (au sens où la boule unité de $H^1(\Omega)$ est compacte dans $L^2(\Omega)$).

⋆