

Analyse fonctionnelle

TD n° 12

OPÉRATEURS NON-BORNÉS

Séance du 15 mai 2018

Tous les espaces considérés dans ce TD sont des espaces de Banach.

Exercice 1. *Échauffement*

Soit $T \in \mathcal{L}(E, F)$ un opérateur borné. Montrer que $T^* \in \mathcal{L}(F^*, E^*)$, avec de plus $\|T\|_{\mathcal{L}(E, F)} = \|T^*\|_{\mathcal{L}(F^*, E^*)}$.

★

Exercice 2. *Relations entre noyau et image*

Soit $T : D(T) \subset E \rightarrow F$ un opérateur non borné, à domaine dense.

1. Montrer que

$$\ker T \subset (\operatorname{Im} T^*)^\perp, \quad \ker T^* = (\operatorname{Im} T)^\perp, \quad \overline{\operatorname{Im} T} = (\ker T^*)^\perp, \quad \overline{\operatorname{Im} T^*} \subset (\ker T)^\perp.$$

2. On suppose de plus que T est fermé. Montrer qu'alors $\ker T = (\operatorname{Im} T^*)^\perp$.

★

Exercice 3. *Une caractérisation de la surjectivité*

Soit $T : D(T) \subset E \rightarrow F$ un opérateur non borné, à domaine dense, et fermé.

1. On suppose qu'il existe $r > 0$ tel que $B_F(0, r) \subset \overline{T(B_E(0, 1) \cap D(T))}$. Montrer que $B_F(0, r) \subset T(B_E(0, 2) \cap D(T))$.

Indication : Pour $y \in B_F(0, r)$, on pourra construire une suite $\{x_n\}$ d'éléments de E telle que

$$\sum_{n=0}^N \|x_n\|_E < +\infty, \quad T \left(\sum_{n=0}^N x_n \right) \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} y.$$

2. En appliquant le théorème d'Hahn-Banach à $C = \overline{T(B_E(0, 1) \cap D(T))}$, en déduire que s'il existe $r > 0$ tel que

$$r \|\ell\|_{F^*} \leq \|T^* \ell\|_{E^*}, \quad \forall \ell \in D(T^*), \quad (\star)$$

alors T est surjectif.

3. Montrer la réciproque : si T est surjectif, alors il existe $r > 0$ tel que (\star) est satisfaite.

★

Exercice 4. *Images fermées*

Soit $T : D(T) \subset E \rightarrow F$ un opérateur non borné, à domaine dense, et fermé. Le but de cet exercice est de montrer l'équivalence des énoncés suivants :

- (i) $\text{Im } T$ est fermé,
- (ii) $\text{Im } T^*$ est fermé,
- (iii) $\text{Im } T = (\ker T^*)^\perp$,
- (iv) $\text{Im } T^* = (\ker T)^\perp$.

1. À l'aide de l'exercice 2, montrer que (i) \Leftrightarrow (iii) et que (iv) \Rightarrow (ii).
2. En appliquant le théorème de l'application ouverte à

$$\Gamma : \begin{cases} \text{Gr } T \longrightarrow \text{Im } T \\ (x, Tx) \longmapsto Tx, \end{cases}$$

montrer que (i) \Rightarrow (iv).

3. On suppose (ii), et l'on note $Z := \overline{\text{Im } T}$. On définit $S := D(T) \subset E \rightarrow Z, x \mapsto Tx$.
 - (a) Montrer que $\ker S^* = \{0\}$ et que $\text{Im } S^*$ est fermée.
 - (b) En appliquant le théorème de l'application ouverte à l'application $\Gamma : \text{Gr } S^* \rightarrow \text{Im } S^*$, et grâce au résultat de l'exercice 3, montrer que S est surjective. Conclure.

★

Exercice 5. *Domaine de l'adjoint*

Soit $T : D(T) \subset \ell^1 \rightarrow \ell^1$ l'opérateur non borné défini par

$$D(T) = \{ \{u_n\} \in \ell^1 \mid \{nu_n\} \in \ell^1 \}, \quad T : \{u_n\} \mapsto \{nu_n\}.$$

1. Montrer que $D(T)$ est dense, et que T est fermé.
2. Déterminer $D(T^*)$, T^* , et $\overline{D(T^*)}$.

★