Analyse fonctionnelle
TD n° 13

Propriétés spectrales des opérateurs

Séance du 23 mai 2018

Exercice 1. *Échauffement*

Soit H un espace de Hilbert, et $\mathcal{I}$ un idéal bilatère de $\mathcal{L}(H)$, que l'on suppose fermé en norme et non réduit à $\{0\}$. Montrer que $\mathcal{I}$ contient les opérateurs compacts.

⋆

Exercice 2. *Opérateur de Volterra*

Notons $E = L^2([0,1])$ l'espace des fonctions de carré intégrable sur $[0,1]$, et V l'opérateur tel que pour tout $f \in E$,

$$V(f)(x) = \int_0^x f(t)dt, \quad \forall x \in [0,1].$$

1. Montrer que $V : E \to E$ est continu, compact, et montrer que son spectre est réduit à 0.
2. Déterminer l'opérateur V^*.
3. Calculer $\|VV^*\|$, et en déduire que $\|V\| = \frac{2}{\pi}$.

⋆

Exercice 3. *Stabilité du spectre par perturbation compacte*

Soit X un espace de Banach, $A \in \mathcal{L}(X)$, et $\lambda \in \mathbb{C}$ un élément du spectre de A, qui n'est pas une valeur propre. Montrer que, pour tout opérateur compact $K \in K(X)$, λ est dans le spectre de $A + K$.

⋆

Exercice 4. *Calculs de spectre*

1. Considérons l'opérateur suivant :

$$T : \begin{cases} \ell^1(\mathbb{N}) \longrightarrow \ell^1(\mathbb{N}), \\ (u_0, u_1, \ldots) \longmapsto (u_1, u_2, \ldots). \end{cases}$$

Déterminer le spectre de T. Les opérateurs T et T^* ont-ils même spectre ? Mêmes valeurs propres ?

2. On note E l'espace de Banach des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ continues et bornées, muni de la norme $\|\cdot\|_{L^\infty}$. On définit sur E l'opérateur $T : E \to E$, $f \mapsto T(f)$, avec $T(f)(x) = f(x+1)$. Déterminer le spectre de T.

Indication : On pourra commencer par étudier les valeurs propres de T, puis remarquer que T est inversible.

$\star$

Exercice 5. *Rayon spectral*

1. Soit $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle sous-additive, c'est-à-dire telle que $a_{n+m} \leq a_n + a_m$ pour tous n, $m \in \mathbb{N}$. Montrer que la suite $\{\frac{a_n}{n}\}$ converge.

2. Soit X un espace de Banach (sur $\mathbb{C}$), et $T \in \mathcal{L}(X)$ un opérateur continu. Montrer que la suite $\{\|T^n\|^{1/n}\}$ converge. On appelle *rayon spectral* sa limite, et on la note $r(T)$.

3. Montrer que si X est un Hilbert, et si T est hermitien, alors $r(T) = \|T\|$.

4. On revient au cas général. Supposons qu'il existe $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ tel que la série

$$z\left(I + \sum_{k=1}^{\infty} z^k T^k\right) =: R_z(T)$$

converge absolument. Montrer qu'alors $\frac{1}{z}$ n'est pas dans le spectre de T. En déduire que $r(T) = \max_{\lambda\in \mathrm{Sp}(T)} |\lambda|$.

$\star$

Exercice 6. *Le calcul fonctionnel définit une application isométrique*

Soit H un espace de Hilbert séparable, et A un opérateur autoadjoint.

1. Montrer que pour tout polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$, le spectre de $P(A)$ est l'ensemble des images par P des éléments du spectre de A.

2. En déduire que $\|P(A)\|_{\mathcal{L}(H)} = \|P\|_{L^\infty(\mathrm{Sp}(A))}$, puis que l'application $P \mapsto P(A)$ se prolonge en une application isométrique $U : \mathcal{C}^0(\mathrm{Sp}(A)) \to \mathcal{L}(H)$, $f \mapsto f(A)$.

$\star$

Exercice 7. *Matrice de Hilbert*

On considère l'application linéaire

$$T : \ell^2(\mathbb{N}^*) \longrightarrow \mathbb{C}^{\mathbb{N}^*},\ \{u_n\}_{n\geq 1} \longmapsto \left\{\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{u_p}{n+p}\right\}_{n\geq 1}.$$

1. Montrer que T est bien défini.

2. On va montrer que T est à valeurs dans $\ell^2(\mathbb{N}^*)$.

(a) Soit φ la fonction 2π-périodique, continue par morceaux, définie par $\varphi(t) = i(\pi - t)$, pour $t \in [0, 2\pi[$. Calculer ses coefficients de Fourier.

(b) Soient $a = \{a_k\}_{k\geq 1} \in \ell^2(\mathbb{N}^*)$. On fixe aussi deux entiers K, $J \geq 1$, et on se donne des nombres complexes $b_1, \dots, b_J$. Prouver que

$$\left| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(t) \left(\sum_{k=1}^{K} a_k e^{-ikt}\right) \left(\sum_{j=1}^{J} \overline{b_j} e^{-ikt}\right) dt \right| \leq \|\varphi\|_{L^\infty} \|a\|_{\ell^2} \left(\sum_{j=1}^{J} |b_j|^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

(c) En déduire que

$$\sum_{j=1}^{J} \left| \sum_{k=1}^{K} \frac{a_k}{k+j} \right|^2 \leq \pi^2 \|a\|_{\ell^2}^2,$$

et conclure.

3. Montrer que T n'est pas compact. Que dire du spectre de T ?

$\star$