Analyse fonctionnelle
TD n° 3

Topologies faible et faible-$*$ (1)

Séance du 26 février 2018

Exercice 1. *Échauffement : trois exemples fondamentaux*

Soit $\phi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ à support compact.

1. (Évanescence) Montrer que $u_n(x) := \phi(x-n) \rightharpoonup 0$ dans $L^2(\mathbb{R})$, mais que cette convergence n'est pas forte.

2. (Concentration) Montrer que $v_n(x) := \sqrt{n}\phi(nx) \rightharpoonup 0$ dans $L^2(\mathbb{R})$, mais que cette convergence n'est pas forte.

Soit $w \in L^2(0,2\pi)$ une fonction 2π-périodique non constante.

3. (Oscillations) Montrer que $w_n(x) := w(nx) \rightharpoonup \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} w$ dans $L^2(0,2\pi)$, mais que cette convergence n'est pas forte.

$\star$

Exercice 2. *Adhérence de la sphère unité pour la topologie faible*

Soit E un espace vectoriel normé de dimension infinie. On va montrer que l'adhérence faible de la sphère unité $S := \{x \in E, \|x\| = 1\}$ est la boule $B := \{x \in E, \|x\| \leq 1\}$.

1. Soit $x_0 \in E$ tel que $\|x_0\| < 1$. Montrer que tout voisinage pour la topologie faible de E contient une droite, et en déduire que tout voisinage faible contenant x_0 intersecte S.

2. En utilisant le théorème de Hahn-Banach, montrer que B est fermé pour la topologie faible. Conclure.

$\star$

Exercice 3. *La topologie faible n'est pas métrisable*

Soit E un espace vectoriel normé de dimension infinie.

1. Montrer que tout voisinage faible dans E contient une droite.

2. On suppose que E est métrisable pour la topologie faible. Montrer qu'il existe une suite $\{x_n\} \in E^{\mathbb{N}}$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\|x_n\| = n$, et $x_n \rightharpoonup 0$. Conclure grâce au théorème de Baire appliqué dans E^*.

On va maintenant démontrer le même résultat d'une autre manière.

3. (Lemme des noyaux) Soient $\varphi_1, \dots, \varphi_n$, ψ, des formes linéaires sur E telles que

$$\bigcap_{k=1}^{n} \ker \varphi_k \subseteq \ker \psi.$$

Démontrer que ψ s'écrit comme une combinaison linéaire des φ_k.

4. On suppose que la topologie faible est métrisable. Montrer qu'il existe alors une famille dénombrable $F \subset E^*$, telle que toute forme linéaire continue sur E s'écrive comme une combinaison linéaire (finie) d'éléments de F. En déduire une contradiction.

$\star$

Exercice 4. *Sur $L^1([0,1])$*

1. Montrer que la boule unité de $L^1([0,1])$ n'admet pas de point extrémal.

2. En déduire qu'il n'existe aucune isométrie entre $L^1([0,1])$ et le dual topologique d'un espace vectoriel normé.

⋆

Exercice 5. *Autour du lemme de Goldstine*

Soit X un espace de Banach. Pour tout $x \in X$, on dispose de l'évaluation $\varphi_x : X^* \to \mathbb{R}$, $\ell \mapsto \ell(x)$. On définit ainsi une application

$$J : \begin{cases} X \longrightarrow X^{**} \\ x \longmapsto \varphi_x. \end{cases}$$

Pour tout espace E, on note B_E la boule unité fermée de E.

1. Montrer que J induit une isométrie de X dans $J(X)$, et que $J(X)$ est fermé (fort) dans X^{**}.

2. Si E est un espace vectoriel topologique, quelles sont les formes linéaires continues sur E^* pour la topologie $\sigma(E^*, E)$?

3. En utilisant le théorème de Hahn-Banach, montrer que $J(B_X)$ est dense dans $B_{X^{**}}$ pour la topologie faible-$*$ $\sigma(X^{**}, X^*)$.

⋆

Exercice 6. *Propriété de Schur pour ℓ^1*

On veut démontrer le résultat suivant : dans ℓ^1, les suites convergentes sont les mêmes pour les topologies faible et forte.

1. On commence par un résultat général : soit E un espace de Banach *séparable*. Soit B sa boule unité fermée et B^* la boule unité de E^*. Soit $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dense de B. Montrer que lorsque l'on pose, pour ℓ, $\ell' \in B^*$,

$$d(\ell, \ell') := \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{2^n} |(\ell - \ell')(x_n)|,$$

on définit une distance sur B^*, dont la topologie est la topologie faible-$*$ sur B^*, $\sigma(E^*, E)$.

Soit à présent $\{u^n\} = \{(u^n_k)_{k\in\mathbb{N}}\}$ une suite de ℓ^1 convergeant faiblement vers 0.

2. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$ fixé, $\lim_{n\to\infty} u^n_k = 0$.

3. Soit B^* la boule unité fermée de ℓ^∞, munie de la topologie faible-$*$. Vérifier que cette topologie est bien engendrée par la distance

$$\tilde{d}(v, w) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{|v_j - w_j|}{2^j},$$

et que B^* est alors un espace métrique compact.

4. Soit $\varepsilon > 0$. On définit $F_n = \{v \in B^* \mid \forall m \geq n,\ |\langle v, u^m \rangle| \leq \varepsilon\}$. Montrer qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que F_n contienne un voisinage de 0. Conclure.

5. En combinant ce résultat avec celui de l'exercice précédent, expliquer pourquoi id : $(\ell^1, \sigma(\ell^1, (\ell^1)^*)) \to (\ell^1, \|\cdot\|_{\ell^1})$ est séquentiellement continue, mais pas continue.

⋆