

# Analyse fonctionnelle

## TD n° 5

### DISTRIBUTIONS

Séance du 12 mars 2018

#### Exercice 1. *Échauffement*

On pose  $f(x) = |\sin(x)|$ ,  $x \in \mathbb{R}$ . Calculer  $f''$  au sens des distributions.

★

#### Exercice 2. *Quelques exemples de distributions*

1. Montrer que  $u : \phi \mapsto \sum_{j=1}^{\infty} \phi^{(j)}(j)$  est une distribution sur  $\mathbb{R}$  d'ordre infini.
2. Montrer que la fonction  $f(x) = e^{\frac{1}{x^2}}$  appartient à  $\mathcal{D}'(\mathbb{R}_+^*)$ , mais ne se prolonge pas à  $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ .

★

#### Exercice 3. *Distributions régulières*

1. Soient  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ ,  $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$  et  $1 < p < \infty$ . On suppose que

$$\sup_{\phi \in \mathcal{D}(\Omega) \setminus \{0\}} \frac{|\langle T, \phi \rangle|}{\|\phi\|_{L^p}} < \infty.$$

Montrer que  $T$  s'identifie à une fonction de  $L^q(\Omega)$ , avec  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ .

2. Soit  $T \in \mathcal{D}'(]0, 1[)$ , tel que  $T'$  s'identifie à une fonction de  $L^2(]0, 1[)$ . Montrer que  $T$  s'identifie à une fonction  $u \in L^2(]0, 1[)$ , et en déduire que  $u \in C^0([0, 1])$ .

3.  $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$  telle que  $T'$  s'identifie à une fonction  $f$  continue. Montrer que  $T$  s'identifie à une fonction  $g \in C^1(\mathbb{R})$  et que  $g' = f$ .

4. Soient  $a \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ ,  $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$  et  $f \in C^0(\mathbb{R})$ , tels que l'on ait, au sens des distributions,

$$u' + au = f.$$

Montrer que  $u \in C^1(\mathbb{R})$  et donc que l'équation précédente est satisfaite au sens classique.

★

#### Exercice 4. *Distributions dont le support est un point*

Soit  $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$  tel que  $\text{supp } u = \{0\}$ . Soit  $\psi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$  positive, telle que  $\psi = \mathbb{1}$  sur un voisinage de  $\overline{B(0, 1)}$  et  $\text{supp } \psi \in B(0, 2)$ . On pose  $\psi_r(x) := \psi(x/r)$  pour  $r > 0$  et  $x \in \mathbb{R}^n$ .

1. Rappeler pourquoi  $u$  est d'ordre fini, que l'on notera  $m \in \mathbb{N}$ .
2. Montrer que  $\forall r > 0$ ,  $\psi_r u = u$ .
3. Soit  $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ , telle que pour tout multi-indice  $\alpha \in \mathbb{N}^n$  tel que  $|\alpha| \leq m$ , on ait  $(D^\alpha \varphi)(0) = 0$ . Montrer que  $\|\psi_r \varphi\|_{\mathcal{C}^m} \rightarrow 0$  quand  $r \rightarrow 0$ .

*Indication* : On pourra montrer que pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe un voisinage  $K$  de 0, tel que pour tout  $x \in K$ , et tout multi-indice  $\beta$  tel que  $|\beta| \leq m$ ,  $|(D^\beta \varphi)(x)| \leq \varepsilon(n|x|)^{m-|\beta|}$ .

4. En déduire que  $\langle u, \varphi \rangle = 0$ .

5. Montrer qu'il existe des nombres complexes  $a_\beta$  tels que  $u = \sum_{|\beta| \leq m} a_\beta \delta_0^{(\beta)}$ .

★

**Exercice 5.** *Valeur principale de  $1/x$*

On définit la valeur principale de  $1/x$ , notée  $\text{vp}(\frac{1}{x})$ , de la manière suivante :

$$\forall \phi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}), \quad \langle \text{vp}(\frac{1}{x}), \phi \rangle = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left( \int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{\phi(x)}{x} dx + \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{\phi(x)}{x} dx \right).$$

1. Grâce à un développement de Taylor, montrer que la limite existe, et que la formule définit bien une distribution. Quel est son ordre ?

2. Montrer que  $x \cdot \text{vp}(\frac{1}{x}) = \mathbb{1}$ .

3. Soit  $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$  telle que  $xu = \mathbb{1}$ . Montrer qu'il existe  $c \in \mathbb{R}$  tel que  $u = \text{vp}(\frac{1}{x}) + c\delta_0$ .

4. Montrer que  $|x|^{\alpha-2}x \rightarrow \text{vp}(\frac{1}{x})$  dans  $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$  quand  $\alpha \searrow 0$ .

★

**Exercice 6.** *Support et ordre*

Soit  $u$  l'application linéaire définie, pour  $\phi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ , par :

$$u(\phi) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sum_{i=1}^n \phi\left(\frac{1}{i}\right) - n\phi(0) - \log(n)\phi'(0) \right).$$

1. Montrer que  $u(\phi)$  est bien définie, et que  $u$  est une distribution d'ordre au plus 2.

2. Quel est le support  $S$  de  $u$  ?

3. On considère une suite d'éléments  $\phi_k$  de  $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$  satisfaisant (i)  $\text{supp}(\phi_k) \subseteq ]\frac{1}{k+1}, 2[$ , (ii)  $0 \leq \phi_k \leq 1$ , (iii)  $\phi_k|_{[\frac{1}{k}, 1]} = 1$ . Soit  $p \in \mathbb{N}$ . À l'aide des  $\phi_k$ , montrer qu'on ne peut obtenir aucune majoration du type

$$|u(\phi)| \leq C \sum_{i=0}^p \sup_{x \in S} |\phi^{(i)}(x)|.$$

4. Quel est l'ordre de  $u$  ?

*Indication* : On pourra considérer des fonctions du type  $\psi_k(x) := \psi(x) \int_0^x (\int_0^y \phi(kt) dt) dy$ , où  $\phi \in \mathcal{C}_c^\infty(]0, 1[)$  d'intégrale 1, et  $\psi \in \mathcal{C}_c^\infty(]-1, 2[)$  est telle que  $\psi(x) = 1$  pour  $x \in [0, 1]$ .

★