Analyse fonctionnelle
TD n$^{\text{o}}$ 9

Transformée de Fourier

Séance du 9 avril 2018

Exercice 1. *Échauffement*

1. Soit $A \subset \mathbb{R}^d$ un Borélien de mesure finie non nulle. Montrer que $\widehat{\mathbb{1}_A}$ appartient à $L^2(\mathbb{R}^d)$, mais pas à $L^1(\mathbb{R}^d)$.

2. Existe-t-il deux fonctions f, $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ telles que $f * g = 0$? Que se passe-t-il si on demande de plus que f et g soient à support compact ?

3. Montrer que si $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ vérifie $-\Delta u = 0$, alors u est un polynôme.

⋆

Exercice 2. *Translations*

Soit $f \in L^2(\mathbb{R})$. On note V le sous-espace vectoriel de $L^2(\mathbb{R})$ engendré par les translatées de f, *i.e.* les fonctions $x \mapsto f(x+a)$, où $a \in \mathbb{R}$.

1. Montrer que $g \in V^\perp$ si et seulement si $\hat{g}\overline{\hat{f}} \equiv 0$.

2. Montrer que V est dense dans $L^2(\mathbb{R})$ si et seulement si l'ensemble des zéros de $\hat{f}$ est de mesure nulle.

⋆

Exercice 3. *Transformée de Fourier de la valeur principale de* $1/x$

On rappelle que la valeur principale de $1/x$, notée $\mathrm{vp}(\frac{1}{x})$, est la distribution d'ordre 1 donnée par

$$\forall \phi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}), \quad \left\langle \mathrm{vp}(\tfrac{1}{x}), \phi \right\rangle = \lim_{\varepsilon \to 0} \left(\int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{\phi(x)}{x} dx + \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{\phi(x)}{x} dx \right).$$

1. Pourquoi la transformée de Fourier de $\mathrm{vp}(\frac{1}{x})$ est-elle bien définie ?

2. Montrer que $\mathcal{F}(\mathrm{vp}(\frac{1}{x}))$ est impaire au sens des distributions, c'est-à-dire que, en notant $\check{\varphi}(x) = \varphi(-x)$, on a $\langle \mathcal{F}(\mathrm{vp}(\frac{1}{x})), \check{\varphi} \rangle = -\langle \mathcal{F}(\mathrm{vp}(\frac{1}{x})), \varphi \rangle$. En déduire $\mathcal{F}(\mathrm{vp}(\frac{1}{x}))$.

⋆

Exercice 4. *Théorème de Bochner*

Définition 1. *On dit que $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ est semi-définie positive si pour tous $\xi_1, \ldots, \xi_n \in \mathbb{R}^d$ et tous $z_1, \ldots, z_n \in \mathbb{C}$, on a*

$$\sum_{j,k=1}^{n} f(\xi_j - \xi_k) z_j \bar{z_k} \geq 0,$$

et de plus, $f(-\xi) = \overline{f(\xi)}$ pour tout $\xi \in \mathbb{R}^d$.

1. Soit μ une mesure finie positive sur $\mathbb{R}^d$. Montrer que $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ définie par

$$f(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{ix\cdot\xi}\mu(dx), \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^d$$

est semi-défine positive, continue, et satisfait $f(0) = \mu(\mathbb{R}^d)$.

2. On va montrer la réciproque (le théorème de Bochner) : toute fonction semi-définie positive, continue, et telle que $f(0) = 1$, est la transformée de Fourier d'une mesure finie positive. Soit donc f une telle fonction. Montrer que pour tout $y \in \mathbb{R}^d$, on a $|f(y)| \leq 1$.

3. On considère la forme linéaire définie par

$$\ell(\phi) = \int_{\mathbb{R}^d} \hat{\phi}(\xi) f(\xi) d\xi,$$

pour tout ϕ dont la transformée de Fourier est dans L^1. Montrer que pour tout $\psi \in \mathcal{S}$ strictement positive, $\ell(\psi) > 0$.

Indication : On pourra écrire $\psi = \theta^2$, avec $\theta \in \mathcal{S}$.

4. On introduit la fonction $K_\lambda(x_1, \ldots, x_d) = \prod_{j=1}^d \frac{1}{(1+\lambda x_j^4)}$, et on fixe $\phi \in \mathcal{S}$ et $\varepsilon > 0$. Montrer que pour λ assez petit,

$$\phi(x) \leq (\varepsilon + \|\phi\|_{L^\infty}) K_\lambda(x).$$

5. En déduire que

$$\ell(\phi) \leq (\varepsilon + \|\phi\|_{L^\infty}) \int_{\mathbb{R}^d} \hat{K}_\lambda(\xi) f(\xi) d\xi.$$

6. En faisant tendre λ vers 0, montrer que $|\ell(\phi)| \leq \varepsilon + \|\phi\|_{L^\infty}$, et conclure.

$\star$

Exercice 5. *Théorème de Paley-Wiener*

1. Expliquer pourquoi la transformée de Fourier d'une distribution $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R})$ est analytique.

Le but de cet exercice est de caractériser l'ensemble des fonctions analytiques qui sont la transformée de Fourier d'une distribution à support compact.

2. Soit $f \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$. On pose $F(\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi} f(x) dx$. On suppose que f est à support dans $B(0, R)$. Montrer que pour tout $N \in \mathbb{N}$, il existe une constante $C_N > 0$ telle que

$$|F(\xi)| \leq C_N (1 + |\xi|)^{-N} e^{R|\operatorname{Im}(\xi)|}, \quad \forall \xi \in \mathbb{C}. \tag{$\star$}$$

3. On va montrer la réciproque. Soit F une fonction analytique sur $\mathbb{C}$ vérifiant la propriété ($\star$) pour tout $N \in \mathbb{N}$, et pour un certain $R > 0$. On pose $f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{ix\xi} F(\xi) d\xi$. Montrer qu'on définit bien ainsi une fonction $\mathcal{C}^\infty$.

4. En intégrant sur un contour dans le plan complexe, montrer que pour tout $\eta \in \mathbb{R}$, on a $|f(x)| \leq C e^{R|\eta| - x\eta}$.

5. En déduire que f est à support compact.

6. Montrer qu'une fonction F analytique sur $\mathbb{C}$ est la transformée de Fourier d'une distribution T à support compact si et seulement si $\exists R > 0$, $K \in \mathbb{N}$, $C > 0$ tels que

$$|F(\xi)| \leq C (1 + |\xi|)^K e^{R|\operatorname{Im}(\xi)|}.$$

Indication : On pourra régulariser T et utiliser la question précédente.

$\star$