Analyse fonctionnelle
TD n° 3

Théorème de Hahn-Banach géométrique - Topologies faibles

Séance du 24 février 2020

Exercice 1. *Échauffement : théorème de Hahn-Banach (forme géométrique)*

1. Montrer que dans un espace vectoriel topologique localement convexe séparé E, tout sous-espace F fermé strict est inclus dans un hyperplan fermé.

2. Soit
$$B := \{x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \forall i \in [\![1, n]\!], |x_i| \leq 1\},$$
et
$$A := \{\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \in \mathbb{R}^n \mid \forall i \in [\![1, n]\!], |\varepsilon_i| = 1\}.$$
Montrer que $B = \mathrm{co}(A)$.

⋆

Exercice 2. *Application du critère dual de densité*

1. Soit $p \in [1, +\infty[$. Soit $(\alpha_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite d'élements de $]-1, 1[$ deux à deux distincts, et tendant vers 0. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $u^k(n) = (\alpha_k)^n$. Montrer que les suites u^k, pour $k \in \mathbb{N}$, engendrent un sous-espace V dense dans $\ell^p(\mathbb{N})$.

2. Pour $a > 1$, on note $f_a : x \in [0, 1] \mapsto \frac{1}{x-a}$ dans $\mathcal{C}^0([0, 1])$. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels vérifiant $a_n > 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et $a_n \to +\infty$. Montrer que $W := \mathrm{Vect}\{f_{a_n} \mid n \in \mathbb{N}\}$ est dense dans $(\mathcal{C}^0([0, 1]), \|\cdot\|_\infty)$.

⋆

Exercice 3. *Théorème de Hahn-Banach en dimension finie*

1. Soit $d \geq 1$, C un convexe quelconque de $\mathbb{R}^d$, et $x \in \mathbb{R}^d \setminus C$. Montrer qu'il existe un hyperplan affine fermé séparant x et C au sens large.

Indication : On pourra distinguer le cas $x \notin \overline{C}$ et $x \in \overline{C} \setminus C$. Dans le deuxième cas, on essayera d'approcher x par une suite $(x_n)_n$ d'éléments de $\mathbb{R}^d \setminus \overline{C}$.

2. Trouver un contre-exemple en dimension infinie.

⋆

Exercice 4. *Adhérence de la sphère unité pour la topologie faible*

Soit E un espace vectoriel normé de dimension infinie. On va montrer que l'adhérence faible de la sphère unité $S := \{x \in E, \|x\| = 1\}$ est la boule $B := \{x \in E, \|x\| \leq 1\}$.

1. Montrer que la topologie faible $\sigma(E, E^*)$ est séparée.

2. Montrer que tout voisinage pour la topologie faible de E contient une droite.

3. Soit $x_0 \in E$ tel que $\|x_0\| < 1$. Montrer que tout voisinage faible contenant x_0 intersecte S.

4. En utilisant le théorème de Hahn-Banach, montrer que B est fermée pour la topologie faible. Conclure.

⋆

Exercice 5. *Topologie faible : trois exemples fondamentaux*

1. (Évanescence) Soit $\phi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$. Montrer que $u_n(x) := \phi(x-n) \rightharpoonup 0$ dans $L^2(\mathbb{R})$, mais que cette convergence n'est pas forte.

2. (Concentration) Soit $\phi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$. Montrer que $v_n(x) := \sqrt{n} \cdot \phi(nx) \rightharpoonup 0$ dans $L^2(\mathbb{R})$, mais que cette convergence n'est pas forte.

3. (Oscillations) Soit $w \in L^2([0,2\pi])$ une fonction 2π-périodique non constante. Montrer que $w_n(x) := w(nx) \rightharpoonup \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} w$ dans $L^2([0,2\pi])$, mais que cette convergence n'est pas forte.

$\star$

Exercice 6. *Autour des théorèmes de Krein-Milman et de Banach-Alaoglu*

1. On veut montrer qu'il n'existe aucune isométrie (linéaire) entre $L^1([0,1])$ et le dual topologique d'un espace vectoriel normé.

a) Montrer que la boule unité de $L^1([0,1])$ n'admet pas de point extrémal.

b) Conclure.

2. Montrer que l'espace $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}^d)$ des fonctions continues sur $\mathbb{R}^d$ tendant vers 0 à l'infini n'est pas isométrique au dual topologique d'un espace vectoriel normé.

3. On veut montrer qu'il n'existe aucune isométrie entre $\mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ et le dual topologique d'un espace vectoriel normé.

a) Quels sont les points extrémaux de la boule unité de $\mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$?

b) Conclure.

$\star$

Exercice 7. *Propriété de Schur pour $\ell^1(\mathbb{N})$*

On veut démontrer le résultat suivant : dans $\ell^1(\mathbb{N})$, les suites convergentes sont les mêmes pour les topologies faible et forte.

1. On commence par un résultat général : soit E un espace de Banach séparable. Soit B sa boule unité fermée et B^* la boule unité de E^*. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dense de B. Montrer que lorsque l'on pose, pour ℓ, $\ell' \in B^*$,

$$d(\ell,\ell') := \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{2^n}|(\ell-\ell')(x_n)|,$$

on définit une distance sur B^*, dont la topologie est la topologie faible $*$ sur B^*, $\sigma(E^*,E)$.

Soit à présent $(u^n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\ell^1(\mathbb{N})$ convergeant faiblement vers 0. Pour tout n, on note $u^n = (u^n_k)_{k\in\mathbb{N}}$.

2. Montrer que pour tout $k\in\mathbb{N}$ fixé, $u^n_k \to 0$ lorsque $n\to+\infty$.

3. Soit B^* la boule unité fermée de $\ell^\infty(\mathbb{N})$, munie de la topologie faible $*$. Vérifier que cette topologie est bien engendrée par la distance

$$\tilde{d}(v,w) = \sum_{j\in\mathbb{N}} \frac{|v_j - w_j|}{2^j},$$

et que B^* est alors un espace métrique compact.

4. Soit $\varepsilon > 0$. On définit $F_n = \{v \in B^* \mid \forall m \geq n,\ \ |\langle v, u^m\rangle| \leq \varepsilon\}$. Montrer qu'il existe $n\in\mathbb{N}$ tel que F_n contienne un voisinage de 0. Conclure.

5. En combinant ce résultat avec celui de l'exercice 4 (*Adhérence de la boule unité pour la topologie faible*), expliquer pourquoi l'application id : $(\ell^1(\mathbb{N}), \sigma(\ell^1(\mathbb{N}), \ell^1(\mathbb{N})^*)) \to (\ell^1(\mathbb{N}), \|\cdot\|_{\ell^1})$ est séquentiellement continue, mais pas continue.

$\star$