Analyse fonctionnelle
TD n° 5

Topologies faibles

Séance du 9 mars 2020

Exercice 1. *La topologie faible n'est pas métrisable (TD4)*

Soit E un espace vectoriel normé de dimension infinie.

1. On suppose que E est métrisable pour la topologie faible. En rappelant pourquoi tout voisinage faible dans E contient une droite, montrer qu'il existe une suite $(x_n)_n \in E^{\mathbb{N}}$ telle que $\|x_n\| = n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et telle que $x_n \rightharpoonup 0$.

2. Conclure à une contradiction grâce au théorème de Banach-Steinhaus.

On va maintenant démontrer le même résultat d'une autre manière.

3. (Lemme des noyaux) Soient $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$, ψ, des formes linéaires sur E telles que

$$\bigcap_{k=1}^{n} \ker \varphi_k \subseteq \ker \psi.$$

Démontrer que ψ s'écrit comme une combinaison linéaire des φ_k.

4. On suppose que la topologie faible est métrisable. Montrer qu'il existe alors une famille dénombrable $F \subset E^*$, telle que toute forme linéaire continue sur E s'écrive comme une combinaison linéaire (finie) d'éléments de F. En déduire une contradiction.

⋆

Exercice 2. *Échauffement : quelques exemples de distributions*

1. Montrer que $u : \varphi \mapsto \sum_{j=1}^{\infty} \varphi^{(j)}(j)$ est une distribution sur $\mathbb{R}$ d'ordre infini.

2. Montrer que la fonction $f(x) = e^{\frac{1}{x^2}}$ appartient à $\mathcal{D}'(\mathbb{R}_+^*)$, mais ne se prolonge pas à $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

⋆

Exercice 3. *Autour du lemme de Goldstine*

Soit X un espace de Banach. Pour tout $x \in X$, on dispose de l'évaluation $\varphi_x : \ell \in X^* \mapsto \ell(x) \in \mathbb{R}$. On définit ainsi une application

$$J : \begin{cases} X \longrightarrow X^{**} \\ x \longmapsto \varphi_x. \end{cases}$$

Pour un espace vectoriel normé E, on note B_E sa boule unité fermée.

1. Montrer que J induit une isométrie de X dans $J(X)$, et que $J(X)$ est fermé (fortement) dans X^{**}.

2. Si E est un espace vectoriel topologique, quelles sont les formes linéaires continues sur E^* muni de la topologie faible $*$ $\sigma(E^*, E)$?

3. En utilisant le théorème de Hahn-Banach, montrer que $J(B_X)$ est dense dans $B_{X^{**}}$ pour la topologie faible $*$ $\sigma(X^{**}, X^*)$.

$\star$

Exercice 4. *Théorème de Krein-Šmulian*

Soit X un espace de Banach. On rappelle que pour tout $x \in X$, on dispose de l'évaluation $\varphi_x : X^* \to \mathbb{R}$, $\ell \mapsto \ell(x)$. On définit ainsi une application $J : X \to X^{**}, x \mapsto \varphi_x$. Semblablement, si $\ell \in X^*$, on définit l'application $\tilde{\varphi}_\ell : X^{**} \to \mathbb{R}$, et l'application $\tilde{J} : X^* \to X^{***}$, $\ell \mapsto \tilde{\varphi}_\ell$. Enfin, pour tout espace vectoriel normé E, on note B_E la boule unité fermée de E.

Partie I : Sur la continuité faible $*$ séquentielle

Dans cette partie, on suppose que X est séparable, et l'on note $\{x_n\}$ une suite dense dans X. On fixe $\psi \in X^{**} \setminus J(X)$.

1. Montrer qu'il existe $a \in X^{***}$ de norme ≤ 1, avec $a(\psi) =: c > 0$, et tel que $a \equiv 0$ sur $J(X)$.

2. En considérant les voisinages de a définis par

$$\begin{aligned} U_n &:= \{b \in B_{X^{***}} \mid |(a-b)(\varphi_{x_n})| < 1\}, \quad n \in \mathbb{N}, \\ V &:= \left\{b \in B_{X^{***}} \;\middle|\; |(a-b)(\psi)| < \tfrac{c}{2}\right\}, \end{aligned}$$

construire une suite $\{\ell_n\}$ d'éléments de X^* telle que $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{cases} \|\ell_n\|_{X^*} \leq 1, \\ |\ell_n(x_j)| < 1, \quad \forall 0 \leq j \leq n, \\ |\psi(\ell_n)| \geq \frac{c}{2}. \end{cases}$$

3. En déduire que $\ell_n \overset{*}{\rightharpoonup} 0$ (au sens de la topologie faible $*$ $\sigma(X^*, X)$).

4. Soit $\psi \in X^{**}$. Montrer qu'il existe $x \in X$ tel que $\psi = \varphi_x = J(x)$ si et seulement si, pour toute suite $\{\ell_n\}$ d'éléments de X^* vérifiant que $\ell_n \overset{*}{\rightharpoonup} \ell$, on a $\psi(\ell_n) \to \psi(\ell)$.

Partie II : Théorème de Krein-Šmulian

Soit K un compact faible de X. On note $\overline{\mathrm{co}}(K)$ l'enveloppe convexe fermée de K. On veut montrer le théorème suivant : $\overline{\mathrm{co}}(K)$ *est un compact faible de* X.

On suppose dans un premier temps que X est séparable. On note $C_w(K)$ l'ensemble des fonctions continues sur K muni de la topologie faible. On munit cet espace de la norme $\|\cdot\|_\infty$.

5. Montrer que l'on dispose d'une application d'inclusion naturelle $T : X^* \to C_w(K)$, qui est linéaire et continue.

6. Montrer que l'adjoint de T, noté $T^* : C_w(K)^* \to X^{**}$, et défini par

$$\langle T^* L, \ell \rangle = \langle L, T\ell \rangle, \quad L \in C_w(K)^*, \ell \in X^*,$$

est à valeurs dans $J(X)$. On admettra que par le théorème de représentation de Riesz, $C_w(K)^*$ s'identifie à l'ensemble des mesures finies (signées) sur K.

7. Soit B la boule unité de $C_w(K)^*$. Montrer que $J^{-1}T^*(B)$ est un compact faible convexe qui contient K. Conclure.

$\star$

Exercice 5. *Uniforme intégrabilité - Théorème de Dunford-Pettis*

Soient Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^d$ et $\mathcal{F}$ une partie bornée de $L^1(\Omega)$. On note λ la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^d$.

Définition 1. *On dit que $\mathcal{F}$ est uniformément intégrable si $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tel que pour tout borélien A satisfaisant $\lambda(A) \leq \delta$, on ait $\int_A |f| \, d\lambda \leq \varepsilon$ pour tout $f \in \mathcal{F}$.*

1. Montrer que $\mathcal{F}$ est uniformément intégrable si et seulement si

$$\sup_{f \in \mathcal{F}} \int_{\{|f| \geq M\}} |f| \underset{M \to +\infty}{\longrightarrow} 0.$$

2. Montrer que $\mathcal{F}$ est uniformément intégrable si et seulement s'il existe une fonction $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ croissante telle que $g(t)/t \to +\infty$ et $\sup_{f \in \mathcal{F}} \int_\Omega g(|f(x)|)dx < +\infty$.

3. Donner un exemple de suite bornée de $L^1(]-1, 1[)$ dont aucune sous-suite ne converge faiblement.

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$. Le but de cet exercice est de montrer le théorème suivant :

Théorème (Dunford-Pettis)**.** *Soit $\{f_n\}$ une suite bornée de $L^1(\Omega)$. Il existe une sous-suite $\{f_{n_k}\}$ qui converge pour la topologie faible $\sigma(L^1, L^\infty)$ si et seulement si la famille $\mathcal{F} = \{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ est uniformément intégrable.*

On considére dans un premier temps une suite de fonctions $f_n \in L^1(\Omega)$ bornée et uniformément intégrable.

4. Montrer qu'on peut supposer que $f_n \geq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

5. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on pose $f_n^k = f_n \mathbb{1}_{\{f_n \leq k\}}$. Montrer que $\sup_n \|f_n - f_n^k\|_{L^1} \to 0$ quand $k \to \infty$.

6. En utilisant le théorème de Banach-Alaoglu, montrer qu'il existe une extraction ψ telle que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\{f_{\psi(n)}^k\}_n$ converge faiblement, pour $\sigma(L^1, L^\infty)$, vers une limite qu'on notera f^k.

7. Montrer que f^k converge fortement dans L^1. On note f sa limite.

Indication : On pourra utiliser le théorème de Beppo-Levi.

8. Montrer que $\{f_{\psi(n)}\}$ converge faiblement vers f pour $\sigma(L^1, L^\infty)$.

On montre maintenant la réciproque. Soit f_n une suite de $L^1(\Omega)$ convergeant faiblement vers f. Fixons $\varepsilon > 0$, et notons $\mathfrak{X}$ l'ensemble des fonctions caractéristiques d'ensembles mesurables de Ω. Pour $n \in \mathbb{N}$, on introduit aussi les ensembles

$$X_n := \left\{ 1_A \in \mathfrak{X} \;\middle|\; \forall k \geq n, \; \left| \int_A (f_k(x) - f(x))dx \right| \leq \varepsilon \right\}.$$

9. Montrer que $\mathfrak{X}$ et X_n sont des fermés (forts) de L^1.

10. Utiliser le théorème de Baire, et montrer que $\mathcal{F}$ est nécessairement uniformément intégrable.

⋆