Analyse fonctionnelle
TD n° 8

Distributions - Régularité

Séance du 20 avril 2020

Exercice 1. *Échauffement : distributions et régularité*

1. Montrer que $\delta_0' \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ n'est pas une mesure.

2. Soit $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ telle que T' s'identifie à une fonction f continue. Montrer que T s'identifie à une fonction $g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ et que $g' = f$.

3. Soient $a \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ et $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$, tels que l'on ait, au sens des distributions, $u' + au = f$. Montrer que $u \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$, et que l'équation précédente est satisfaite au sens classique.

4. Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ et $1 < p < \infty$. On suppose que

$$\sup_{\varphi \in \mathcal{D}(\Omega) \setminus \{0\}} \frac{|\langle T, \varphi \rangle|}{\|\varphi\|_{L^p}} < +\infty.$$

Montrer que T s'identifie à une fonction de $L^q(\Omega)$, avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

5. Soit $T \in \mathcal{D}'(]0,1[)$ telle que T' s'identifie à une fonction $f \in L^2(]0,1[)$. Montrer que T s'identifie à une fonction $u \in L^2(]0,1[)$, et en déduire que $u \in \mathcal{C}^0([0,1])$.

⋆

Exercice 2. *Équation hyperbolique*

On se donne n fonctions $f_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$, une condition initiale $u_0 \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n)$ et on considère l'équation d'inconnue $u : [0, +\infty[\times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} f_i(u) = 0, \quad x = (x_1, \dots x_n) \in \mathbb{R}^n, \quad u(0) = u_0. \tag{$*$}$$

On dit que u est une solution classique si $u \in \mathcal{C}^1([0, +\infty[\times \mathbb{R}^n)$ et u vérifie $(*)$ ponctuellement.

1. On suppose pour l'instant que $n = 1$ et que u est une solution classique. Si $a = f_1'$, montrer que les caractéristiques $t \mapsto x(t)$ définies par :

$$\frac{\partial x}{\partial t} = a(u(t, x(t))), \quad x(0) = x_0,$$

sont des droites, et calculer leur pente. En déduire une condition nécessaire (sur a et u_0) d'existence de u pour tout $t \geq 0$.

2. Montrer que cette condition est également suffisante si a est $\mathcal{C}^1$.

3. On revient au cas général. Écrire la forme distributionnelle de $(*)$ si $u \in L^\infty_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$. Montrer que si u est une solution distributionnelle de classe $\mathcal{C}^1$, alors c'est une solution au sens classique.

4. *Condition de Rankine-Hugoniot.* On suppose que u est une solution distributionnelle de $(*)$ de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux, c'est-à-dire que u est continue et qu'il existe des ouverts disjoints $\Omega_1, \dots, \Omega_k$ (que l'on suppose de plus de classe $\mathcal{C}^1$ ici) tels que $\bigcup_{i=1}^k \overline{\Omega_i} = [0, +\infty[\times \mathbb{R}^n$ et que la restriction de u à chaque $\overline{\Omega_i}$ soit de classe $\mathcal{C}^1$. Montrer que u est une solution classique à l'intérieur des Ω_i, et que u

satisfait la condition de saut le long des surfaces de discontinuités : si $n = (n_t, n_{x_1}, \dots, n_{x_n})$ est une normale (unitaire) à la surface, et u_+, u_- sont les limites de u d'un côté et de l'autre de la surface, alors

$$(u_+ - u_-)n_t + \sum_{i=1}^{n} (f_i(u_+) - f_i(u_-))n_{x_i} = 0.$$

⋆

Exercice 3. *Représentation d'une distribution*

1. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$, $K \subset \Omega$ compact et $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$. On souhaite montrer qu'il existe $f \in \mathcal{C}^0(\Omega)$ et un multi-indice α tel que :

$$\forall \varphi \in \mathcal{C}^\infty_K(\Omega),\ \langle T, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega f(x)(\partial^\alpha \varphi)(x)dx.$$

a) Sans perte de généralité, on peut supposer que K est inclus dans un cube Q de longueur a. On définit l'opérateur $L = \partial_{x_1}\partial_{x_2} \cdots \partial_{x_d}$. Montrer que pour tout $m \in \mathbb{N}$, il existe $C_m > 0$ telle que

$$\forall \varphi \in \mathcal{C}^\infty_Q(\Omega), \quad \|\varphi\|_m \leq C_m \max_{x \in Q} |(L^m \varphi)(x)| \leq C_m \int_Q |(L^{m+1}\varphi)(x)|dx.$$

b) Expliquer pourquoi pour tout $m \in \mathbb{N}$, on peut définir une forme linéaire $\tilde{T}_m$ sur $X = L^{m+1}(\mathcal{C}^\infty_K(\Omega))$ par : $\forall \varphi \in \mathcal{C}^\infty_K(\Omega), \quad \langle \tilde{T}_m, L^{m+1}\varphi \rangle := \langle T, \varphi \rangle$.
Montrer qu'il existe $m \in \mathbb{N}$ et $C > 0$ tels que

$$\forall \psi \in X, \quad |\langle \tilde{T}_m, \psi \rangle| \leq C \int_K |\psi(x)|dx.$$

c) Conclure en utilisant le théorème de Hahn-Banach analytique et la dualité $L^1(K)$ - $L^\infty(K)$.

2. *Extensions.*

a) On suppose que T est à support K compact : T est donc d'ordre fini m. Soit V un ouvert tel que $K \subset V \subset \Omega$. Montrer qu'il existe des fonctions continues f_α à support dans V, indexées par les multi-indices α tels que pour tout $i \in [\![1, d]\!]$, $\alpha_i \leq m + 2$, qui vérifient

$$T = \sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}^d \\ \forall i \in [\![1,d]\!],\ \alpha_i \leq m+2}} \partial^\alpha f_\alpha.$$

b) En déduire, grace à une partition de l'unité, que pour $T \in \mathcal{D}(\Omega)$ quelconque, il existe des fonctions continues f_α, $\alpha \in \mathbb{N}^d$, telles que

$$T = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^d} \partial^\alpha f_\alpha,$$

et que pour tout compact $K \subset \Omega$, la somme ne porte que sur un nombre fini de f_α.
Montrer de plus que si T est d'ordre fini, les f_α peuvent être choisi tous nuls sauf un nombre fini.

⋆

Exercice 4. *Hölder-continuité et distributions*

Soit $\alpha \in]0,1[$. On rappelle qu'une fonction f définie sur $\mathbb{R}^d$ est dite *α-Höldérienne*, ce que l'on note $f \in \mathcal{C}^\alpha(\mathbb{R}^d)$, s'il existe une constante $C_\alpha > 0$ telle que pour tous $x, y \in \mathbb{R}^d$,

$$|f(x) - f(y)| \leq C_\alpha \|x - y\|^\alpha$$

où $\|\cdot\|$ désigne la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^d$.

Soit $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$. On veut montrer l'équivalence entre

(i) f a un représentant dans $\mathcal{C}^\alpha(\mathbb{R}^d)$;

(ii) il existe une constante $C > 0$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, il existe $g(x) \in \mathbb{R}$ satisfaisant la propriété suivante : pour tout $r > 0$ et toute fonction test $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ à support dans $B(x,r)$ telle que $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^d} |\phi(y)| dy = 1$,

$$|\langle f - g(x), \phi \rangle| \leq C r^\alpha \,.$$

1. Montrer que (i) implique (ii).

On suppose dorénavant que (ii) est vraie. Dans la suite, on fixe une fonction $\chi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$, positive, à support dans la boule unité, et d'intégrale 1. On note, pour $x \in \mathbb{R}^d$ et $\lambda > 0$,

$$\chi_x^\lambda := \frac{1}{\lambda^d} \chi\left(\frac{\cdot - x}{\lambda}\right).$$

2. On commence par montrer que g est α-Höldérienne.

a) Majorer $|\langle f, \chi_x^\lambda - \chi_y^\lambda \rangle|$ pour $\lambda > 0$ en fonction de $\|x - y\|$ et de λ.

b) En se servant du fait que $\langle g(x), \chi_x^\lambda \rangle = g(x)$ lorsque λ est arbitrairement proche de 0, montrer que g est α-Höldérienne.

3. Soit $F \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ telle qu'il existe $\alpha > 0$ et $C > 0$ tel que pour tout $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ à support dans une boule de rayon r et telle que $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^d} |\phi(y)| dy = 1$,

$$|\langle F, \phi \rangle| \leq C r^\alpha.$$

a) Soit $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ telle que $\int_{\mathbb{R}^d} |\phi(y)| dy = 1$. On suppose ϕ à support dans $B(0,r)$. Montrer que

$$\psi^\lambda : x \in \mathbb{R}^d \longmapsto \int_{\mathbb{R}^d} \chi_x^\lambda(y) \phi(y) dy$$

converge vers ϕ dans $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ lorsque λ tend vers 0.

b) En déduire que que $F = 0$ au sens des distributions.

c) Conclure que $f = g$ au sens des distributions.

⋆