Analyse fonctionnelle
TD n° 9

Transformation de Fourier

Séance du 27 avril 2020

Exercice 1. *Échauffement*

1. Soit $A \subset \mathbb{R}^d$ un Borélien de mesure finie non nulle. Montrer que $\widehat{\mathbb{1}_A}$ appartient à $L^2(\mathbb{R}^d)$, mais pas à $L^1(\mathbb{R}^d)$.

2. Existe-t-il deux fonctions non nulles f, $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ telles que $f * g = 0$? Que se passe-t-il si on demande de plus que f et g soient à support compact ? Y a-t-il des solutions telles que $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ et $g \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)$?

3. Montrer que l'équation $f * f = f$ n'a pas de solution non nulle dans $L^1(\mathbb{R}^d)$ mais admet une infinité de solutions dans $L^2(\mathbb{R}^d)$.

4. Soit $\lambda > 0$.

a) Si $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$, résoudre dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ l'équation $\lambda u - \Delta u = f$. Montrer que si $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, alors $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ et qu'alors pour $d = 1$, la solution s'écrit $k_\lambda * f$ où k_λ est une fonction à préciser.

b) Si $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$, peut-on toujours donner une solution ?

⋆

Exercice 2. *Transformation de Fourier et translations*

Soit $f \in L^2(\mathbb{R})$. On note V le sous-espace vectoriel de $L^2(\mathbb{R})$ engendré par les translatées de f, *i.e.* les fonctions $x \mapsto f(x + a)$, où $a \in \mathbb{R}$.

1. Montrer que $g \in V^\perp$ si et seulement si $\hat{g}\overline{\hat{f}} \equiv 0$.

2. Montrer que V est dense dans $L^2(\mathbb{R})$ si et seulement si l'ensemble des zéros de $\hat{f}$ est de mesure nulle.

⋆

Exercice 3. *Transformée de Fourier de la valeur principale de* $1/x$

On rappelle que la valeur principale de $\frac{1}{x}$, notée $\mathrm{vp}(\frac{1}{x})$, est la distribution d'ordre 1 donnée par

$$\forall \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}), \quad \left\langle \mathrm{vp}(\tfrac{1}{x}), \varphi \right\rangle = \lim_{\varepsilon \to 0} \left(\int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x} dx + \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{\varphi(x)}{x} dx \right).$$

1. Pourquoi la transformée de Fourier de $\mathrm{vp}(\frac{1}{x})$ est-elle bien définie ?

2. Montrer que $\mathcal{F}(\mathrm{vp}(\frac{1}{x}))$ est impaire au sens des distributions, c'est-à-dire que, en notant $\check{\varphi}(x) = \varphi(-x)$, on a $\langle \mathcal{F}(\mathrm{vp}(\frac{1}{x})), \check{\varphi} \rangle = -\langle \mathcal{F}(\mathrm{vp}(\frac{1}{x})), \varphi \rangle$.

3. Calculer $x\mathrm{vp}(\frac{1}{x})$, et en déduire $\mathcal{F}(\mathrm{vp}(\frac{1}{x}))$.

⋆

Exercice 4. *Polynômes de Hermite*

On considère l'espace de Hilbert $H = L^2(\mathbb{R}, e^{-x^2}dx)$.

1. Montrer que les polynômes forment un sous-espace vectoriel dense de H.

Indication : On pourra montrer que si $f \in H$ est orthogonal à l'espace engendré par les polynômes, la fonction holomorphe

$$F(z) := \int_{\mathbb{R}} f(t)e^{zt-t^2}dt$$

est identiquement nulle, et vérifie $F(ix) = \mathcal{F}(fe^{-t^2})$.

On considère les polynômes de Hermite $H_n(x) = (-1)^n e^{x^2}\frac{d^n}{dx^n}(e^{-x^2})$ et les fonctions de Hermite $\psi_n(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}H_n(x)$.

2. Montrer que H_n est un polynôme de degré n et qu'il est orthogonal (pour le produit hermitien de H) à l'espace engendré par les polynômes de degré inférieur ou égal à $n-1$.

3. Montrer que $H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - 2nH_{n-1}(x)$ et que $\frac{d}{dx}H_n(x) = 2nH_{n-1}(x)$.

4. Montrer que $\left(\frac{d}{dx} + x\right)\psi_n = 2n\psi_{n-1}$ et que $\left(-\frac{d}{dx} + x\right)\psi_n = \psi_{n+1}$.

5. Montrer enfin que $\left(\frac{d^2}{dx^2} - x^2\right)\psi_n = -(2n+1)\psi_n$.

6. Montrer que $(\psi_n)_n$ est une base hilbertienne dans $L^2(\mathbb{R})$ de fonctions propres pour la transformée de Fourier.

Indication : On pourra calculer l'équation différentielle satisfaite par $\mathcal{F}(\psi_n)$.

$\star$

Exercice 5. *Théorème de Paley-Wiener*

1. Expliquer pourquoi la transformée de Fourier d'une distribution $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R})$ s'étend en une fonction analytique sur $\mathbb{C}$.

Le but de cet exercice est de caractériser l'ensemble des fonctions analytiques qui sont la transformée de Fourier d'une distribution à support compact.

2. Soit $f \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$. On pose $F(\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi}f(x)dx$. On suppose que f est à support dans $B(0,R)$. Montrer que pour tout $N \in \mathbb{N}$, il existe une constante $C_N > 0$ telle que

$$|F(\xi)| \le C_N(1+|\xi|)^{-N}e^{R|\operatorname{Im}(\xi)|}, \quad \forall \xi \in \mathbb{C}. \qquad (\star)$$

3. On va montrer la réciproque. Soit F une fonction analytique sur $\mathbb{C}$ vérifiant la propriété $(\star)$ pour tout $N \in \mathbb{N}$, et pour un certain $R > 0$. On pose $f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} e^{ix\xi}F(\xi)d\xi$. Montrer qu'on définit bien ainsi une fonction $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

4. En intégrant sur un contour dans le plan complexe, montrer que pour tout $\eta \in \mathbb{R}$, on a $|f(x)| \le Ce^{R|\eta|-x\eta}$.

5. En déduire que f est à support compact.

6. Montrer qu'une fonction F analytique sur $\mathbb{C}$ est la transformée de Fourier d'une distribution T à support compact si et seulement s'il existe $R > 0$, $K \in \mathbb{N}$ et $C > 0$ tels que pour tout $\xi \in \mathbb{C}$,

$$|F(\xi)| \le C(1+|\xi|)^K e^{R|\operatorname{Im}(\xi)|}.$$

Indication : Pour la réciproque, on pourra régulariser $T := \mathcal{F}^{-1}(F)$ et utiliser la question précédente.

$\star$