

TD N°4 : ÉQUATIONS ELLIPTIQUES ET PARABOLIQUES

**Exercice 1 ☞ : dérivée faible dans un espace de Hilbert**

Soient trois espaces de Hilbert séparables  $\mathcal{V} \hookrightarrow \mathcal{H} \hookrightarrow \mathcal{V}'$  tels que ces injections continues soient denses, et que

$$\forall f \in \mathcal{H}, \quad \forall v \in \mathcal{V}, \quad \langle f, v \rangle_{\mathcal{V}' \times \mathcal{V}} = (v|f)_{\mathcal{H}}.$$

Si  $u \in L^2([0, T]; \mathcal{V})$  et  $\partial_t u \in L^2([0, T]; \mathcal{V}')$ , alors  $u \in C^0([0, T]; \mathcal{H})$  et de plus :

1. Pour tout  $v \in \mathcal{V}$ , on a

$$\frac{d}{dt}(u(t)|v)_{\mathcal{H}} = \langle \partial_t u, v \rangle.$$

2. Il existe une constante  $C > 0$  telle que

$$\|u\|_{L^\infty([0, T]; \mathcal{H})} \leq C(\|u\|_{L^2([0, T]; \mathcal{V})} + \|\partial_t u\|_{L^2([0, T]; \mathcal{V}')}).$$

**Exercice 2 ☞ : lemme d'Aubin-Lions**

Soient  $X \subset Y \subset Z$  trois espaces de Banach avec  $X, Y$  réflexifs, tels que l'injection de  $X$  dans  $Y$  soit compacte. Soit  $1 < p < \infty$  et  $(u_n)_n$  une suite de fonctions définies sur  $[0, T]$  à valeurs dans  $X$ , uniformément bornée dans  $L^2([0, T]; X)$  et telle que  $(\partial_t u_n)_n$  soit uniformément bornée dans  $L^p([0, T]; Z)$ . On veut montrer qu'il existe une sous-suite de  $(u_n)_n$  qui converge fortement dans  $L^2([0, T]; Y)$ .

*On rappelle le théorème de Banach-Alaoglu : si  $E$  un espace vectoriel normé, la boule unité fermée de  $E^*$  est compacte pour la topologie faible  $*$ .*

1. (Lemme d'Ehrling) Montrer que pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe une constante  $C_\varepsilon$  telle que

$$\|u\|_Y \leq \varepsilon \|u\|_X + C_\varepsilon \|u\|_Z.$$

Soit  $t_0$  fixé.

2. Justifier qu'il suffit de démontrer que si  $u_n$  tend faiblement vers 0 dans  $L^2([0, T]; X)$  et  $\partial_t u_n$  tend faiblement vers 0 dans  $L^p([0, T]; Z)$ , alors pour tout  $t_0 \in [0, T]$ ,  $u_n(t_0)$  tend fortement vers 0 dans  $Z$ .

3. Montrer que

$$\frac{1}{t_1 - t_0} \int_{t_0}^{t_1} (t_1 - t') \partial_{t'} u_n(t') dt'$$

tend fortement vers 0 dans  $Z$  quand  $t_1$  tend vers  $t_0$ , puis que  $\frac{1}{t_1 - t_0} \int_{t_0}^{t_1} u_n(t') dt'$  tend faiblement vers 0 dans  $X$ . Conclure.

**Exercice 3 ☞☞☞ : inégalité de Caccioppoli généralisée**

Soit  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ . Soit  $A = (a_{ij}(x)) \in L^\infty(\Omega, \mathcal{M}_d(\mathbb{R}))$  une fonction à valeurs matricielles et  $\alpha > 0$  tels que :

$$\forall x \in \Omega, \forall \xi \in \mathbb{R}^d, \quad \alpha |\xi|^2 \leq \sum_{i,j=1}^d a_{ij}(x) \xi_i \xi_j.$$

Soient  $b \in L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^d)$  et  $c \in L^\infty(\Omega, \mathbb{R})$ . On considère l'opérateur linéaire défini par :

$$\begin{aligned} Lu &= -\operatorname{div}(A(x)\nabla u) + b(x) \cdot \nabla u + c(x)u \\ &= - \sum_{i,j=1}^d \partial_{x_i}(a_{ij}(x)\partial_{x_j} u) + \sum_{i=1}^d b_i(x)\partial_{x_i} u + c(x)u. \end{aligned}$$

Soient  $f \in L^2(\Omega)$  et  $u \in H^1(\Omega)$  telles que  $Lu = f$  au sens des distributions. Soit  $\Omega' \subset \Omega$  un ouvert borné tel que  $\overline{\Omega'} \subset \Omega$ . Montrer que :

$$\int_{\Omega'} |\nabla u|^2 dx \leq C \int_{\Omega} (u^2 + f^2) dx.$$

[Indication : on pourra utiliser comme fonction test  $\eta^2 u$  où  $\eta \in C_c^\infty(\Omega)$  et vaut 1 sur  $\Omega'$ .]

#### Exercice 4 🐞 : inégalité de Poincaré-Wirtinger et diffusion 1D

1. Soit  $u \in C^1(\mathbb{R})$  qui est  $T$ -périodique. Montrer que si  $\int_0^T u(t) dt = 0$  alors

$$\left( \int_0^T |u(t)|^2 dt \right)^{1/2} \leq \frac{T}{2\pi} \left( \int_0^T |u'(t)|^2 dt \right)^{1/2}.$$

[Indication : utiliser une décomposition en séries de Fourier.]

2. Soit  $u = u(t, x)$  une fonction de classe  $C^2$  sur  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ,  $2\pi$ -périodique en  $x$ , et solution de l'équation de diffusion

$$\partial_t u - \partial_x(\gamma(x)\partial_x u) = 0,$$

où  $\gamma$  est une fonction  $C^\infty$ ,  $2\pi$ -périodique et minorée par une constante strictement positive. Montrer que si la moyenne  $\int_{-\pi}^{\pi} u(0, x) dx$  s'annule, alors il existe une constante  $C$  telle que, pour tout temps  $t \geq 0$ ,

$$\int_{-\pi}^{\pi} u(t, x)^2 dx \leq e^{-tC} \int_{-\pi}^{\pi} u(0, x)^2 dx.$$

#### Exercice 5 🐞 🐞 : principe du maximum fort pour l'équation de la chaleur

Soient  $\Omega$  un ouvert borné de  $\mathbb{R}^n$  et  $T > 0$ . On note  $\Omega_T = (0, T] \times \Omega$ .

1. Dans cette première question, on va démontrer une formule de la moyenne pour l'équation de la chaleur. On introduit la fonction  $\Phi$  définie sur  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$  par

$$\Phi(t, x) = \begin{cases} \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}} & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{si } t \leq 0 \end{cases}$$

puis l'ensemble  $E(t, x; r)$  pour  $(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$  et  $r > 0$  défini par

$$E(t, x; r) = \left\{ (s, y) \in \mathbb{R}^{n+1}; s \leq t, \Phi(t-s, x-y) \geq 1/r^n \right\}.$$

a) On fixe  $(t, x) \in \Omega_T$  et on pose

$$\phi(r) = \frac{1}{r^n} \iint_{E(t, x; r)} u(s, y) \frac{|x-y|^2}{(t-s)^2} dy ds$$

pour  $r > 0$  assez petit pour que  $E(t, x; r) \subset \Omega_T$ . On suppose que  $u \in C^2(\Omega_T)$  est solution de l'équation de la chaleur sur  $\Omega_T$  (i.e. vérifie  $\partial_t u = \Delta u$  sur  $\Omega_T$ ). Montrer que  $\phi$  est constante.

[Indication : on pourra utiliser la fonction  $\psi$  définie par  $\psi(s, y) = -n/2 \ln(-4\pi s) + |y|^2/4s + n \ln(r)$ .]

b) En admettant que

$$\iint_{E(1)} \frac{|y|^2}{s^2} dy ds = 4,$$

montrer que si  $u \in C^2(\Omega_T)$  est solution de l'équation de la chaleur sur  $\Omega_T$ , alors

$$u(t, x) = \frac{1}{4r^n} \iint_{E(t, x; r)} u(s, y) \frac{|x-y|^2}{(t-s)^2} dy ds$$

pour tout  $E(t, x; r) \subset \Omega_T$ .

2. Montrer que si  $\Omega$  est convexe et qu'il existe un point  $(t_0, x_0) \in \Omega_T$  tel que

$$u(t_0, x_0) = \max_{\Omega_T} u$$

alors  $u$  est constante sur  $\Omega_{t_0}$ .

### Exercice 6 : une équation de diffusion semi-linéaire

Soit  $\Omega$  un domaine borné de  $\mathbb{R}^d$  de classe  $\mathcal{C}^2$  et  $T > 0$ . On considère l'équation

$$\partial_t u - \Delta u + f(u) = 0, \quad f(u) = \sum_{k=0}^{2p-1} c_k u^k, \quad c_{2p-1} > 0, \quad p \geq 1,$$

avec  $u|_{\partial\Omega} = 0$  et  $u|_{t=0} = u_0$ . On veut montrer que pour tout  $u_0 \in L^2(\Omega)$ , il existe une unique solution  $u \in \mathcal{C}([0, T]; L^2(\Omega)) \cap L^2([0, T]; H_0^1(\Omega)) \cap L^{2p}([0, T] \times \Omega)$ .

1. Désignant par  $E_N$  l'espace vectoriel de dimension finie engendré par les  $N$  premiers vecteurs propres du Laplacien dans  $H_0^1 \cap L^{2p}(\Omega)$ , montrer qu'il existe une unique solution  $u_N$  (approximation de Galerkin de  $u$ ) de

$$\partial_t u_N - \Delta u_N = P_N f(u_N)$$

dans  $\mathcal{C}([0, T]; E_N)$  et qu'il existe deux constantes  $c, C > 0$  telles que

$$\frac{1}{2} \sup_{[0, T]} \|u_N(t)\|_{L^2}^2 + \int_0^T \|\nabla u_N(t')\|_{L^2}^2 dt' + c \int_0^T \|u_N(t')\|_{L^{2p}}^{2p} dt' \leq CT + \frac{1}{2} \|u_0\|_{L^2}^2.$$

2. En déduire qu'il existe  $u \in L^\infty([0, T]; L^2(\Omega)) \cap L^2([0, T]; H_0^1(\Omega)) \cap L^{2p}([0, T] \times \Omega)$  limite faible de  $u_N$  et que  $\partial_t u \in L^2([0, T]; H^{-1}(\Omega)) + L^q([0, T] \times \Omega)$  où  $q$  est l'exposant de Hölder conjugué de  $2p$ .

3. Utiliser les exercices 1 et 2 pour montrer que  $(f(u_N(t))|v) \rightarrow (f(u(t))|v)$  presque partout sur  $[0, T]$ , pour tout  $v \in H_0^1 \cap L^{2p}(\Omega)$ , et conclure.

### Exercice 7 : un résultat d'explosion en temps fini

Sur  $\mathbb{R}^+ \times (0, 1)$  on considère

$$\partial_t u - \Delta u = u^3,$$

avec  $u|_{x=0} = u|_{x=1} = 0$  et  $u|_{t=0} = u_0$ . Soit

$$c(t) := \int_0^1 u(t, x) \sin(\pi x) dx.$$

1. Montrer que

$$c'(t) \geq -\pi^2 c(t) + \frac{c^3}{4}.$$

2. On suppose que  $c(0) > 2$ . En utilisant le fait que la solution de l'EDO

$$y'(t) = -\pi^2 y(t) + \frac{y^3}{4}$$

s'écrit

$$y(t) = \frac{2}{\sqrt{1 - e^{2\pi^2(t-t_*)}}},$$

montrer que

$$c(t) \rightarrow \infty \quad \text{lorsque} \quad t \rightarrow t_* := \frac{1}{\pi^2} \log \frac{c(0)}{\sqrt{c^2(0) - 4}}.$$