Chapter 4

Espaces de Hilbert

4.1 Produits scalaires et notion d'espace de Hilbert

Définition 4.1.1. Soit $\mathcal{H}$ un espace vectoriel réel ou complexe. Un produit scalaire est une application $\langle\cdot,\cdot\rangle : \mathcal{H}\times\mathcal{H} \to \mathbb{C}$ si $\mathcal{H}$ un espace vectoriel complexe et $\langle\cdot,\cdot\rangle : \mathcal{H}\times\mathcal{H} \to \mathbb{R}$ si $\mathcal{H}$ un espace vectoriel réel, vérifiant

(i) $\forall y \in \mathcal{H} : x \mapsto \langle x, y\rangle$ est linéaire (en x),

(ii) $\langle y, x\rangle = \overline{\langle x, y\rangle}$,

(iii) $\langle x, x\rangle \geq 0$ et si $\langle x, x\rangle = 0$ alors $x = 0$.

Par conséquent $y \mapsto \langle x, y\rangle$ est anti-linéaire (en y) si $\mathcal{H}$ un espace vectoriel complexe. On pose

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}.$$

Nous montrerons plus tard que $\|\cdot\|$ est bien une norme.

Exemple 4.1.2. Soit $\mathcal{H} = L^2(\Omega)$, où $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ est un borélien, muni de la mesure de Lebesgue ou la mesure discrète. Si $f, g \in L^2(\Omega)$ alors $f\bar{g} \in L^1(\Omega)$ et

$$\langle f, g\rangle = \int_\Omega f\bar{g}$$

est bien défini, et $\|f\| = \sqrt{\int |f|^2} = \|f\|_2$.

Lemme 4.1.3. *Soit $\mathcal{H}$ un espace vectoriel réel ou complexe muni du produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Alors, pour tous $x, y \in \mathcal{H}$*

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + 2Re\langle x, y\rangle + \|y\|^2.$$

Proof.

$$\begin{aligned}\langle x+y, x+y\rangle &= \langle x,x\rangle + \langle x,y\rangle + \langle y,x\rangle + \langle y,y\rangle = \langle x,x\rangle + \langle x,y\rangle + \overline{\langle x,y\rangle} + \langle y,y\rangle \\ &= \|x\|^2 + 2Re\langle x,y\rangle + \|y\|^2.\end{aligned}$$

■4.1.3

Nous vérifions aisément certaines propriétés de la norme pour $\|\cdot\|$:

- $\|x\| \geq 0$ par définition, et si $\|x\| = 0$ c'est que $\langle x,x\rangle = 0$ et donc $x = 0$.
- Pour $\lambda \in \mathbf{C}$ nous avons $\|\lambda x\| = \sqrt{\langle \lambda x, \lambda x\rangle} = \sqrt{\lambda\bar{\lambda}\langle x,x\rangle} = \sqrt{|\lambda|^2\langle x,x\rangle} = |\lambda|\sqrt{\langle x,x\rangle} = |\lambda|\|x\|$.

Proposition 4.1.4 (Inégalité de Cauchy Schwarz)**.** *Soit $\mathcal{H}$ un espace vectoriel (réel ou complexe) muni du produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Alors pour tous $x, y \in \mathcal{H}$*

$$|\langle x,y\rangle| \leq \|x\|\|y\|.$$

Proof. Si $\|x\| = 0$ c'est que $x = 0$ et l'inégalité est immédiate. Sinon, $\|x\| > 0$ et pour tout $t \in \mathbf{R}$ nous avons

$$0 \leq \|tx + y\|^2 = \|x\|^2 t^2 + 2Re\langle x,y\rangle t + \|y\|^2.$$

Le discriminant de ce polynôme quadratique doit donc être ≤ 0 :

$$0 \geq \big(2Re\langle x,y\rangle\big)^2 - 4\|x\|^2\|y\|^2,$$

d'où

$$\|x\|\|y\| \geq |Re\langle x,y\rangle| \geq Re\langle x,y\rangle.$$

De plus il existe $\alpha \in \mathbf{C}$ de module 1 tel que $\langle x,y\rangle = \alpha|\langle x,y\rangle|$, d'où $\bar{\alpha}\langle x,y\rangle = |\langle x,y\rangle|$ et

$$\|x\|\|y\| = \|x\|\|\alpha y\| \geq Re\langle x, \alpha y\rangle = Re\big(\bar{\alpha}\langle x,y\rangle\big) = Re|\langle x,y\rangle| = |\langle x,y\rangle|.$$

■4.1.4

Corollaire 4.1.5. *Soit $\mathcal{H}$ un espace vectoriel (réel ou complexe) muni du produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Alors $\|x\| = \sqrt{\langle x,x\rangle}$ définit une norme.*

Proof. Il ne nous reste plus qu'à vérifier l'inégalité triangulaire. On a, d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\begin{aligned}\|x+y\|^2 &= \|x\|^2 + 2Re\langle x,y\rangle + \|y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2|\langle x,y\rangle| + \|y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2 \\ &= \big(\|x\| + \|y\|\big)^2.\end{aligned}$$

■4.1.5

Cette norme est appelée la *norme associée* au produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$.

Définition 4.1.6. On dit que deux vecteurs x, y d'un espace vectoriel complexe sont orthogonaux pour le produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ si $\langle x, y \rangle = 0$.

Lemme 4.1.7. *Soient x, y deux vecteurs d'un espace vectoriel réel ou complexe $\mathcal{H}$. Alors on a*

$$\langle x, y \rangle = \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + i\|x+iy\|^2 - i\|x-iy\|^2\right)$$

si $\mathcal{H}$ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel et

$$\langle x, y \rangle = \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right)$$

si $\mathcal{H}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel En plus on a l'identité de la médiane *ou* du parallélogramme

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right).$$

Si x et y sont orthogonaux on a l'identité de Pythagore

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2.$$

Proof. Par Lemme 4.1.3,

$$\|x+y\|^2 = \big(\|x\|^2 + 2Re\langle x, y \rangle + \|y\|^2\big), \qquad \|x-y\|^2 = \big(\|x\|^2 - 2Re\langle x, y \rangle + \|y\|^2\big),$$

d'où

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2, \qquad \|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 = 4Re\langle x, y \rangle.$$

Nous avons donc démontré l'identité du parallélogramme. Nous en déduisons également que

$$\begin{aligned} Re\langle x, y \rangle &= \frac{1}{4}\big(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\big), \\ Im\langle x, y \rangle &= Re\big(-i\langle x, y \rangle\big) = Re\langle x, iy \rangle = \frac{1}{4}\big(\|x+iy\|^2 - \|x-iy\|^2\big), \end{aligned}$$

Ce qui établit la première identité sur un $\mathbb{C}$-espace vectoriel. Finalement, si $x \perp y$:

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + 2Re(0) + \|y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2.$$

■ 4.1.7

Définition 4.1.8. Un espace de Hilbert est un espace vectoriel réel ou complexe muni d'un produit scalaire et qui est complet pour la norme associée.

Exemple 4.1.9. $L^2(\Omega)$. La complétude a été démontrée dans le théorème de Fischer-Riesz.

4.2 Somme directe et complémentaire orthogonal

Définition 4.2.1. Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert et $\mathcal{H}_1$ et $\mathcal{H}_2$ deux sous-espaces vectoriels. On dit que $\mathcal{H}$ est la somme directe orthogonale de $\mathcal{H}_1$ et $\mathcal{H}_2$, notée $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \oplus^\perp \mathcal{H}_2$, si $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 + \mathcal{H}_2$, $\mathcal{H}_1 \cap \mathcal{H}_2 = \{0\}$ et $\forall x_1 \in \mathcal{H}_1, x_2 \in \mathcal{H}_2 : \langle x_1, x_2 \rangle = 0$. Le complémentaire orthogonal d'un sous-espace $F \subset \mathcal{H}$ est défini par $F^\perp := \{x \in \mathcal{H} | \forall y \in F : \langle x, y \rangle = 0\}$.

Théorème 4.2.2. *Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert et $F \subset \mathcal{H}$ un sous-espace fermé. Soit $x \in \mathcal{H}$. Alors*

(i) *Il existe un unique $y \in F$ qui satisfait*

$$\|x - y\| = d(x, F) := \inf\{\|x - z\| : z \in F\}.$$

On note $y = p_F(x)$. Ceci définit alors une application

$$p_F : \mathcal{H} \to \mathcal{H}.$$

(ii) *$p_F(x)$ est l'unique vecteur dans F qui satisfait $x - p_F(x) \perp F$.*

(iii) *$\forall x \in \mathcal{H}$: $\|x\|^2 = \|p_F(x)\|^2 + \|p_{F^\perp}(x)\|^2$.*

(iv) *L'application $p_F : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ est linéaire est continue. C'est la projection sur F le long $F^\perp$.*

(v) *Le complémentaire orthogonal $F^\perp$ est un sous espace fermé de $\mathcal{H}$ et $\mathcal{H} = F \oplus F^\perp$.*

Proof. Pour $\varepsilon > 0$, prenons $y, z \in F$ et supposons que $d(x, y)^2 \leq d(x, F)^2 + \varepsilon$ et $d(x, z)^2 < d(x, F)^2 + \varepsilon$. Posons : $w = \frac{y+z}{2}$, $u = \frac{y-z}{2}$, de telle façon que $w \in F$ et $y = w + u$, $z = w - u$. D'après l'identité du parallélogramme :

$$\begin{aligned} \|(x - w) + u\|^2 + \|(x - w) - u\|^2 &= 2\big(\|x - w\|^2 + \|u\|^2\big) \\ \frac{\|x - z\|^2 + \|x - y\|^2}{2} &= d(x, w)^2 + \frac{1}{4} d(y, z)^2 \\ d(x, F)^2 + \varepsilon &> d(x, F)^2 + \frac{1}{4} d(y, z)^2 \\ d(y, z) &< 2\sqrt{\varepsilon}. \end{aligned}$$

Soit maintenant $(y_n) \subseteq F$ une suite telle que $d(x, y_n) \to d(x, F)$. Alors d'après notre calcul c'est une suite de Cauchy, qui doit donc converger vers un $y \in F$ (puisque $\mathcal{H}$ est complet et F fermé). Nous obtenons $d(x, y) = \lim d(x, y_n) = d(x, F)$. Pour l'unicité, supposons que $z \in F$ vérifie lui aussi $d(x, z) = d(x, F)$. Alors encore d'après le calcul précédent $d(y,z) < 2\sqrt{\varepsilon}$ pour tout $\varepsilon > 0$, ce qui donne $d(y,z) = 0$ et $y = z$. Ceci montre le premier point et donc l'existence de l'application P_F.

Pour le deuxième point, supposons que $x - P_F(x) \not\perp F$. Il existe donc $z \in F$ tel que $\langle x - P_f(x), z\rangle = s \neq 0$, et quitte à diviser z par $\bar{s}$ nous pouvons supposer que $\langle x - P_f(x), z\rangle = 1$. Soit encore t une variable réelle. Alors $P_F(x) + tz \in F$ et

$$d(x, P_F(x) + tz)^2 = \|x - P_F(x) - tz\|^2 = t^2\|z\|^2 - 2t + \|x - P_F(x)\|^2.$$

Ce polynôme en t atteint son minimum ailleurs qu'à $t = 0$, donc $d(x,F) < d(x, P_F(x))$, une contradiction au choix de $P_F(x)$. Nous avons donc bien $x - P_F(x) \perp F$. Pour l'unicité, supposons que $x - y \perp F$ et $x - z \perp F$, où $y, z \in F$ (par exemple, on pourrait avoir $y = P_F(x)$). Alors $y - z \in F$, d'où $\langle x - y, y - z\rangle = \langle x - z, y - z\rangle = 0$. Une soustraction donne $\langle y - z, y - z\rangle = 0$, d'où $y - z = 0$ et $y = z$.

Le troisième point découle du deuxième, vu que $x - P_F(x) \perp P_F(x)$.

Pour (iv), on vérifie aisément que $(x + \lambda y) - (P_F(x) + \lambda P_F(y)) = (x - P_F(x)) + \lambda(y - P_F(y)) \in F^\perp$, d'où $P_F(x) + \lambda P_F(y) = P_F(x + \lambda y)$ d'après (ii), et P_F est linéaire. D'après (iii) nous avons $\|P_F(x)\| \leq \|x\|$, donc P_F est continu (de norme ≤ 1).

Finalement, pour tout $x \in \mathcal{H}$ nous avons $x = (x - P_F(x)) + P_F(x)$, où $x - P_F(x) \in F^\perp$ et $P_F(x) \in F$, ce qui donne bien $F \oplus F^\perp = \mathcal{H}$. $\blacksquare_{4.2.2}$

Corollaire 4.2.3. *Pour tout sous-espace vectoriel fermé $F \subset \mathcal{H}$ on a $(F^\perp)^\perp = F$. En particulier l'orthogonale d'un sous-espace vectoriel non-fermé est fermé. En outre F est dense dans $\mathcal{H}$ si et seulement si $F^\perp = \{0\}$.*

Corollaire 4.2.4 (Théorème de représentation de Riesz)**.** *Soit $\varphi\colon \mathcal{H} \to \mathbf{C}$ une forme linéaire continue. Alors il existe un unique $y \in \mathcal{H}$ tel que pour tout x :*

$$\varphi(x) = \langle x, y\rangle.$$

En outre, nous avons $\|\varphi\| = \|y\|$ où

$$\|\varphi\| = \sup\{|\varphi(x)|\colon \|x\| \leq 1\}.$$

Proof. Si $\varphi = 0$, alors $y = 0$ convient. Si $\varphi \neq 0$, soit $F = \varphi^{-1}(\{0\})$. Alors F est un hypeplan fermé de $\mathcal{H}$, distinct de $\mathcal{H}$. Donc $F = F \oplus^\perp F^\perp$, où $F^\perp$ est de dimension 1. Soit $y_0 \in F^\perp$ avec $\|y_0\| = 1$. Tout $x \in \mathcal{H}$ s'écrit $x = P_F(x) + P_{F^\perp}(x)$ avec $P_{F^\perp}(x) = ty_0$ (t dépend de x). Comme ϕ est linéaire, on obtient

$$\varphi(x) = t\varphi(y_0) \text{ avec } t = \langle x, y_0\rangle.$$

Par conséquent, on a :

$$\varphi(x) = \varphi(y_0)\langle x, y_0\rangle = \langle x, \overline{\varphi(y_0)}y_0\rangle.$$

Par conséquent, en posant $y = \overline{\varphi(y_0)}y_0$, on a $\varphi(x) = \langle x, y\rangle$.

Pour l'unicité, il suffit de constater que si $\langle x, y_1\rangle = \langle x, y_2\rangle$ pour tout $x \in \mathcal{H}$, alors $y_1 - y_2 \perp \mathcal{H}$ et donc $y_1 = y_2$.

Par l'inégalité ed Cauchy–Schwarz, $|\varphi(x)| \leq \|x\|\|y\|$, et donc $\|varphi\| \leq \|y\|$. De plus, comme $\varphi(y/\|y\|) = \|y\|$, on obtient $\|\varphi\| \geq \|y\|$, ce qui implique l'égalité désirée.

$\blacksquare_{4.2.4}$

4.3 Bases orthonormales

Définition 4.3.1. Un espace de Hilbert $\mathcal{H}$ est séparable s'il possède une suite de points qui est dense dans $\mathcal{H}$.

Exemple 4.3.2. $L^2(\Omega)$.

Définition 4.3.3. Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert séparable. On appelle base orthonormale de $\mathcal{H}$ tout sous-ensemble fini ou dénombrable $\{e_n\}_n$ qui vérifie

(i) $\|e_n\| = 1$ et $\langle e_n, e_m\rangle = 0$ si $n \neq m$,

(ii) le sous-espace vectoriel engendré par $\{e_n\}_n$ (par combinaisons linéaires finies) est dense dans $\mathcal{H}$.

Exemple 4.3.4. $\mathcal{H} = \ell^2(\mathbb{N})$ avec produit scalaire $\langle (\lambda_k)_k, (\mu_m)_m\rangle = \sum_k \lambda_k \overline{\mu_k}$ et e_n la suite $(\delta_{nk})_k$.

Exemple 4.3.5. $\mathcal{H} = L^2([0, 2\pi])$ avec produit scalaire $\langle f, g\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\overline{g(t)}dt$ et e_n la fonction $t \mapsto e^{int}$.

Lemme 4.3.6. *Soit $(e_i)_{i<n}$ une famille orthonormée et soit F le sous-espace engendré (donc $\langle e_i, e_j\rangle = \delta_{ij}$, mais on ne demande pas que F soit dense). Alors pour tout x :*

$$P_{\bar{F}}(x) = \sum_{i<n} \langle x, e_i\rangle e_i.$$

Proof. Il suffit de prouver que $x - \sum_{i<n}\langle x, e_i\rangle e_i \perp F$, ce qui est immédiat. $\blacksquare_{4.3.6}$

Théorème 4.3.7 (Existence des bases orthonormales)**.** *Tout espace de Hilbert séparable possède une base orthonormale.*

Proof. Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite dense de $\mathcal{H}$. On en extrait un système libre (linéairement indépendant) que l'on appelle $(v_n)_{n\geq 0}$. On construit ensuite une base orthonormale à partir de $(v_n)_{n\geq 0}$ suivant le **principe d'orthonormalisation de Gram–Schmidt** :
On pose $e_0 = \frac{v_0}{\|v_0\|}$. On remarque que $v_1 - \langle v_1, e_0\rangle \perp e_0$. De plus le sous-espace engendré par e_0 et e_1 coïncide avec celui engendré par v_0 et v_1. On obtient e_1 en posant

$$e_1 = \frac{v_1 - \langle v_1, e_0\rangle \perp e_0}{\|v_1 - \langle v_1, e_0\rangle \perp e_0\|}.$$

Supposons $e_0, \cdots, e_n$ construits de sorte que ce soit un système orthonormal qui engendre le même sous-espace vectoriel que celui engendré par $v_0, \cdots, v_n$, noté F_n. On obtiendra e_{n+1} en posant

$$e_{n+1} = \frac{v_{n+1} - P_{F_n} v_{n+1}}{\|v_{n+1} - P_{F_n} v_{n+1}\|}.$$

Par construction on obtiendra une base orthonormale de $\mathcal{H}$. $\blacksquare_{4.3.7}$

Théorème 4.3.8. *Soient $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert et $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une base orthonormale.*

(i) *Pour toute $(\lambda_n)_n \in \ell^2(\mathbb{N})$ la série $\sum_{n\geq 0} \lambda_n e_n$ converge dans $\mathcal{H}$ et sa somme $x = \sum_{n\geq 0} \lambda_n e_n$ vérifie*

$$\langle x, e_n\rangle = \lambda_n, \quad \|x\|^2 = \sum_{n\geq 0} |\lambda|^2.$$

(ii) *Pour tout $x \in \mathcal{H}$ la série $\sum_{n\geq 0} |\langle x, e_n\rangle|^2$ converge et*

$$x = \sum_n \langle x, e_n\rangle e_n, \quad \|x\|^2 = \sum_n |\langle x, e_n\rangle|^2.$$

Proof. (i) Soit $u_N = \sum_{n=0}^N \lambda_n e_n$. Si $p \geq N$, on obtient

$$\|u_p - u_N\|^2 = \| \sum_{n=N+1}^{p} \lambda_n e_n\|^2 = \sum_{n=N+1}^{p} |\lambda_n|^2$$

car $\langle e_n, e_p\rangle = 1$ si $n = p$ et 0 sinon. Comme $(\lambda_n)_n \in \ell^2(\mathbb{N})$, $(u_n)_n$ est de Cauchy dans $\mathcal{H}$ qui est complet, donc $(u_n)_n$ converge dans $\mathcal{H}$. De plus, pour tout $N \geq n$, on a $\langle u_N, e_n\rangle = \lambda_n$. Par continuité du produit scalaire (cf. Cauchy–Schwarz), $\langle x, e_n\rangle = \lambda_n$. Par continuité de la norme

$$\lim_{N\to\infty} \|u_N\|^2 = \|x\|^2 = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} |\lambda_n|^2 = \sum_{n\geq 0} |\lambda_n|^2.$$

(ii) Soit $v_N = \sum_{n=0}^N |\langle x, e_n\rangle|^2$. La suite $(v_n)_n$ est croissante et positive. Elle converge si et seulement si elle est majorée. Nous allons montrer que $v_n \leq \|x\|^2$. Pour cela posons

$$x_N = x - \sum_{k=0}^N \langle x, e_k\rangle e_k.$$

Alors $x_N \perp e_k$ pour tout $k = 0, \cdots, N$. D'après l'identité de Pythagore,

$$\|x\|^2 = \|x_N\|^2 + \|\sum_{k=0}^N \langle x, e_k\rangle e_k\|^2 = \|x_N\|^2 + \sum_{k=0}^N |\langle x, e_k\rangle|^2,$$

qui implique $v_N \leq \|x\|^2$. On conclut ensuite en appliquant (i).

$\blacksquare_{4.3.8}$

Définition 4.3.9. Soient $\mathcal{H}_1$ et $\mathcal{H}_2$ deux espaces de Hilbert. Une isométrie entre $\mathcal{H}_1$ et $\mathcal{H}_2$ est une application linéaire $U : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_2$ qui satisfait $\forall x \in \mathcal{H}_1 : \|U(x)\| = \|x\|$. $\mathcal{H}_1$ et $\mathcal{H}_2$ sont isomorphes s'il existe une isométrie bijective entre eux.

Corollaire 4.3.10. *Tout espace de Hilbert séparable de dimension infinie est isomorphe à* $\ell^2(\mathbb{N})$.

Proof. Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert séparable et soit $(e_n)_{n\geq 0}$ une base orthonormale de $\mathcal{H}$. Soit U l'application de $\mathcal{H}$ dans $\ell^2(\mathbb{N}$ définie par $U(x) = (\langle x, e_n\rangle)_{n\geq 0}$. D'après le théorème 4.3.8 U est une isométrie surjective. Comme toute isométrie linéaire est injective, U est bijective.

$\blacksquare_{4.3.10}$

Proposition 4.3.11. *Soient X_1 et X_2 deux espaces de Banach. Soit $E \subseteq X_1$ un sous espaces vectoriel dense (donc, non nécessairement complet). Soit $u \colon E \to X_2$ une application linéaire, et supposons en outre qu'elle est continue (ce qui revient à l'existence d'une constante C telle que pour tout $x \in E$: $\|u(x)\| \leq C\|x\|$).*

Alors u admet un unique prolongement en une application linéaire continue $\tilde{u} \colon X_1 \to X_2$.

Proof. Soit $x \in X_1$. Alors il existe une suite $(x_n) \subseteq E$ t.q. $x_n \to x$. Si $\tilde{u}$ existe elle doit satisfaire

$$\tilde{u}(x) = \lim u(x_n) \qquad \text{quand } x_n \to x \tag{4.1}$$

d'où son unicité. Il reste à démontrer que (4.1) définit en effet une application $\tilde{u}$ avec les propriétés désirées.

D'abord on vérifie que la limite existe toujours dans (4.1). En effet, (x_n) est une suite de Cauchy et

$$\|u(x_n) - u(x_m)\| = \|u(x_n - x_m)\| \leq C\|x_n - x_m\|.$$

Donc $(u(x_n))_n$ est également une suite de Cauchy et $\lim u(x_n)$ existe. Soit maintenant $(y_n) \subseteq E$ une autre suite telle que $y_n \to x$. Alors la suite $x_0, y_0, x_1, y_1, x_2, y_2, \ldots$, que l'on noterait (z_n), a aussi x pour limite, donc $\lim u(z_n)$ existe et est égale à la limite de toute sous-suite :

$$\lim u(y_n) = \lim u(z_n) = \lim u(x_n).$$

En conséquence, $\lim u(x_n)$ ne dépend que de x (et non du choix de la suite (x_n)), et (4.1) définit bien une application $\tilde{u}\colon X_1 \to X_2$.

Si $x \in E$ alors la suite constante $x_n = x$ tend vers x, d'où $\tilde{u}(x) = u(x)$. Aussi, si $(x_n), (y_n) \subseteq E$ et $x = \lim x_n$, $y = \lim y_n$ dans X_1 alors

$$x_n + y_n \to x + y, \qquad \lambda x_n \to \lambda x, \qquad \|x_n\| \to \|x\|, \qquad \|u(x_n)\| \to \|u(x)\|,$$

d'où

$$u(x+y) = u(x) + u(y), \qquad u(\lambda x) = \lambda u(x), \qquad \|u(x)\| \leq C\|x\|.$$

■4.3.11