Erratum à l'article "Existence et unicité de solutions pour le système de Navier-Stokes axisymétrique"

par

Isabelle GALLAGHER *
Slim IBRAHIM **
Mohamed MAJDOUB **

Dans l'article "Existence et unicité de solutions pour le système de Navier–Stokes axisymétrique", *Communications in Partial and Differential Equations*, **26**, pages 883–907, 2001, une erreur s'est glissée dans la démonstration du théorème 7, dans la partie "existence locale". Nous proposons ici une preuve corrigée. Nous reprenons les notations de l'article sans rappeller les définitions. Le problème est dans la section 4 (construction d'une solution dans L^2_0 par point fixe), dans le cas à données quelconques car la fonction η intervenant page 903 dans le lemme 11 ne tend pas vers zéro avec le temps. Dans le théorème 7, la démonstration du cas des données petites ne dépend pas de cette propriété de η, et est donc inchangée. Par contre il nous faut revoir la démonstration du cas général. Le lemme que nous allons démontrer et utiliser est le suivant, qui est une version précisée de celui de l'article.

Lemme 11. *Soient u et v deux champs de vecteurs de X_T, alors pour tout temps $T \geq 0$,*

$$||B(u,v)||^2_{X_T} \leq \eta \sup_{t\in[0,T]} \Big(||u(t)||_{L^2_0} ||v(t)||_{L^2_0} ||t^{1/2}\nabla u(t)||_{L^2_0} ||t^{1/2}\nabla v(t)||_{L^2_0} \Big),$$

où η est une constante indépendante de u et de v.

Les lois de produit bidimensionnelles permettent d'écrire en effet, pour tous les champs u et v axisymétriques, la version précisée suivante du lemme 12 :

$$||uv||_{L^2_0} \leq C||u||^{1/2}_{L^2_0} ||v||^{1/2}_{L^2_0} ||\nabla u||^{1/2}_{L^2_0} ||\nabla v||^{1/2}_{L^2_0}.$$

*Centre de Mathématiques, École Polytechnique, 91128 Palaiseau Cedex, France
**Faculté des Sciences de Bizerte, Département de Mathématiques, Zarzouna 7021, Bizerte, Tunisie

On peut alors modifier les estimations de B obtenues dans l'article de la manière suivante : pour tous les champs axisymétriques u et v, on a d'une part

$$||\Delta_j B(u,v)(t)||^2_{L^2_0} \leq C c_j^2 ||v||_{L^\infty(0,t;L^2_0)} ||t^{1/2}\nabla u||_{L^\infty(0,t;L^2_0)}$$

$$\times ||u||_{L^\infty(0,t;L^2_0)} ||t^{1/2}\nabla v||_{L^\infty(0,t;L^2_0)} f_j^2(t)$$

où l'on a posé comme dans l'article $f_j(t) = \displaystyle\int_0^t \frac{e^{2^{2j}(s-t)c\nu}}{\sqrt{s}} \, 2^j ds$, et cette fonction est bornée en temps, uniformément en j. De même on a

$$t\,||\Delta_j \nabla B(u,v)(t)||^2_{L^2_0} \leq C\, c_j^2\, ||v||_{L^\infty(0,t;L^2_0)} ||t^{1/2}\nabla u||_{L^\infty(0,t;L^2_0)}$$

$$\times ||u||_{L^\infty(0,t;L^2_0)} ||t^{1/2}\nabla v||_{L^\infty(0,t;L^2_0)}\, g_j^2(t)\,,$$

avec $g_j(t) = 2^{2j} t^{1/2} \displaystyle\int_0^t s^{-1/2} e^{2^{2j}(s-t)c\nu} ds$. Cette fonction étant bornée en temps, uniformément en j, on a donc finalement l'estimation du lemme 11. On rappelle (voir [Jo], section 6.IV) que les opérateurs de troncature en fréquences sont continus sur L^2_0 et que $\displaystyle\sum_j \|\Delta_j f\|^2_{L^2_0} \sim \|f\|^2_{L^2_0}$. Nous pouvons à présent terminer la démonstration du théorème 7, dans le cas de données quelconques, en utilisant la méthode suivante : on découpe la donnée initiale $v_0 \in L^2_0$ en deux parties $v_0 = u_0 + w_0$ où u_0 est la partie basses fréquences de v_0 : $u_0 = S_N v_0$, où $S_N = \sum_{j \leq N} \Delta_j$. Le paramètre N sera choisi grand, de manière à ce que w_0 soit petit dans L^2_0. On définit alors la fonction w suivante :

$$w = S(t)w_0 + B(w,w) + 2B(u,w) + B(u,u),$$

où $u = S(t)u_0$, et il est évident qu'il suffit de démontrer l'existence et l'unicité de w dans X_T pour T assez petit. On note que la fonction u est aussi régulière en espace qu'on le souhaite, et en particulier on a pour tout temps $t \geq 0$

$$\|\nabla u(t)\|_{L^2_0} \leq C 2^N \|u(t)\|_{L^2_0}, \tag{1}$$

où C ne dépend pas de t. On applique alors l'algorithme de point fixe décrit dans l'article. Par le lemme 9, il suffit pour conclure de démontrer les trois propriétés suivantes : pour N assez grand et T suffisamment petit (dépendant de N), on a

$$8\eta \|S(t)w_0\|_{X_T} < 1, \tag{2}$$

$$8\eta \|B(u,u)\|_{X_T} < 1, \tag{3}$$

et

$$4\|B(u,w)\|_{X_T} \leq \|w\|_{L^2_0}. \tag{4}$$

Notons que cette dernière propriété ne figure pas dans le lemme 9 car il y a un terme linéaire supplémentaire (inoffensif) par rapport au cadre du lemme 9. La propriété (2) est une conséquence de la construction de w_0 et est vérifiée dès que N est assez grand, indépendamment de T, par le lemme 10. Les propriétés (3) et (4) quant à elles découlent du lemme 11. En effet, la propriété (1) signalée ci–dessus implique que le terme $||t^{1/2}\nabla u||_{L^\infty(0,T;L^2_0)}$ intervenant dans l'inégalité du lemme 11 peut être rendu arbitrairement petit dès que T est assez petit (dépendant bien sûr de N), et on a finalement obtenu les propriétés (2), (3) et (4).

Le résultat est donc démontré.