Analyse Fonctionnelle
Partiel

26 mars 2018

Vrai ou Faux ? (Justifier la réponse)

1. Si (x_n) est une suite bornée d'un espace de Banach réflexif alors il existe une suite extraite qui converge faiblement.
2. Une limite inductive d'une suite strictement croissante d'espaces de Fréchet est métrisable.
3. Si F est un sous-espace vectoriel non dense d'un espace de Banach E, alors il existe une forme linéaire f continue sur E telle que pour tout $x \in F$, $\langle f, x\rangle = 0$.

Exercice 1. *Fonctions de L^1 génériques*

On munit $[0,1]$ de la mesure de Lebesgue λ, et l'on considère l'espace de Banach $X := L^1([0,1])$.

1. Montrer que pour tout $p > 1$, $L^p([0,1])$ est un sous-espace vectoriel de X.

2. Pour $N \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, on pose

$$E_N := \Big\{ f \in L^1 \,/\, \forall I \subset [0,1] \text{ borélien}, \ \int_I |f| \leq N\lambda(I)^{\frac{1}{N}} \Big\} .$$

Montrer que E_N est fermé dans X, et que $\displaystyle\bigcup_{p>1} L^p([0,1]) \subset \bigcup_{N\geq 1} E_N$.

3. Pour $N \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ donné, on considère $f \in E_N$, et $\varepsilon > 0$. On pose

$$g_N : x \in [0,1] \mapsto \frac{1}{x^{1-\frac{1}{2N}}} \cdot$$

Montrer que $f + \varepsilon g_N$ appartient à X, mais n'appartient pas à E_N. En déduire que l'ensemble des fonctions de L^1 qui n'appartiennent à aucun L^p (quelque soit $p > 1$) est dense dans X.

⋆

Exercice 2. *Distributions homogènes*

– Les questions 2 à 6 sont indépendantes. –

Dans tout cet exercice on considère un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ stable par homothétie, c'est-à-dire tel que $M_\lambda(\Omega) \subset \Omega$ où pour tout $x \in \mathbb{R}^d$ et tout $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$M_\lambda(x) := \lambda x\,.$$

On dit qu'une fonction f sur $\mathbb{R}^d$ est homogène de degré β sur Ω si

$$\forall x \in \Omega\,, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}\,, \quad f(\lambda x) = \lambda^\beta f(x)\,.$$

On rappelle que si $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ est une distribution et $\phi \in C^\infty(\Omega', \Omega)$ un difféomorphisme, alors on a $T \circ \phi \in \mathcal{D}'(\Omega')$ avec

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)\,, \quad \langle T \circ \phi, \varphi\rangle = \big\langle T, |\det D\phi^{-1}|\, \varphi \circ \phi^{-1} \big\rangle\,.$$

On dit qu'une distribution $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ est homogène de degré β si

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}\,, \quad T \circ M_\lambda = \lambda^\beta T \quad \text{dans} \quad \mathcal{D}(\Omega)\,.$$

1. Soit $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Montrer que

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)\,, \quad \langle T \circ M_\lambda, \varphi\rangle = \frac{1}{\lambda^d} \big\langle T, \varphi\big(\frac{\cdot}{\lambda}\big) \big\rangle\,.$$

2. Soit f une fonction de classe C^1 sur $\mathbb{R}^d$, homogène de degré β sur Ω.
   (a) Montrer que
   $$x \cdot \nabla f(x) = \beta f(x) \quad \text{pour tout} \quad x \in \Omega\,.$$
   (b) En déduire que
   $$\sum_{j=1}^{d} \frac{\partial}{\partial x_j}\big(x^j f(x)\big) = (d+\beta) f(x)\,.$$
   (c) Soit $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ homogène de degré β. Montrer que
   $$\sum_{j=1}^{d} \frac{\partial}{\partial x_j}\big(x^j T\big) = (d+\beta) T \quad \text{dans} \quad \mathcal{D}'(\Omega)\,.$$
   (On pourra trouver utile de calculer $\Big(\dfrac{\partial}{\partial\lambda}\varphi\Big(\dfrac{x}{\lambda}\Big)\Big)_{|\lambda=1}$ *pour* $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$*).*
3. Soit $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d \setminus \{0\})$, continue sur $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$, homogène de degré β.
   (a) Montrer que
   $$f(x) = |x|^\beta f\Big(\frac{x}{|x|}\Big)\,,$$
   et que si
   $$\int_{\mathbb{S}^{d-1}} |f(y)|\, d\sigma(y) = 0$$
   où $d\sigma$ désigne l'élement de surface sur la sphère unité $\mathbb{S}^{d-1}$, alors $f = 0$ sur $\mathbb{R}^d$.
   (b) En déduire qu'une fonction continue, non identiquement nulle, homogène de degré β est localement intégrable sur $\mathbb{R}^d$ si et seulement si $\beta > -d$.
4. Montrer que δ_0 est homogène sur $\mathbb{R}^d$ de degré $-d$.
5. Soit $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ homogène de degré β. Montrer que pour tout multi-indice $\alpha \in \mathbb{N}^d$, la distribution $\partial^\alpha T$ est homogène de degré $\beta - |\alpha|$.
6. Soit $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d \setminus \{0\})$ homogène de degré $\beta > -d$. On veut montrer qu'il existe une distribution $\dot{T} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ homogène de degré β qui prolonge T à $\mathbb{R}^d$, c'est-à-dire telle que
   $$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d \setminus \{0\})\,, \quad \langle \dot{T}, \varphi\rangle = \langle T, \varphi\rangle\,.$$
   On définit, pour toute fonction $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$, la fonction $R_\beta\phi$ par
   $$\forall x \in \mathbb{R}^d\,, \quad R_\beta\phi(x) := \int_0^\infty \phi(rx) r^{\beta+d-1}\, dr\,.$$
   Soit $\zeta \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^+ \setminus \{0\})$ positive non identiquement nulle et soit la fonction χ définie par
   $$\chi(x) := c\,\zeta(|x|) \quad \text{avec} \quad c := \Big(\int \zeta(t)\frac{dt}{t}\Big)^{-1}\,.$$
   (a) Vérifier que l'application
   $$\forall \phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)\,, \quad \langle \dot{T}, \phi\rangle = \langle T, \chi R_\beta \phi\rangle$$
   définit une distribution $\dot{T}$ sur $\mathbb{R}^d$.
   (b) Montrer que pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d \setminus \{0\})$,
   $$\langle \dot{T}, \phi\rangle = \langle T, \phi\rangle\,.$$
   (c) Montrer que $\dot{T}$ homogène de degré β et conclure.

⋆