Analyse Fonctionnelle
Partiel

20 mars 2019

Exercice 1.

Soit E un espace de Banach et T une application linéaire continue de E dans lui-même, telle que

$$\forall x \in E\,, \quad \exists n_x \in \mathbb{N}\,, \quad T^{n_x} := \underbrace{T \circ \cdots \circ T}_{n_x \text{ fois}}(x) = 0\,.$$

Montrer que T est nilpotent.

Montrer sur un exemple que le résultat n'est pas vrai si E n'est pas complet.

⋆

Exercice 2. *L'espace $\mathcal{S}$ des fonctions à décroissance rapide*

Soit $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ l'ensemble des fonctions à décroissance rapide sur $\mathbb{R}^d$, formé des fonctions $f \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ telles que pour tout multi-indice $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_d) \in \mathbb{N}^d$ et $\beta \in \mathbb{N}$,

$$\|f\|_{\alpha,\beta} := \sup_{x \in \mathbb{R}^d} |\langle x\rangle^\beta \partial^\alpha f(x)| < \infty\,,$$

en notant $\partial^\alpha := \partial_{x_1}^{\alpha_1} \cdots \partial_{x_d}^{\alpha_d}$ et $\langle x\rangle^\beta := (1+|x|^2)^{\frac{\beta}{2}}$ où $|\cdot|$ est la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^d$. L'espace $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ est donc naturellement muni d'une structure d'espace vectoriel topologique localement convexe séparé, avec les semi-normes $\|\cdot\|_{\alpha,\beta}$.

1. Soit $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. Montrer que pour tout $p \in [1, \infty]$, f appartient à $L^p(\mathbb{R}^d)$. Montrer que pour tout multi-indice α et tout entier β, $\langle x\rangle^\beta \partial^\alpha f$ appartient à $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.
2. Montrer que la topologie de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ est métrisable et que $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ est complet.
3. Montrer que si $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, alors $fg \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, et montrer que la fonction h définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}^d\,, \quad h(x) := (f * g)(x) := \int f(y) g(x-y) dy$$

est bien définie et appartient à $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. Montrer enfin que la fonction Φ définie par

$$\forall \xi \in \mathbb{R}^d\,, \quad \Phi(\xi) := \int e^{-i\xi \cdot x} f(x) dx$$

est bien définie et appartient à $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.

⋆

Exercice 3. *Un théorème de Lyapunov*

On se propose de démontrer le théorème suivant :

Théorème. *Soit $(X, \mathcal{F})$ un espace mesurable, et $\mu_1, \dots, \mu_n$ des mesures finies positives non atomiques sur X. Alors l'ensemble*

$$\Big\{ \big(\mu_1(A), \dots, \mu_n(A)\big) , \quad A \in \mathcal{F} \Big\}$$

est un compact convexe de $\mathbb{R}^n$.

On note $\mu := \mu_1 + \cdots + \mu_n$, et pour i entre 1 et n, on définit $f_i \in L^1(\mu)$ telle que $d\mu_i = f_i d\mu$.

1. On veut montrer que l'espace $L^\infty(\mu)$ s'identifie au dual de $L^1(\mu)$ via l'application

$$I : \begin{array}{l} L^\infty(\mu) \longrightarrow \left(L^1(\mu)\right)^* \\ f \longmapsto \quad I(f) : \begin{array}{l} L^1(\mu) \to \mathbb{R} \\ g \longmapsto \displaystyle\int_X fg d\mu \,. \end{array} \end{array}$$

   (a) Vérifier que I est continue et que

$$\|I(f)\|_{(L^1(\mu))^*} \leq \|f\|_{L^\infty(\mu)} \,.$$

   (b) Montrer que

$$\|I(f)\|_{(L^1(\mu))^*} = \|f\|_{L^\infty(\mu)} \,.$$

   On pourra considérer la fonction $F := u\mathbf{1}_A$ où A est un ensemble de mesure finie et u est tel que $f = |f|u$.

   (c) On admet que I est surjective. Conclure.

2. On pose $W := \big\{ g \in L^\infty(\mu) \,,\ 0 \leq g \leq 1 \big\}$. Montrer que W est un convexe compact pour la topologie faible $*$ $\sigma(L^\infty(\mu), L^1(\mu))$.

3. Soit

$$T : \begin{array}{l} L^\infty(\mu) \longrightarrow \mathbb{R}^n \\ g \longmapsto \Big(\displaystyle\int_X g d\mu_1, \dots, \int_X g d\mu_n \Big) \,. \end{array}$$

   Montrer que $T(W)$ est convexe et compact dans $\mathbb{R}^n$. On pourra étudier la continuité de $T_{|W}$.

4. Soit $\lambda \in T(W)$. On pose $W_\lambda := \big\{ g \in W \,,\ T(g) = \lambda \big\}$. Montrer que W_λ admet des points extrémaux.

5. Montrer que si les points extrémaux des ensembles W_λ, $\lambda \in T(W)$, sont tous des fonctions caractéristiques d'ensembles mesurables, alors le théorème est démontré.

6. Soit $g \in W_\lambda$. On suppose qu'il existe $Z \in \mathcal{F}$ tel que $\mu_1(Z) > 0$ et $\varepsilon > 0$ tel que $\varepsilon \leq g \leq 1 - \varepsilon$ sur Z. Comme μ_1 est non atomique, il existe $A \subset Z$ tel que $\mu_1(A) > 0$ et $\mu_1(Z \setminus A) > 0$.

   (a) Dans le cas $n = 1$, montrer que g n'est pas extrémal dans W_λ.
   On pourra montrer que $g \pm \delta h \in W_\lambda$ pour δ assez proche de 0 et h de la forme

$$h = \alpha \mathbb{1}_A + \beta \mathbb{1}_{Z \setminus A} \,,$$

   avec $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$ bien choisis. En déduire que les points extrémaux de W_λ sont des fonctions caractéristiques d'ensembles mesurables, puis que le théorème est vrai au rang 1.

   (b) On suppose le théorème vrai au rang $n - 1$ pour $n \geq 1$. Montrer que $g \pm \delta h \in W_\lambda$ pour δ assez proche de 0 et h de la forme

$$h = \alpha(2\mathbb{1}_B - \mathbb{1}_A) + \beta(2\mathbb{1}_C - \mathbb{1}_{Z \setminus A}) \,,$$

   avec $B \subset A$, $C \subset Z \setminus A$ et $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$ bien choisis. Conclure.

⋆

Exercice 4. *Hölder-continuité et distributions*

Soit $\alpha \in]0,1[$. On rappelle qu'une fonction f définie sur $\mathbb{R}^d$ est dite α-*Höldérienne*, ce que l'on note $f \in \mathcal{C}^\alpha(\mathbb{R}^d)$, s'il existe une constante $C_\alpha > 0$ telle que pour tous $x, y \in \mathbb{R}^d$,

$$|f(x) - f(y)| \leq C_\alpha \|x - y\|^\alpha$$

où $\|\cdot\|$ désigne la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^d$.

Soit $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$. On veut montrer l'équivalence entre

(i) f a un représentant dans $\mathcal{C}^\alpha(\mathbb{R}^d)$;

(ii) il existe une constante $C > 0$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, il existe $g(x) \in \mathbb{R}$ satisfaisant la propriété suivante : pour tout $r > 0$ et toute fonction test $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ à support dans $B(x,r)$ telle que $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^d} |\phi(y)|dy = 1$,

$$\big|\langle f - g(x), \phi\rangle\big| \leq Cr^\alpha\,.$$

1. Montrer que (i) implique (ii).

   On suppose dorénavant que (ii) est vraie. Dans la suite, on fixe une fonction $\chi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$, positive, à support dans la boule unité, et d'intégrale 1. On note, pour $x \in \mathbb{R}^d$ et $\lambda > 0$,

$$\chi_x^\lambda := \frac{1}{\lambda^d}\chi\left(\frac{\cdot - x}{\lambda}\right).$$

2. On commence par montrer que g est α-Höldérienne.
   (a) Soit $\lambda > 0$ et $x, y \in \mathbb{R}^d$ fixés distincts. Montrer que pour λ assez petit,

$$|\langle f, \chi_x^\lambda - \chi_y^\lambda\rangle| \leq C(\frac{\|x - y\|}{2} + \lambda)^\alpha$$

   pour une constante C ne d'épendant que de α.
   (b) En se servant du fait que $\langle g(x), \chi_x^\lambda\rangle = g(x)$, montrer que g est α-Höldérienne.
3. Soit $F \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ telle qu'il existe $\alpha > 0$ et $C > 0$ tel que pour tout $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ à support dans une boule de rayon r et telle que $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^d} |\phi(y)|dy = 1$,

$$|\langle F, \phi\rangle| \leq Cr^\alpha.$$

   (a) Soit $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$. Montrer que

$$\psi^\lambda : x \in \mathbb{R}^d \longmapsto \int_{\mathbb{R}^d} \chi_x^\lambda(y)\phi(y)dy$$

   converge vers ϕ dans $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ lorsque λ tend vers 0.
   (b) En déduire que que $F = 0$ au sens des distributions.
   (c) Conclure que $f = g$ au sens des distributions.

⋆

Exercice 5. *Étude d'une distribution*

On considère l'application linéaire T de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$ dans $\mathbb{C}$ définie pour $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$ par

$$\langle T, \varphi\rangle := \int_{\mathbb{R}} \varphi(x, -x)dx\,.$$

1. Montrer que T définit bien une distribution. Quel est son ordre ?
2. Déterminer le support de T. En déduire que T ne s'identifie pas à une fonction continue sur $\mathbb{R}^2$.
3. On note (x,t) la variable de $\mathbb{R}^2$. Calculer au sens des distributions $(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial t})T$.

⋆