TD ARITHMÉTIQUE ÉLÉMENTAIRE

N.B.

La difficulté de chaque exercice est indiquée par le nombre d'astérisques : il va d'un * pour les exercices d'application directe du cours, à quatre **** pour les exercices plus abstraits ou mélangeant différentes notions.

LA DIVISIBILITÉ ENTRE ENTIERS

Vocabulaire :

Soient $a, b \in \mathbb{Z}$. On dit que a **divise** b, ou que a est un **diviseur** de b, ou encore que b est un **multiple** de a, si et seulement s'il existe $q \in \mathbb{Z}$ tel que $b = a\,q$.

Question 1 *

Trouver le plus petit entier naturel divisible par tous les nombres entre 1 et 10.

Question 2 **

Soient a et b deux entiers. Montrer que l'un des entiers

$$a,\ b,\ a+b,\ a-b$$

est nécessairement un multiple de 3.

Question 3 *

Soit n un nombre entier à $k+1$ chiffres. Le nombre n s'écrit en base dix sous la forme

$$r_k\, r_{k-1}\, r_{k-2}\, \cdots\, r_2\, r_1\, r_0, \tag{1}$$

où l'on a juxtaposé les $k+1$ chiffres de n les uns après les autres. L'écriture (1) est appelée l'écriture décimale de n, et elle sous-entend que

$$n = r_k \cdot 10^k + r_{k-1} \cdot 10^{k-1} + \cdots r_2 \cdot 100 + r_1 \cdot 10 + r_0.$$

Par exemple, l'écriture décimale du numéro de l'année actuellement en cours est 2021.

Justifier les affirmations suivantes :

(a) Un nombre n est divisible par 2 si, et seulement si son dernier chiffre r_0 est divisible par 2.

(b) Un nombre n est divisible par 5 si, et seulement si son dernier chiffre r_0 est 0 ou 5.

(c) Un nombre n est divisible par 10 si, et seulement si son dernier chiffre r_0 est 0.

(d) Un nombre n est divisible par 4 si, et seulement si le nombre $r_1 r_0$ formé par des deux derniers chiffres est divisible par 4.

(e) Un nombre n est divisible par 25 si, et seulement si le nombre $r_1 r_0$ formé par des deux derniers chiffres est divisible par 25.

Propriétés élémentaires :

Soient a, b et c des entiers. Montrer les propriétés suivantes, à titre d'exercice :

1. Si a divise b et b divise c alors a divise c.
2. Si a divise b et b divise a alors $a = \pm b$.
3. Si a divise b et c alors a divise $b+c$.
4. Si a divise b alors a divise bc.
5. Si a divise b alors ac divise bc.

Question 4 **

Trouver un nombre entier n à trois chiffres, tel que n soit un multiple de 5 et de 14, et que la somme des chiffres de n soit égale à 14.

LA DIVISION EUCLIDIENNE

Question 5 *

Une girouette indique le Nord quand un coup de vent la fait tourner dans le sens horaire de 14060 degrés. Quelle direction indique-t-elle maintenant ?

Question 6 **

On dispose d'un rectangle dont les dimensions, exprimées en centimètres, sont $L = 126$ et $l = 90$. On désire paver ce rectangle avec des carrés de la façon suivante :

- tous les carrés doivent être identiques ;
- on souhaite utiliser le moins de carrés possibles.

Quelles sont les dimensions des carrés que l'on doit choisir pour faire ce pavage ?

Combien va-t-on utiliser de carrés ?

Question 7 **

On range 461 pots de yaourts dans des caisses. La règle est qu'on ne commence une nouvelle caisse que quand la précédente est pleine. A la fin, on a rangé les pots dans 14 caisses.
Combien de pots contiennent les caisses pleines ?

Combien de pots contient la dernière caisse ?

Théorème de la division Euclidienne.

Pour tous entiers naturels a et b, avec $b \neq 0$, il existe deux uniques entiers naturels (q, r) qui vérifient

$$\begin{cases} a = qb + r \\ 0 \leq r < b. \end{cases}$$

On appelle

$a \rightarrow$ le dividende	$q \rightarrow$ le quotient
$b \rightarrow$ le diviseur	$r \rightarrow$ le reste.

Question 8 *

Dire laquelle de ces écritures est une application du Théorème de la division Euclidienne, pour $a = 30$ et $b = 7$:

$$30 = 1 \times 7 + 23, \qquad 30 = 2 \times 7 + 16,$$
$$30 = 4 \times 7 + 2, \qquad 30 = 3 \times 7 + 9.$$

Question 9 *

Trouver le quotient et le reste pour les couples d'entiers suivants. Calculatrices non autorisées !

(a) $a = 778$ *et* $b = 10$.

(b) $a = 1058$ *et* $b = 7$.

(c) $a = 3442$ *et* $b = 31$.

(d) $a = 20038$ *et* $b = 106$.

Question 10 ***

On divise un entier a par 15, le reste est 3. Quel est le reste de la division de a par 5 ?

Même question si le reste est 13.

On divise un entier a par 5, le reste est 3. Quel peut être le reste de la division par 15 ?

LES CONGRUENCES

Question 11 *

Remplir les espaces blancs par le modulo :

$$\begin{aligned} 55 &= \ldots \pmod 7 \\ 2048 &= \ldots \pmod 3 \\ 406 &= \ldots \pmod{1056} \end{aligned}$$

Question 12 **

Soient a, b, c, d, n, m des entiers. Démontrer les propriétés suivantes :

(a) *Si* $a = b \pmod n$, *alors* $b = a \pmod n$.

(b) *Si* $a = b \pmod n$ *et* $b = c \pmod n$, *alors*

$$a = c \pmod n.$$

(c) *Si* $a = c \pmod n$ *et* $b = d \pmod n$, *alors*

$$a + b = c + d \pmod n.$$

(d) *Si* $a = c \pmod n$ *et* $b = d \pmod n$, *alors*

$$a \cdot b = c \cdot d \pmod n.$$

(e) *Si* $a = b \pmod n$, *alors*

$$m \cdot a = m \cdot b \pmod{m \cdot n}.$$

Question 13 **

Important :

Les deux propriétés suivantes sont-elles équivalentes ? Justifier.

- m divise $a - b$.
- a et b ont le même reste dans la division par m.

Question 14 **

Utilisez les propriétés de congruence de l'exercice précédent dans les questions suivantes.

(a) *On suppose que* $X = 6 \pmod 7$ *and* $Y = 16 \pmod 7$. *Calculer les congruences suivantes :*

$$\begin{aligned} X + Y &= \ldots \pmod 7 \\ X - Y &= \ldots \pmod 7 \\ Y - X &= \ldots \pmod 7 \\ X \times Y &= \ldots \pmod 7 \end{aligned}$$

(b) *Calculer le reste de la division de* 46×23 *par* 7

(c) *Calculer* $13^8 \pmod 7$

(d) *Calculer* $2^{123} \pmod{29}$

Question 15 ***

On effectue la division euclidienne d'un entier naturel a par 38. On trouve un quotient q et un reste égal à $4q^2 - 4$. Donner les valeurs possibles pour a et expliciter les divisions euclidiennes correspondantes.

Question 16 **

Trouver les couples d'entiers n et m tels que la somme $n+m$ est égale à 76 et le quotient de la division euclidienne de m par n est égal à 9 (pas d'informations sur le reste).

Question 17 ****

Trois entiers naturels a, b et c vérifient la relation de Pythagore

$$a^2 = b^2 + c^2$$

Donner deux exemples de tels triplets.

Montrer que :

- l'un au moins des nombres b et c est multiple de 3
- l'un au moins des nombres a, b, c est multiple de 5
- l'un au moins des nombres b et c est multiple de 2

Question 18 ***

Montrer que quel que soit l'entier n

- $4^{3n} - 4^n$ est multiple de 5
- $3^{2n} - 2^n$ est multiple de 7
- $4^n + 15n - 1$ est multiple de 9
- $3 * (5^{2n+1}) + 2^{3n+1}$ est multiple de 17

PLUS GRAND DIVISEUR COMMUN (PGCD)

Question 19 *

Puisque $2391 = 23 \cdot 100 + 91$, décider si

$$\mathrm{PGCD}(2391, 23) = \mathrm{PGCD}(91, 23).$$

Aucun calcul n'est requis !

Question 20 **

Utiliser l'algorithme d'Euclide pour calculer les suivants :

(a) $\mathrm{PGCD}(1064, 700)$

(b) $\mathrm{PGCD}(4567, 91837)$

(c) $\mathrm{PGCD}(1583890, 3927)$.

Ensuite, pour les couples (a, b) précédents trouver des entiers x et y tels que $\mathrm{PGCD}(a, b) = xa + yb$.

Question 21 *

Deux entiers a, b sont dits **premiers entre eux**, si leur PGCD est égal à 1. Dire, en justifiant votre réponse, si les entiers suivants sont premiers entre eux :

(a) 8 *et* 14 *:* ....

(b) 27 *et* 200 *:* ....

(c) 2048 *et* 2187 *:* ....

Question 22 ***

Montrer, en utilisant uniquement la définition du PGCD les propriétés suivantes :

(a) *Pour tout* $a \in \mathbb{Z}$, $a \neq 0$, *on a* $\mathrm{PGCD}(0, a) = |a|$.

(b) *Pour tout* $a \in \mathbb{Z}$ *on a* $\mathrm{PGCD}(1, a) = 1$.

(c) *Pour tout* $a, b \in \mathbb{Z}$ *on a* $\mathrm{PGCD}(a, b) = \mathrm{PGCD}(|a|, |b|)$.

Question 23 *

Trouver l'entier positif n tel que $\mathrm{PGCD}(n, 527) = 17$ et $\mathrm{ppcm}(n, 527) = 13702$.

Question 24 **

Trouver tous les nombres entiers a et b dont la somme est 256 et dont le PGCD est 16.

Question 25 **

Trouver tous les nombres entiers a et b dont le produit est 1734 et dont le PGCD est 17.

Question 26 *

Trouver deux entiers positifs n et m différents de 47 et 2820 tels que $\mathrm{PGCD}(n, m) = 47$ et $\mathrm{ppcm}(n, m) = 2820$

Question 27 ***

Soient a et b entiers non nuls. On suppose que $a^2 - b^2 = 2916$ et $\mathrm{PGCD}(a, b) = 18$. Déterminer a et b.

Question 28 ***

En divisant le nombre a par 122 et par 125 on trouve le même quotient, et des restes respectifs de 52 et 40. Calculer a.

En divisant 6732 et 564 par un même nombre b on trouve les restes respectifs de 24 et 18. Quel peut être le nombre b ?

Question 29 ****

Si a et b sont premiers relatifs, non tous les deux nuls, trouver le $\mathrm{PGCD}(a^2 + b^2, a + b)$, en démontrant votre réponse.

CRITÈRES DE DIVISIBILITÉ

Critères de divisibilité

Soit n un nombre entier à $k+1$ chiffres, écrit en base dix sous la forme

$$r_k\, r_{k-1}\, r_{k-2}\, \cdots\, r_2\, r_1\, r_0$$

Développer un critère de divisibilité par 3 :

Développer un critère de divisibilité par 4 :

Développer un critère de divisibilité par 6 :

Développer un critère de divisibilité par 7 :

Développer un critère de divisibilité par 9 :

Développer un critère de divisibilité par 11 :

Question 30 *

Résoudre les exercices suivants en développant le critère de divisibilité approprié :

(a) Déterminer la plus grande puissance de 2 *qui divise chacun des nombres suivants :*

$$201984, \quad 1987776, \quad 89375744.$$

(b) Déterminer la plus grande puissance de 5 *qui divise chacun des nombres suivants :*

$$951675, \quad 1987705, \quad 8937500.$$

(c) Tester les nombres suivants pour la divisibilité par 3 *et* 9 *:*

$$3019071, \quad 5501100222, \quad 971022001.$$

(d) Tester les nombres suivants pour la divisibilité par 11 *:*

$$1127371, \quad 2790906437, \quad 1001001.$$

(e) Tester les nombres suivants pour la divisibilité par 7 *et par* 13 *:*

$$1912911, \quad 371293, \quad 491220639.$$

Question 31 *

On considère trois nombres dont l'écriture en base dix est abc, abb, acc. Montrer que la somme de ces trois nombres est un nombre divisible par 3

Question 32 *

On considère deux nombres dont l'écriture en base dix est cba et bba. Proposer un troisième nombre de trois chiffres uniquement formé avec les chiffres a, b, c pour que la somme des trois nombres soit divisible par 3.

NOMBRES PREMIERS, FACTEURS PREMIERS, PREMIERS ENTRE EUX

Question 33 *

En utilisant l'algorithme d'Euclide, trouver u et v tels que $185u + 401v = 1$.

Que peut-on dire de 185 et 401 ?

Question 34 *

Décomposer en produits de nombres premiers les entiers $119, 121, 123, 125, 127$

Faire de même avec $43, 143, 243, 343, 443$.

Question 35 suite à la page suivante…

Question 35 *

Décomposer en produits de facteurs premiers 1197 et 210. Retrouver ainsi leur PGCD et leur ppcm.

Faire de même avec 12740 et 168.

Question 36 *

Le nombre 3737 est-il premier ? Un nombre de la forme $abab$ peut-il être premier ? Justifier.

Question 37 ****

On considère deux sommes $A = 11a + 2b$ et $B = 18a + 5b$.

(a) Montrer que si 19 divise l'une des sommes, alors il divise l'autre aussi.

(b) On suppose que $\mathrm{PGCD}(a, b) = 1$, montrer que A et B ne peuvent avoir d'autres diviseurs communs que 1 et 19.

Question 38 **

Montrer que pour tout entier n les nombres $2n+1$ et $9n+4$ sont premiers entre eux.

Question 39 ***

Montrer que pour tout entier n la fraction est irréductible :

$$\frac{12n+1}{30n+2}$$

Question 40 ***

A quelle condition le PGCD de $2n+3$ et de $n+7$ est-il égal à 1 ?

Question 41 ***

Trouver le PGCD de $9n+4$ et $2n-1$ en fonction de n.

Question 42 **

Montrer que, pour tout entier p premier et $1 \leq k \leq p-1$, le nombre p divise le coefficient binomial C_p^k.

Coefficient Binomial

Les coefficients binomiaux, définis pour tous $n, k \in \mathbb{N}$, avec $k \leq n$, donnent le nombre de parties de k éléments dans un ensemble à n éléments. On les note $\binom{n}{k}$ («*k parmi n*») ou C_n^k («*combinaison de k parmi n*»).

Ils s'expriment ainsi à l'aide de la fonction factorielle :

$$\binom{n}{k} = C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

EQUATIONS DIOPHANTIENNES

L'équation Diophantienne $ax + by = c$

Soient a et b premiers entre eux, et $c = 1$. Le théorème de Bachet-Bézout affirme que :

Dans ce cas, une solution particulière (x_0, y_0) étant connue, l'ensemble de toutes les solutions est :

Si a et b ne sont pas premiers entre eux, alors :

Dans le cas général, si $\mathrm{PGCD}(a, b) \mid c$, alors :

autrement : ....

Question 43 *

Déterminer si les équations suivantes ont des solutions dans $\mathbb{Z}$. Dans le cas affirmatif, les expliciter.

(a) $3x + 2y = 4$

(b) $5x + 13y = 6$

(c) $504x + 1188y = 144$

EXTRAS

Question 44 ***

Expliquer comment l'algorithme d'Euclide peut être utilisé pour trouver un entier x tel que $a \cdot x - 1$ soit divisible par n, en supposant que a et n sont premiers relatifs.

Ensuite, si possible, trouver les entiers x tels que :

(a) $33x - 1$ *est divisible par* 100.

(b) $2048x - 1$ *est divisible par* 601.

(c) $270x - 1$ *est divisible par* 125.

Question 45 ***

Expliquer comment l'algorithme d'Euclide peut-être utilisé pour trouver un entier x tel que $a \cdot x - g$ est divisible par n, en supposant que $g = \mathrm{PGCD}(a, n)$.
Ensuite, si possible, trouver les entiers x tels que :

(a) $33x - 11$ *est divisible par* 121.

(b) $2048x - 4$ *est divisible par* 140.

(c) $270x - 14$ *est divisible par* 25.

Question 46 **

Etant donné que $5x = 6 \pmod 8$, calculer x.

Question 47 ****

Soit $m = 8$, et $r_1, r_2 \ldots, r_m$ des entiers tels que

$$\{[r_1], [r_2], \ldots, [r_m]\}$$

représente toutes les classes d'entiers modulo m. Decider s'il en est de même pour les ensembles suivants :

(a) $\{[r_1 + 1], [r_2 + 1], \ldots, [r_m + 1]\}$.

(b) $\{[2r_1], [2r_2], \ldots, [2r_m]\}$.

(c) $\{[5r_1], [5r_2], \ldots, [5r_m]\}$.

Question 48 ***

Soient a, b, k des entiers tels que $k > 0$ et au moins a ou b est non nul. Démontrez que

$$\mathrm{PGCD}(k \cdot a, k \cdot b) = k \cdot \mathrm{PGCD}(a, b).$$

Question 49 **

Soit p un nombre premier.

(a) Montrer que pour tout $r \geq 1$

$$x^2 = x \pmod{p^r} \implies x = 0, 1 \pmod{p^r}.$$

(b) Donner un exemple explicite d'un entier m *et d'un entier* $x \neq 0, 1 \pmod m$ *tel que* $x^2 = x \pmod m$.

Question 50 **

Montrer que $n^2 - 1$ est divisible par 8 pour tout entier *impair* n. Ne pas utiliser l'induction.

Question 51 **

Montrer qu'il n'existe pas d'entier n tel que $5 \mid (n^3 + n + 1)$. C'est à dire, montrer que $n^3 + n + 1$ n'est jamais divisible par 5.

Question 52 *

Trouver le dernier chiffre de 7^{100} en base 10.

Question 53 ***

Soient n et a deux entiers tels que $n = a^4$. En utilisant les congruences, déterminer en fonction de n toutes les possibilités pour le dernier chiffre de l'écriture décimale de a.

Question 54 **

Trouvez le nombre d'entiers n, vérifiant $0 \leq n \leq 25$ et tels que $n^2 + 3n + 2$ est divisible par 6.

Question 55 *

Montrez que si a est un entier positif, alors a et $a + 1$ sont premiers relatifs.

TRIVIA

Question 56 *

On note $[a]$ l'ensemble des entier X tels que $X = a \pmod 7$.

(a) Créer la table d'addition modulo 7 :

+	[0]	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]
[0]							
[1]							
[2]							
[3]							
[4]							
[5]							
[6]							

(b) Créer la table de multiplication modulo 7 :

$\times$	[0]	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]
[0]							
[1]							
[2]							
[3]							
[4]							
[5]							
[6]							

(c) Quel jour de la semaine avez-vous eu votre anniversaire cette année ?

(d) En tenant compte des années bissextiles, calculer le jour de la semaine où vous êtes né.e.s :

Question 57 *

Une année sur la planète Vénus dure 225 journées terrestres. Alrick est âgé de 13 ans et 83 jours. Dans la suite, ignorer les années bissextiles pour simplifier.

(a) Combien de jours faut-il attendre jusqu'à son prochain anniversaire vénusien ?

(b) Quel âge vénusien aura-t-il ?

Question 58 *

Ines regarde vers l'ouest, puis elle tourne de 1260° dans le sens horaire. Dans quelle direction regarde-t-elle ?

Question 59 **

Théo compte les bonbons dans sa poche. Quand il les divise en groupes de quatre, il lui reste deux bonbons en plus. Quand il les divise en groupes de cinq, il lui en reste un. Si Théo a plus de dix bonbons, quel est le plus petit nombre de bonbons qu'il pourrait avoir ?

Question 60 ***

Les entiers à deux chiffres compris entre 19 et 92 sont écrits l'un après l'autre pour former le grand entier

$$N = 192021 \cdots 909192.$$

On suppose que 3^k est la plus grande puissance de 3 qui est un facteur de N. Combien vaut k ?

Question 61 ***

Le 300^{eme} jour de l'année N est un mardi, et le 200^{eme} jour de l'année $N+1$ est encore un mardi. Quel jour de la semaine tombe le 100^{eme} jour de l'année $N-1$?