Intro — Spectre en dimension finie

$A \in \mathcal{M}_{d\times d}(\mathbb{C})$, $\Sigma(A) = \{$ valeurs propres de $A\}$

- λ v.p. $\overset{d}{\equiv}$ $A-\lambda$ pas injectif , ie $\exists\, x \neq 0$ tq $Ax = \lambda x$

  $\iff$ $A-\lambda$ pas bijectif

- $\mathcal{E}_\lambda^g = N(A-\lambda)$ = espace propre géométrique, $\dim \mathcal{E}_\lambda^g$ = multiplicité géo.
- $\mathcal{E}_\lambda = \bigcup_{m\geq 0} N(A-\lambda)^m = N(A-\lambda)^{m_\lambda}$ = espace propre algébrique, m_λ = multiplicité algébrique

$$\mathbb{C}^d = \bigoplus_{\lambda\in\Sigma(A)} \mathcal{E}$$

I – La théorie spectrale à travers le formalisme de la résolvante

Voir comment est construit la théorie spectral générale par l'analyse complexe.

$\mathcal{E}$ = Banach et $A \in \mathcal{B}(\mathcal{E})$

Rq: Théorie spectrale pour opérateurs non-bornés est basée sur celle des opérateurs bornés.

En dimension ∞ , inj. $\not\Leftrightarrow$ bij., donc moins simple, notion de vp plus suffisante

$\longrightarrow$ on travaille avec l'objet central de la résolvante :

Définition: $R_A(z) := (z-A)^{-1}$, $P(A) := \{ z$ tq $R_A(z)$ existe $\}$,

$\Sigma(A) := \mathbb{C}\setminus P(A)$

$A - z$ bijectif ($\Rightarrow R_A(z)$ continue par iso. de Banach)

Classification des valeurs spectrales:

$$\Sigma(A) = \Sigma_{\text{ponctuel}}(A) \amalg \Sigma_{\text{résiduel}}(A) \amalg \Sigma_{\text{continu}}(A)$$

$A-\lambda$ pas injectif,

$\boxed{\text{Ensemble des v.p.}}$

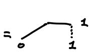
$A-\lambda$ injectif mais pas faiblement surj., i.e. image pas dense

$\boxed{R(\lambda) \text{ définie sur sev non-dense de } \mathcal{E}}$

$A-\lambda$ faiblement surj, inj. mais pas fortement inj
i.e. image dense strictement

$\boxed{R(\lambda) \text{ existe sur sev dense de } \mathcal{E} \text{ mais pas bornée}}$

$\mathcal{E} = \ell^2(\mathbb{N};\mathbb{C})$, $A(x_0, x_1, \cdots) = (0, x_0, \cdots)$	$\mathcal{E} = L^2([0,1];\mathbb{C})$, $Af(x) = a(x)f(x)$ où $a \in L^\infty([0,1];\mathbb{C})$
$\Sigma_r(A) = \mathbb{D}$, $\Sigma_c(A) = \mathbb{S}^1$, $\Sigma_p(A) = \emptyset$	$\Sigma(A) = a(\mathbb{R})$, $\Sigma_p(A) = \{\lambda \mid a \equiv \lambda$ presque qq part$\}$
	$\Sigma_c(A) = \{\lambda \mid \lambda-\varepsilon < a < \lambda+\varepsilon$ presque qq part$\}$

$a(x) =$ 

$\Sigma_p(A) = \{1\}$, $\Sigma_c(A) = [0,1)$

Propriétés :

2) Formule de la résolvante : produit = taux de variation :

$$-R(z)R(w) = \frac{R(z)-R(w)}{z-w}$$

1) Le spectre est compact $\subset D(0;\|A\|)$ $\Leftrightarrow$ A est borné

car i) {T inversible} ouvert dans $\mathcal{B}(E) \rightsquigarrow P(A)$ ouvert donc $\Sigma(A)$ fermé

ii) $|z| > \|A\| \Rightarrow z - A = z(1 - A/z)$, $\|A/z\| < 1$ donc inversible : $z \in P(A)$

Th : $R_A : P(A) \longrightarrow (\mathcal{B}(E), \|\cdot\|_{\mathcal{B}(E)})$ est holomorphe

Preuve : limite $w \to z$ dans la formule de la résolvante :

$$R'(z) = -R^2(z) \in \mathcal{B}(E)$$

Th : Le spectre est non-vide

Preuve : Si vide, $P(A) = \mathbb{C}$ et $R(z) = z^{-1}(1 - z^{-1}A)^{-1} = O(z^{-1})$

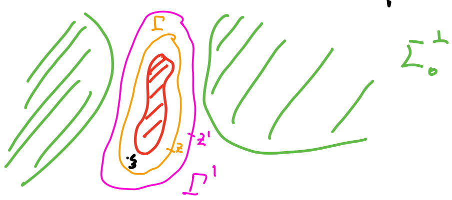
donc applica° holomorphe bornée sur le plan complexe

$\Rightarrow$ constante $\lightning$

II - Composantes connexes du spectre et points isolés

1) Composantes connexes

On s'intéresse à une cc. Σ_0 séparée du reste du spectre par un chemin Γ



On définit le projecteur spectral $P_0 := \frac{1}{2i\pi}\int_\Gamma R(z)dz$ et l'opérateur réduit $A_0 = \frac{1}{2i\pi}\int_\Gamma zR(z)dz$

Proposition : 1) P_0 est un projecteur, soient $\mathcal{E}_0 := R(P_0)$ et $\mathcal{E}_0^\perp := R(P_0^\perp)$, $P_0^\perp := 1 - P_0$

2) $\mathcal{E}_0$ est un sev stable de A, donc $A_0 = A_{|\mathcal{E}_0}$. Soit $A_0^\perp := A_{|\mathcal{E}_0^\perp}$

3) $\Sigma(A_0) = \Sigma_0$ et $R(z) = \underbrace{(z-A_0)^{-1} + (z-A_0^\perp)^{-1}}_{\text{abus de notation}} = R(z)P_0 + R(z)P_0^\perp$

holo sur $P \cup \Sigma_0^\perp$ — holo sur $P \cup \Sigma_0$

Preuve de 1)

$P_0 := \frac{1}{2i\pi}\int_\Gamma R(z)dz$, que vaut P^2 ?

$$
\begin{aligned}
P_0^2 &= \frac{1}{(2i\pi)^2}\int_{\Gamma\times\Gamma} R(z)R(z')\,dz\,dz' \\
&= -\frac{1}{(2i\pi)^2}\int_{\Gamma\times\Gamma'} \frac{R(z)-R(z')}{z-z'}\,dz\,dz' \\
&= \frac{1}{2i\pi}\int_\Gamma R(z)\underbrace{\left(\frac{1}{2i\pi}\int_{\Gamma'}\frac{dz'}{z'-z}\right)}_{=\mathrm{Ind}_{\Gamma'}(z)=1} dz + \frac{1}{2i\pi}\int_{\Gamma'} R(z')\underbrace{\left(\frac{1}{2i\pi}\int_\Gamma \frac{dz}{z-z'}\right)}_{=\mathrm{Ind}_\Gamma(z')=0} dz \\
&= P_0
\end{aligned}
$$

Γ' plus grand
formule résolvante

Preuve de 2)

$$P_0A = \frac{1}{2i\pi}\int_\Gamma \underbrace{AR(z)}_{1+zR(z)}dz = \frac{1}{2i\pi}\int_\Gamma zR(z)\,dz = AP_0$$

Preuve de 3)

Soit ξ entre Γ et Σ_0

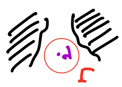
$$R(z) = \int () \, d\xi$$

$$R(\xi) P_0 = \frac{1}{2i\pi} \int_\Gamma R(\xi) R(z) \, dz$$
$$= \frac{-1}{2i\pi} \int_\Gamma \frac{R(\xi) - R(z)}{\xi - z} \, dz = R(\xi) + \frac{1}{2i\pi} \int_\Gamma \frac{R(z)}{\xi - z} \, dz$$

donc $R(\xi) P_0^\perp = \frac{1}{2i\pi} \int_\Gamma \frac{R(z)}{z - \xi}$ holomorphe pour $\xi \in \Sigma_0^\perp$

Ainsi $R(z) = R_0(z) + R_0^\perp(z) \in \mathcal{B}(E_0) + \mathcal{B}(E_0^\perp)$

2) Point isolé

Considérons λ isolée 

$$R(\lambda + h) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} C_n h^n \quad (\text{DSL}) \quad \text{où} \quad C_n = \frac{1}{2i\pi} \int_\Gamma \frac{R(z)}{(z - \lambda)^{n+1}} dz$$

Quelle relation entre les C_n ?

$$C_n C_m = \frac{1}{(2i\pi)^2} \int_{\Gamma \times \Gamma'} \frac{R(z) R(\omega)}{(z - \lambda)^{n+1} (\omega - \lambda)^{m+1}} \, dz \, d\omega$$
$$= \left[\text{formule de la résolvante, résidus de } \xi \mapsto (\xi - \zeta)^{-\ell} \right]$$
$$= \left(\delta_{n \geq 0} + \delta_{m \geq 0} - 1 \right) C_{n+m+1}$$

Cette rela° contient bcp d'infos, dont $P = P^2 = C_{-1}$, $C_{-1-n} = Q^n = C_{-2}^n$, $C_n = S^{n+1} = C_0^{n+1}$

$E^\perp := R(P^\perp)$, $PQ = QP = Q$ $PS = SP = 0$

ainsi $R(\lambda + h) = \frac{1}{h} \sum_{n=0}^\infty h^{-n} Q^n + \frac{P}{h} + S \sum_{n=0}^\infty h^n S^n$ $\mathcal{B}(E) \oplus \mathcal{B}(E^\perp)$

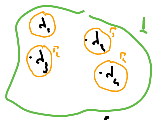
$$= \frac{1}{h} \left(1 - Q/h\right)^{-1} + \frac{P}{h} + S(1 - hS)^{-1} \quad \mathcal{B}(E) \oplus \mathcal{B}(E^\perp)$$

$$\Sigma(Q) = 0 \qquad \Sigma(S) = \Sigma(A) \setminus \{\lambda\}$$

Si $\dim E < \infty$, c-à-d $\lambda \in \Sigma_{\text{discret}}(A)$, alors

$\operatorname{rg} Q < \infty$ et $\sum_{n=0}^{\infty} (Q/h)^n$ cv donc $Q^N = 0$ pour N assez grand $(N > \dim E)$

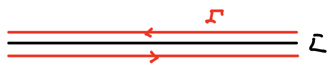
<u>Applica°</u>: Décomposi° de Dunford



$$A = \frac{1}{2i\pi}\int_{\Gamma} z R(z)\,dz = \sum_{\lambda \in \Sigma(A)} \frac{1}{2i\pi}\int_{\Gamma_\lambda} z R(z)\,dz = \sum_{\lambda} (\lambda P_\lambda + Q_\lambda) = \text{diago} + \text{nilpotent}$$

III - Ouvertures

1) Formalisme de la mesure spectrale



$$A = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \Im m\{(\lambda + i\varepsilon) R(\lambda + i\varepsilon)\}\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \lambda\, d\mu(\lambda)$$

Décomposition $\mu = \mu_p$: valeurs propres $\sum_{\lambda\, vp} \delta_\lambda \Pi_\lambda$

$+\mu_{ac}$: $d\mu_{ac}(\lambda) = \rho(\lambda)\,d\lambda$, $\rho \in L^1(\mathbb{R})$

$+\mu_{sc}$: ☹

<u>Théorie de Mourre</u>:

(Putnam, 56) $[A, iT] \geq |\Phi|^2$ alors $|\langle \Phi x ; \Im m\, R(\lambda + i\varepsilon)\, \Phi x\rangle| \leq 4\|T\|\,\|f\|^2 \Rightarrow$ spectre a.c. ou $\emptyset$

(Mourre, 80's) Généralise pour considérer des portions de spectre et mq au plus nb fini de vP

(?) Permet d'étendre R dans $C^{0,\alpha}(\mathbb{C} ; \mathcal{B}(E^- ; E^+))$

2) Calculs fonctionnels

- holomorphe : Si Γ ne touche pas $\Sigma(A)$ et f holomorphe près de Γ

$$f(A) = \frac{1}{2i\pi}\int_{\Gamma} f(z) R(z)\,dz$$

$f \mapsto f(A)$ compatible avec $+$ et $\times$

- Continu : si A normal, $f \mapsto f(A)$ $*$-hom. de $C(\Sigma ; \mathbb{C})$ isométriq

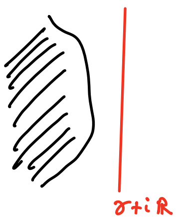
déf pour les poly. puis extension à $C(\Sigma ; \mathbb{C})$ par Stone-Weierstrass

- Borélien : si A autoadjoint, " ——— " $L^\infty(\Sigma ; \mathbb{C})$ par $f(A) = \int_{\mathbb{R}} f(\lambda)\, d\mu(\lambda)$

<u>Application</u> : 1) Définir A^α où $\alpha \in \mathbb{R}$, $\log A$, ... si $\Sigma(A) \subset (0, \infty)$

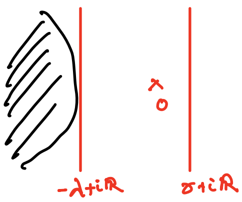
2) $\mathbb{1}_E(A)^2 = (\mathbb{1}_E^2)(A) = \mathbb{1}_E(A)$

3) Sol$^{\circ}$ d'équa$^{\circ}$ d'évolu$^{\circ}$ (E) : $\begin{cases} u' = Au \\ u(0) = u_{in} \end{cases}$ est $u(t) = e^{tA} u_{in}$



$$e^{tA} = \frac{1}{2i\pi} \int_\Gamma e^{zt} R(z)\, dz = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma + i\mathbb{R}} e^{zt} R(z)\, dz = \mathcal{L}^{-1}[R](t)$$

Estima$^{\circ}$ pour R sur $\gamma + i\mathbb{R}$ $\rightsquigarrow$ $e^{tA} = O(e^{\gamma t})$

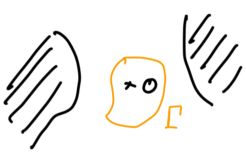


$$e^{tA} = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma + i\mathbb{R}} e^{zt} R(z)\, dz = \mathrm{Res}(z \mapsto e^{zt} R(z) ; 0) + \frac{1}{2i\pi} \int_{-\lambda + i\mathbb{R}} e^{zt} R(z)\, dz$$
$$= P_{N(A)} + O(e^{-\lambda t})$$

Or $N(A)$ = équilibres de (E), donc signifie retour à l'équilibre exponentiel

3) <u>Perturbation de valeur propre</u> :

$A_\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} A$ et 0 est une vp isolée de A



$$P = \frac{1}{2i\pi} \int_\Gamma R(z)\, dz$$

Si on montre que $\begin{cases} R_\varepsilon \text{ est bien déf sur } \Gamma \text{ pour } \varepsilon \text{ assez petit} \\ R_\varepsilon \longrightarrow R \text{ unif}^{t} \text{ sur } \Gamma \end{cases}$

alors $P_\varepsilon = \frac{1}{2i\pi} \int_\Gamma R_\varepsilon(z)\, dz \longrightarrow \frac{1}{2i\pi} \int_\Gamma R(z)\, dz = P$

Si on resserre Γ : ε encore + petit

$\Rightarrow$ vp$(\varepsilon) \longrightarrow 0$ donc continues

<u>Lemme (Kato)</u> : Si P et Q projections tq $\|P - Q\| < 1$, alors $R(P) \simeq R(Q)$

et U dépend analytiquement de P et Q

<u>Conséquence</u> : Pour $\varepsilon \ll 1$, A_ε a autant de vp que A dans Γ comptées w/ multiplicité

Etape suivante : distinguer ces VP $\rightsquigarrow$ $U_\varepsilon^\varepsilon : E_0 \to E_{0,\varepsilon}$, $\mathcal{A}_\varepsilon = \underbrace{\overset{\text{isole les pôles de } 0}{U_\varepsilon^{-1} A_\varepsilon U_\varepsilon}}_{B(E_0)} \xrightarrow{\text{ssi } 0 \ \frac{1}{2}\text{-sple}} \mathcal{A}$