TP n°4 : Méthode du simplexe pour les problèmes de première espèce

OBJECTIF : Dans cette séance on s'intéressera à l'application de la méthode du simplexe aux problèmes de *première espèce*. On commencera par appliquer de manière extensive la transformation de GAUSS-JORDAN, puis on utilisera le critère de DANTZIG pour sélectionner les pivots. Enfin le phénomène de cyclage est illustré.

1 Recherche extensive des solutions de base

Dans le TP précédent, il n'était pas encore question de la méthode du simplexe. On appliquait la transformation de GAUSS-JORDAN à une matrice intégrant uniquement les contraintes. Lorsqu'on ajoute à cette matrice une ligne associée à la fonction de coût, on obtient à chaque itération l'expression de celle-ci en fonction des variables hors base. Il est dès lors possible d'identifier simplement le(s) sommet(s) du convexe des contraintes correspondant au maximum.

Voici ici une implémentation possible de la fonction `pivot`

```python
# la fonction pivot
def pivot(M,i,j):
    # M est une np.array (2 dimensions)
    # i indice de la ligne
    # indice de la colonne
    N = M.copy()
    l,c = np.shape(N)
    for k in np.arange(l):
        if k==i : # on est sur la ligne de i
            N[k,:] = M[k,:]/M[k,j] # on normalise la ligne pour avoir 1 en (i,j)
        else:
            # on soustrait aux lignes pour annuler au dessus et en dessous du pivot
            N[k,:]=M[k,:] - M[k,j]/M[i,j]*M[i,:]
    return N
```

Exercice 1 On s'intéresse au problème d'optimisation linéaire suivant :

$$\text{Maximiser } Z_1(x,y) = 2x + y,\quad \left\{\begin{array}{ccccc} x & + & 2y & \leqslant & 8 \\ x & + & y & \leqslant & 5 \\ 9x & + & 4y & \leqslant & 36 \\ & & x,y & \geqslant & 0. \end{array}\right. \tag{1}$$

1. Reformulation du problème
   - Mettre ce problème sous forme standard $AX = b$ en introduisant les variables d'écart e_1, e_2, e_3.
   - En déduire une solution de base. Est-elle réalisable ?
2. Construction avec python de la matrice intégrant contraintes et fonction objectif.
   - Définir le vecteur $v = (2,1,0,0,0) \in \mathbb{R}^5$.
   - Construire la matrice $M \in \mathcal{M}_{4,6}(\mathbb{R})$ définie par bloc de la manière suivante :

   $$M = \begin{pmatrix} v & 0 \\ A & b \end{pmatrix}$$

   - La matrice M ainsi définie contient donc dans les lignes d'indices $2 \leqslant i \leqslant 4$ la décomposition des vecteurs $(V_1, V_2, \epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3)$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Elle a pour première ligne les prix marginaux associés aux variables hors-base. *Remarque : Attention ! la convention change donc par rapport au cours.*

3. Recherche d'optimum à tâtons.
   - En utilisant la fonction `pivot`, définie dans le TP3, appliquer *à la matrice M* les transformations de Gauss-Jordan qui donnent la décomposition des vecteurs $V_1, V_2, \epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$ dans les bases successives :
   $$\begin{gathered}\{V_2,\epsilon_2,\epsilon_3\},\ \{V_2,\epsilon_1,\epsilon_3\},\ \{V_2,\epsilon_1,\epsilon_2\}\\ \{V_1,\epsilon_1,\epsilon_2\},\ \{V_1,\epsilon_1,\epsilon_3\},\ \{V_1,\epsilon_2,\epsilon_3\}\\ \{V_1,V_2,\epsilon_3\},\ \{V_1,V_2,\epsilon_2\},\ \ \{V_1,V_2,\epsilon_1\}\ \ .\end{gathered}$$
   Il suffira d'identifier l'indice du pivot M_{ij} correspondant à cette transformation. *Pour la détermination de i, prendre garde au fait que l'on a ajouté une ligne.*
   - Après chaque transformation, donner une solution de base, préciser si elle est admissible ou non, donner la valeur de Z associée.
   - La manière de procéder vous semble-t-elle optimale ?

2 Utilisation du critère de Dantzig

Ainsi, lorsqu'on parcourt au hasard les solutions de base, on finit par tomber (sauf cas particulier) sur l'*optimum* correspondant à un sommet du convexe des contraintes. Mais ce choix aléatoire du pivot n'est pas satisfaisant. La méthode du simplexe repose sur deux critères de sélection, à savoir le choix de la variable entrante et celle de la variable sortante. On note (**D1**) le premier critère, qui revient à choisir la **colonne** du pivot à partir des prix marginaux des variables hors base. Le second critère est noté (**D2**) , et permet de choisir la **ligne** du pivot.

On rappelle que le critère de Dantzig fournit deux tels critères :

(**D1**) on choisit la colonne i parmi celles associées à un prix marginal *strictement positif* ;

(**D2**) on choisit la colonne i parmi celles associées à une constante renormalisée positive minimale, c'est-à-dire $b_i/a_{i,j}$ positif et minimal.

Si plusieurs choix sont possibles, alors on considère le plus petit indice pour le choix de la ligne ; pour le choix de la colonne, selon le critère de Bland on choisit à nouveau l'indice le plus petit, et selon le critère naturel celui associé au prix marginal le plus élevé.

Exercice 2

On s'intéresse au problème d'optimisation linéaire suivant :

$$\text{Maximiser } Z(x,y,z) = 20x + 18y + 15z,\qquad \left\{\begin{array}{ccccccc} 2x & + & 2y & + & z & \leqslant & 6000\\ x & + & 2y & + & 2z & \leqslant & 7000\\ x & + & y & + & z & \leqslant & 4000\\ & & & & x,y,z \geqslant & 0. & \end{array}\right. \tag{2}$$

1. Première itération
   - Définir la matrice M suivant le même principe que dans l'exercice 1.
   - À l'aide des critères (**D1**) et (**D2**) de Dantzig, déterminer les indices i et j du pivot préconisés par la méthode du simplexe, correspondant respectivement à la ligne et à la colonne du pivot.
   - Appliquer la fonction `pivot` à la matrice M pour les indices i et j. En déduire une solution de base. Correspond-elle au maximum de Z ? Pourquoi ?
2. Itérations suivantes
   - Rappeler le critère d'arrêt permettant de terminer les itérations sur une solution optimale du problème.
   - Appliquer la fonction `pivot` jusqu'à ce que le critère d'arrêt soit satisfait.
   - Donner la valeur du maximum. Pour quelle(s) valeur(s) des variables x, y, z est-il atteint ? Combien d'itérations la procédure a-t-elle nécessité ?

Exercice 3 Appliquer la méthode du simplexe au problème d'optimisation linéaire de première espèce suivant :

$$\text{Maximiser } Z(x,y,z) = 8x + 5y + 7z,$$
$$\begin{cases} x + y \leqslant 30 \\ x + z \leqslant 40 \\ 2x + 3y + z \leqslant 100 \\ x + y - 2z \leqslant 60 \\ x, y, z \geqslant 0. \end{cases} \tag{3}$$

Exercice 4 Appliquer la méthode du simplexe au problème d'optimisation linéaire de première espèce suivant :

$$\text{Maximiser } Z(x,y,z,t) = 20x + 27y + 5z + 6t,$$
$$\begin{cases} x + z + \frac{1}{2}t \leqslant 4 \\ 2x + y + \frac{14}{5}z - 2t \leqslant 5 \\ 3x + 2y + z \leqslant 6 \\ 4x + 3y + 2z + t \leqslant 7 \\ x, y, z, t \geqslant 0. \end{cases} \tag{4}$$

On testera le critère naturel et le critère de Bland. Comparer le nombre d'itérations obtenus.

3 Cyclage

Exercice 5 On considère le problème d'optimisation linéaire suivant

$$\text{Maximiser } Z(x,y,z,t) = 10x - 52y - 9z - 24,$$
$$\begin{cases} x/2 - 11y/2 - 5z/2 + 9t \leqslant 0 \\ x/2 - 3y/2 - z/2 + t \leqslant 0 \\ x \leqslant 1 \\ x, y, z, t \geqslant 0. \end{cases} \tag{5}$$

1. Effectuer avec python 7 itérations standards de l'algorithme du simplexe.
2. Poursuivre, en appliquant le critère naturel. Qu'observe-t-on ?
3. Reprendre la question précédente avec le critère de Bland. Conclure.