Sorbonne Université
Campus Pierre et Marie Curie
UE 3M290

Licence de Mathématiques L3
Année 2018–2019

Interrogation

Durée : 1 heure. Note : $CC1 = \min\{CC1_{ecrit}, 10\}$

Rappel de notations :
On utilise l'abréviation i.i.d pour signifier indépendantes et identiquement distribuées.

Exercice 1. ***Echauffement - Vecteur gaussian*** (2 points)
Soit (X, Y) un vecteur aléatoire sur $\mathbb{R}^2$ dont la densité est donnée par

$$f_{X,Y}(x, y) = \frac{1}{2\pi} \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{2}\right).$$

1. Déterminer la loi marginale de X et celle de Y. Sont-elles indépendantes ?
2. Déterminer la loi de $(X^2 + Y^2)$.

Exercice 2. ***Loi de Cauchy*** (2 points)
Soit X une variable aléatoire réelle de densité $f_X(x) := \frac{1}{\pi(1+x^2)}$.

1. Déterminer la loi de $1/X$.
2. Montrer que $\forall 0 < \varepsilon < 1, \mathbb{E}[|X|^\varepsilon] < \infty$.

Exercice 3. ***Loi de Poisson*** (3+1 points)
Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes de loi de Poisson de paramètres λ_1 et λ_2.

1. Calculer l'espérance et la fonction génératrice de $(X_1 + X_2)$.
2. Soit Y une variable aléatoire de loi de Bernoulli de paramètre p et indépendante que (X_1, X_2). On définit Z par
$$Z(\omega) = \begin{cases} X_1(\omega) & \text{si } Y(\omega) = 1 \\ X_2(\omega) & \text{si } Y(\omega) = 0. \end{cases} \tag{1}$$
Déterminer la loi de Z et calculer $\mathbb{E}[Z]$.

Exercice 4. ***Maximum de lois uniformes*** (4+1 points)
Soit $(X_i)_{i\geq 1}$ une suite de variables aléatoires i.i.d qui suit la loi uniforme sur $[0, 1]$. On définit le maximum des n premières variables

$$\forall n \in \mathbb{N}^+, \quad M_n = \max_{1\leq i\leq n} X_i.$$

1. Calculer la fonction de répartition F_{M_n} et la fonction de densité f_{M_n} de M_n.
2. Calculer $\mathbb{E}[M_n]$ et $\mathrm{Var}[M_n]$. (Indication : On pourra utiliser f_{M_n}).
3. $\forall c \in]0, 1[$, calculer $F_{M_n}\left(1 - \frac{c}{n}\right)$. Que vaut la limite $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(M_n \leq 1 - \frac{c}{n}\right)$?

Exercice 5. ***Inégalité de Paley–Zygmund*** (3 points)
Soit $Z \geq 0$ une variable aléatoire de variance finie, et soit $0 < \theta < 1$, on veut démontrer

$$\mathbb{P}[Z \geq \theta\mathbb{E}[Z]] \geq (1-\theta)^2 \frac{\mathbb{E}[Z]^2}{\mathbb{E}[Z^2]},$$

par trois étapes :

1. Rappeler l'inégalité de Cauchy-Schwartz.
2. Appliquer l'inégalité de Cauchy-Schwartz sur Z^2 et $\mathbf{1}_{\{Z\geq\theta\mathbb{E}[Z]\}}$.
3. Conclure l'inégalité.