TD 7 : Lemme de Borel-Cantelli

Une étoile désigne un exercice important.

Exercice 1. Soit $(A_n)_{n\geq 1}$ une suite d'événements sur un espace de probabilité Ω. On note $\liminf A_n$ l'événement
$$\bigcup_k \bigcap_{n\geq k} A_n$$
et on note $\limsup A_n$ l'événement
$$\bigcap_k \bigcup_{n\geq k} A_n\,.$$

1. Montrer que pour tout k,
$$\mathbb{P}(\bigcap_{n\geq k} A_n) \leq \inf_{n\geq k} \mathbb{P}(A_n) \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(\bigcup_{n\geq k} A_n) \geq \sup_{n\geq k} \mathbb{P}(A_n)\,.$$
2. En déduire les deux inégalités suivantes :
$$\mathbb{P}(\liminf A_n) \leq \liminf \mathbb{P}(A_n) \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(\limsup A_n) \geq \limsup \mathbb{P}(A_n)\,.$$
3. Déterminer les quantités intervenant dans 2. lorsque $\Omega = \{-1; +1\}$, $\mathbb{P}(\{-1\}) = 1/4$, $\mathbb{P}(\{+1\}) = 3/4$, $A_n = \{(-1)^n\}$.

Exercice 2. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de v.a. indépendantes de même loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0, 1[$: $\mathbb{P}(X_n = 1) = p$, $\mathbb{P}(X_n = 0) = 1 - p$.

1. Montrer qu'il y a presque sûrement une infinité de n tels que $X_n = 1$.
2. Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit l'événement $A_n = \{X_n = X_{n+1} = \cdots = X_{2n-1} = 1\}$. Montrer que p.s. il n'y a qu'un nombre fini de A_n qui sont réalisés.

⋆ **Exercice 3.** *Loi des grands nombres L^4* Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. avec $E[X_n] = 0$, et admettant un moment d'ordre 4 fini. On note $m_4 := \mathbb{E}[(X_1)^4] < +\infty$, et $\sigma^2 = \mathbb{E}[(X_1)^2] < +\infty$. On pose $S_n = X_1 + \ldots + X_n$.

1. Calculer $E[(S_n)^4]$.
2. En déduire une majoration de $\mathbb{P}\big(|\frac{1}{n}S_n| \geq \varepsilon\big)$ pour tout $\varepsilon > 0$.
3. Conclure que pour tout $\varepsilon > 0$, $\mathbb{P}\big(\limsup_{n\to\infty} |\frac{1}{n}S_n| > \varepsilon\big) = 0$, et en déduire que $\mathbb{P}$-p.s. $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}S_n = 0$ $(= \mathbb{E}[X_1])$.

⋆ **Exercice 4.** Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoire indépendantes, de loi exponentielle de paramètre 1.

1. Montrer que, pour tout $\varepsilon > 0$, $\sum_{n\geq 1} \mathbb{P}(X_n > \varepsilon) = +\infty$. En déduire que presque sûrement, $\liminf_{n\to\infty} X_n = 0$.
2. Étudier selon les valeurs de α la convergence de la série $\sum_{n\geq 1} \mathbb{P}(X_n \geq \alpha \log n)$.
3. En déduire que presque sûrement on a, $\limsup_{n\to\infty} \left(\frac{X_n}{\log n}\right) = 1$.

Exercice 5. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de v.a. à valeurs dans $\mathbb{N}$, indépendantes et de même loi. Montrer qu'on a les deux cas suivants :

— ou bien $E(|X_1|) < +\infty$ et alors $\mathbb{P}(\limsup \{|X_n| \geq n\}) = 0$.

— ou bien $E(|X_1|) = +\infty$ et alors $\mathbb{P}(\limsup \{|X_n| \geq n\}) = 1$.

Exercice 6. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de v.a. indépendantes à valeur dans $\{-1, 1\}$, de même loi : $\mathbb{P}(X_n = 1) = p$, $\mathbb{P}(X_n = -1) = 1 - p$ pour un $p \in]0, 1[$ fixé. On note $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$ et $S_0 = 0$.

1. Pour $n \in \mathbb{N}$, calculer $\mathbb{P}(S_n = 0)$.
2. Etudier $\sum \mathbb{P}(S_n = 0)$. Que peut-on en conclure ?

Exercice 7. On reprend les notations de l'exercice 6 avec $p = 1/2$. On veut montrer que pour tout k, p.s. $S_n = k$, infiniment souvent (où $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$ et $S_0 = 0$).

1. On a (cf. Exercice 1.6) $\sum \mathbb{P}(S_n = 0) = +\infty$. Peut-on appliquer Borel-Cantelli ?
2. On pose $q_j = \mathbb{P}(\sup_{n\geq 0} S_n \geq j)$ pour tout $j \in \mathbb{Z}$. En envisageant les deux valeurs possibles de X_1, montrer que $q_j = (q_{j-1} + q_{j+1})/2$.
3. En déduire que $q_j = 1$ pour tout $j \geq 0$, et que $\mathbb{P}(\limsup S_n = +\infty) = 1$.
4. Montrer que $\mathbb{P}(\liminf S_n = -\infty) = 1$.
5. Montrer que pour tout k, p.s. $S_n = k$, infiniment souvent.

Exercice 8. Soient $X_1, X_2, \ldots$ des v.a. i.i.d. réelles à densité. On pose $A_k = \{X_k > \max_{1\leq i\leq k-1} X_i\}$ l'événement qui exprime que le record est battu au temps k.

1. Reprendre l'exercice 5.**??** pour montrer que $\mathbb{P}(A_k) = \frac{1}{k}$.
2. Montrer que les événements $(A_k)_{k\geq 1}$ sont indépendants.
3. $R_n = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{1}_{A_k}$ le nombre de fois que le record a été battu au temps n. Montrer que $R_n \to +\infty$ $\mathbb{P}$-p.s.
4. On parle de *double-records* si le record est battu à l'instant k, et de nouveau battu à l'instant $k + 1$. Montrer que p.s. il n'y a qu'un nombre fini de double-records.

Exercice 9. Soient $X_1, X_2, \ldots$ des variables de Bernouilli *indépendantes* de paramètre $1/2$.

On considère la variable aléatoire

$$\begin{aligned} L_n &= \text{longueur maximale d'une séquence de 1 parmi } X_1, \ldots, X_n \\ &= \max\left\{k \; ; \; \exists 1 \leq i \leq n - k + 1, X_i = X_{i+1} = \cdots = X_{i+k-1} = 1\right\} \end{aligned}$$

1. Montrer que, pour tout $k \geq 1$, $\mathbb{P}(L_n < k) \leq \left(1 - \frac{1}{2^k}\right)^{\lfloor n/k \rfloor}$.
   Indication : découper l'intervalle $[\![1, n]\!]$ en $\lfloor n/k \rfloor$ intervalles de longueur k, et un intervalle de longueur inférieure à k.
2. Pour tout $\varepsilon > 0$, on définit $A_n^\varepsilon = \{L_n < (1 - \varepsilon) \log_2 n\}$ ($\log_2 n = \ln n / \ln 2$). Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, p.s. il n'y a qu'un nombre fini de A_n^ε réalisés.
3. En déduire que p.s., $\liminf_{n\to\infty} \frac{L_n}{\log_2 n} \geq 1$.
4. Montrer que pour tout $k \geq 1$, $\mathbb{P}(L_n \geq k) \leq n \times \frac{1}{2^k}$.
5. Montrer que, pour tout $\varepsilon > 0$, $\mathbb{P}(L_n \geq (1 + \varepsilon) \log_2 n) \to 0$ quand $n \to \infty$. Peut-on appliquer le Lemme de Borel-Cantelli ?
   On a montré – avec la question 3. – que $\frac{L_n}{\log_2(n)}$ converge vers 1 en probabilité. Pour montrer la convergence $\mathbb{P}$-p.s. il faut utiliser une astuce : considérer des sous-séquences.
6. Soit $\varepsilon > 0$. On définit la séquence $n_j = \lfloor j^{2/\varepsilon} \rfloor$ pour $j \geq 1$. Montrer que p.s., il n'y a qu'un nombre fini de j tels que $L_{n_j} \geq (1 + \varepsilon) \log_2(n_j)$.
7. Montrer que $\limsup_{n\to\infty} \frac{L_n}{\log_2 n} = \limsup_{j\to\infty} \frac{L_{n_j}}{\ln n_j}$ (le long de la sous-séquence n_j).
   Indication : observer que pour $n \in [\![n_{j-1}, n_j]\!]$ on a $L_{n_{j-1}} \leq L_n \leq L_{n_j}$, et utiliser que $\ln(n_j)/\ln(n_{j-1}) \to 1$ quand $j \to \infty$.
   En déduire que p.s. $\limsup_{n\to\infty} \frac{L_n}{\log_2 n} \leq 1$.
8. Conclure.