目录

关于Onsager猜想的一些进展

顾陈琳

学号：10302010022

专业：数学与应用数学

摘要： 不可压缩粘滞流体上的能量会有耗散，然而Onsager在研究湍流时发现，即使当粘滞系数趋近于0，流体的能量仍然可能不守恒。进一步的研究发现，能量是否守恒和速度场本身也有关系，速度场不一定具有非常好的可微性。Onsager提出了关于能量守恒是流体可微性的猜想，认为在Holder系数大于$\frac{1}{3}$时，能量是守恒的。本文总结了[E. Weinan]和[A. Cheskidov]关于解在Besov空间中，能量守恒的研究成果，以及[A. Cheskidov]中构造的例子。在最后，给出了关于这个这个例子，能量耗散的优化的数值计算。

关键字: 流体力学，Onsager猜想，函数空间，Littlewood-Paley定理

第一章　引言

在流体力学中，有Navier-Stokes方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (u \cdot \bigtriangledown)u = - \bigtriangledown p + \nu \triangle u \tag{1.1}$$

$$\tag{1.2}$$

其中ν是粘滞系数，u是速度场，p是压力，当流体是不可压缩时，加入散度为零的条件

$$\bigtriangledown \cdot u = 0 \tag{1.3}$$

当粘滞系数为0时，即为Euler方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (u \cdot \bigtriangledown)u = - \bigtriangledown p \tag{1.4}$$

$$\bigtriangledown \cdot u = 0 \tag{1.5}$$

我们假设流体的区域是全空间。当$u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$时，利用简单的分步积分，在等式的两边乘上$u$做能量积分得到

$$\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3} |u(\cdot,t)|^2 dx - \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3} |u(\cdot,0)|^2 dx = \nu \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} (\triangle u \cdot u) dxds = -\nu \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla \times u|^2 dxds$$

从这里我们看到，当有粘滞系数时，能量是耗散的。特别地，当粘滞系数为0时，有能量守恒，即任意时刻t：

$$\int_{\mathbb{R}^3} |u(t)|^2 dx = \int_{\mathbb{R}^3} |u_0|^2 dx$$

以上情况均在光滑解的意义下讨论。然而，自然界中的流体用光滑函数来描述不一定合适。在[L. Onsager]研究湍流的文献中，提到这样一段话

> "It is of some interest to note that in principle, turbulent dissipation as described could take place just as readily without the final assistance by viscosity. In the absence of viscosity, the standard proof of the conservation of energy does not apply, because the velocity field does not remain differentiable!"

也就是说，在实验中，随着粘滞系数的消失，能量仍然并不一定守恒，原因在于能量守恒和速度场本身也有关系，速度场可能是不可微的，只能作为弱解存在。[G. L. Eyink1]中提到了，Onsager本人猜想解应当在$Hölder$空间$C^{\alpha}(\mathbb{R})^3$中，当$\alpha > \frac{1}{3}$时能量守恒，而当$\alpha < \frac{1}{3}$时，能量是耗散的。

在[G. L. Eyink2]中，对此问题做了早期探索，在[E. Weinan]中，在Besov空间上的一类函数的情况做出了肯定回答。在[J. Duchon]中，对该问题在Soblev空间中做了一些探讨。最近，[A. Cheskidov]在更进一步的结果。并且构造了一个能量流出不为零的反例。当然，因为这个例子并不是Euler方程的解，所以Onsager猜想还没有完全解决。

本文总结了之前的一些经典结果。在第三章总结[E. Weinan]的结果，在第四章阐述最近[A. Cheskidov]的结果。在第五章给出[A. Cheskidov]一文中构造的精妙反例，在这一章的最后一小节对这个反例的计算进行了一点点优化，并给出了MATLAB计算了这个例子能量耗散的速度。

第二章　准备工作

第 1 节　磨光算子

设$\varphi \in C_0^{\infty(\mathbb{R}^n)}$并且满足$\int_{\mathbb{R}^n} \varphi dx = 1$，令$\varphi_\delta = \frac{1}{\delta^n}\varphi(\frac{\cdot}{\delta})$ 那么有$\int_{\mathbb{R}^n} \varphi_\delta dx = 1$ 对某个局部可积函数f进行磨光$f_\delta = f * \varphi_\delta$ 由恒等逼近的性质可知，如下两条性质

性质2.1. *φ定义如上，若$f \in L^p(\mathbb{R}^n)$，那么$f_\delta \to^{L^p} f$。*

性质2.2. *φ定义如上，若f局部可积，且在某个点x连续，那么$f_\delta(x) \to f(x)$*

第 2 节　二进制分解和Littlewood-Paley定理

本小节内容可以参考[L. Grafakos]第五章。考察Schwartz空间$\mathcal{S}$，Schwartz空间上的函数χ满足

$$\sup |x^\beta(\partial^\alpha \chi)| < +\infty$$

在Schwartz空间上可以做Fourier变换并且像的逆变换得到的就是原像。

我们将Schwartz空间的对偶空间称为缓增分布$\mathcal{S}'$。缓增分布的空间非常大，一个函数如果增长速度至多是多项式增长的话，就在缓增分布中。在广义函数的理论中，一些运算例如求导、Fourier变换、卷积都可以定义在缓增分布上。

令$\chi \in C_0^\infty$,满足$supp\chi \subset B(0,1)$，并且$\chi(\xi) = 1$，当满足$\xi \in B(0, \frac{1}{2})$时。构造$\varphi(\xi) = \chi(\frac{\xi}{2}) - \chi(\xi)$，那么$\varphi$满足$supp\varphi \in B(0,2)\backslash B(0,1)$，即$\varphi$的支撑集是一个环形区域。对$\varphi$做伸缩变换得到$\varphi_j(\xi) = \varphi(\frac{\xi}{2^j})$，那么有如下恒等式

$$1 = \chi(\xi) + \sum_{j\geq 0} \varphi_j(\xi)$$

对于任意的ξ，上述式子的右边实际上只是一个有限和，故不存在收敛问题。

用这个式子，对缓增分布$\mathcal{S}'$上的一个函数进行频率分解

$$\Delta_j f = (\hat{f}(\xi)\varphi_j(\xi))\check{} \tag{2.1}$$

$$\Delta_{-1} f = (\hat{f}(\xi)\chi(\xi))\check{} \tag{2.2}$$

$$\S_j f = \sum_{j\leq Q} \Delta_j f = (\hat{f}(\xi)\chi(\frac{\xi}{2^{j+1}}))\check{} \tag{2.3}$$

那么在对频率的二进制分解中，有如下性质

性质2.1. $\sum_{j\geq -1} \Delta_j f \longrightarrow^{\mathcal{S}'} f$

定理2.2. (Littlewood-Paley)　当$f \in L^p(\mathbb{R}^n)$，$p>1$，那么

$$C_1\|f\|_{L^p} \leq \|\Delta_{-1}f\|_{L^p} + \|(\Delta_j f)_{l^2,j\geq 0}\|_{L^p} \leq C_2\|f\|_{L^p}$$

以下把$C_1A \leq B \leq C_2A$简记作$A \sim B$，把$B \leq C_2A$简记作$B \lesssim A$，这样可以省略常数。

第 3 节　函数空间的Littlewood-Paley定理刻画

本小节内容可以参考[Miao]第一章和[L. Grafakos]第六章。上一节用Littlewood-Paley定理给了$L^p(\mathbb{R}^n)$空间等价范数，这一节将继续上一节，用Littlewood-Paley定理可以给一些函数空间做等价定义，这里主要关注一下本文当中会用到的几个函数空间。

定义2.1. (Besov**空间**)　$1 \leq p,q \leq \infty, 0 \leq \alpha \leq \infty B^{\alpha}_{p,q}(\mathbb{R}^n)$是指

$$\left\{f|f \in L^p(\mathbb{R}^n), \left(\int_{\mathbb{R}^n} \frac{\|f(\cdot+y)-f(\cdot)\|^q_{L^p}}{|y|^{n+\alpha q}}dy\right)^{\frac{1}{q}} < \infty\right\}$$

将范数就定义为

$$\|f\|_{B^{\alpha}_{p,q}} = \|f\|_{L^p} + \left(\int_{\mathbb{R}^n} \frac{\|f(\cdot+y)-f(\cdot)\|^q_{L^p}}{|y|^{n+\alpha q}}dy\right)^{\frac{1}{q}}$$

如果$q=\infty$，那么相应的定义

$$\|f\|_{B^{\alpha}_{p,\infty}} = \left\{f||f\|_{L^p} + \sup_{|y|>0} \frac{\|f(\cdot+y)-f(\cdot)\|_{L^p}}{|y|^{\alpha}}\right\}$$

Besov空间是Banach空间，并且利用Littlewood-Paley定理，可以定义等价范数

$$\|f\|_{B^{\alpha}_{p,q}} \sim \|\Delta_{-1}f\|_{L^p} + (2^{j\alpha}\|\Delta_j f\|_{L^p})_{l^q,j\geq 0}$$

与Besov空间紧密联系的另外一个Banach函数空间是Triebel空间，直接给出Littlewood-Paley定理刻画下的定义

定义2.2.　$f \in F^{\alpha}_{p,q}(\mathbb{R}^n)$是指

$$\|\Delta_{-1}f\|_{L^p} + \|(2^{j\alpha}\Delta_j f)_{l^q,j\geq 0}\|_{L^p} < \infty$$

并且定义

$$\|f\|_{F^{\alpha}_{p,q}} = \|\Delta_{-1}f\|_{L^p} + \|(2^{j\alpha}\Delta_j f)_{l^q,j\geq 0}\|_{L^p}$$

很多函数空间都可以归入上面两个函数空间中，有如下性质

性质2.3.　L^p空间，Soblev空间H^s，Holder空间C^α有如下性质

$$\begin{aligned} L^p &= F^0_{p,2}, p \geq 1 && (2.4) \\ H^s &= F^s_{2,2} && (2.5) \\ C^\alpha &= B^\alpha_{\infty,\infty} && (2.6) \end{aligned}$$

最后，有如下几个包含关系

性质2.4.　直接利用l^q空间的包含关系得到

$$\begin{aligned} B^\alpha_{p,q} &\subset B^\beta_{p,q}, 0 \leq \beta \leq \alpha && (2.7) \\ B^\alpha_{p,q} &\subset B^\alpha_{p,r}, 0 \leq q \leq r && (2.8) \end{aligned}$$

利用Berstain不等式得到的

$$B^{\alpha+n(\frac{1}{a}-\frac{1}{b})}_{a,q}\mathbb{R}^n \subset B^\alpha_{b,q}\mathbb{R}^n, 1 \leq a \leq b \leq \infty$$

利用Minkovski不等式得到的

$$\begin{aligned} B^\alpha_{p,q}\mathbb{R}^n &\subset F^\alpha_{p,q}\mathbb{R}^n, 1 \leq q \leq p \leq \infty && (2.9) \\ F^\alpha_{p,q}\mathbb{R}^n &\subset B^\alpha_{p,q}\mathbb{R}^n, 1 \leq p \leq q \leq \infty && (2.10) \end{aligned}$$

第三章　Onsager猜想在$B^{\alpha}_{3,\infty}(\mathbb{R}^3)$中的讨论

第 1 节　一个恒等变形及一些初步估计

现在考虑方程作为弱解是否满足能量守恒的关系，即把u考虑在缓增分布$\mathcal{S}'$中。用$\langle\cdot,\cdot\rangle$表示在空间范围内的对偶积。那么弱解定义为

$$\langle u(\cdot,0),\varphi(\cdot,0)\rangle-\langle u(\cdot,t),\varphi(\cdot,t)\rangle+\int_0^t\langle u(\cdot,0),\partial_t\varphi(\cdot,0)\rangle ds=\int_0^t\int_{\mathbb{R}^3}Tr[(u\otimes u)\cdot\nabla\varphi]dxds \tag{3.1}$$

为了做能量积分，这里要求$u\in C([0,T],L^2(\mathbb{R}^3))$，$\varphi\in C^1([0,T],\mathcal{S})$。且要求$\nabla\cdot\varphi=0$，$\nabla\cdot u=0$，后者的散度为零是分布意义下的。参考前面光滑解的做法，为了能量积分的话，φ应该是一个磨光后的u，这里取$\varphi=((u)_\delta)_\delta$。因为磨光算子从测试函数转移到分布的时候，要做对称，所以这里要求磨光核自身具有对称性，这样做能量积分就能得到

$$\frac{1}{2}[\langle u_\delta(\cdot,0),u_\delta(\cdot,0)\rangle-\langle u_\delta(\cdot,t),u_\delta(\cdot,t)\rangle]=\int_0^t\int_{\mathbb{R}^3}Tr[(u\otimes u)_\delta\cdot\nabla u_\delta]dxds \tag{3.2}$$

上面式子的左边即为能量差，根据之前恒等逼近的性质，当$\delta\to0$时，左边即为

$$\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3}|u(\cdot,0)|^2dx-\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3}|u(\cdot,t)|^2dx \tag{3.3}$$

所以只要证明当$\delta\to0$时，右边式子极限是0即可，这需要把u放在一个比较好的函数空间当中，从Littlewood-Paley定理的想法中可以猜想u的$\frac{1}{3}$阶导数应该具有一定的可积性。

定理3.1. [E. Weinan] 当$u\in C([0,T],L^2(\mathbb{R}^3))\bigcap L^3([0,T],B^{\alpha}_{\frac{1}{3},\infty}(\mathbb{R}^3))$，其中$\alpha>\frac{1}{3}$时，能量守恒成立。

证明. 对右边直接进行估计，设磨光核为h，即$u_\delta=u*h_\delta$，那么右边$(u\otimes u)_\delta$有如下恒

等式

$$
\begin{aligned}
(u\otimes u)_\delta &= \int_{\mathbb{R}^3} h_\delta(y)u_i(x-y)u_j(x-y)dy && (3.4)\\
&= \int_{\mathbb{R}^3} h_\delta(y)[u_i(x-y)-u_i(x)][u_j(x-y)-u_j(x)]dy && (3.5)\\
&+ \int_{\mathbb{R}^3} u_{i\delta}(x)[u_{j\delta}(x)-u_j(x)]+u_{i\delta}(x)u_j(x) && (3.6)\\
&= \int_{\mathbb{R}^3} h_\delta(y)[u_i(x-y)-u_i(x)][u_j(x-y)-u_j(x)]dy && (3.7)\\
&- [u_{i\delta}(x)-u_i(x)][u_{j\delta}(x)-u_j(x)]+u_{i\delta}(x)u_{j\delta}(x) && (3.8)\\
&= r_\delta(u,u)-(u-u_\delta)\otimes(u-u_\delta)+u_\delta\otimes u_\delta && (3.9)
\end{aligned}
$$

这里将$\int_{\mathbb{R}^3} h_\delta(y)[u_i(x-y)-u_i(x)][u_j(x-y)-u_j(x)]dy$记作$r_\delta(u,u)$。上述恒等式最后一项在能量积分中的估计有

$$
\begin{aligned}
\int_0^t\int_{\mathbb{R}^3} Tr[(u_\delta\otimes u_\delta)\cdot\nabla u_\delta]dxds &= \int_0^t\int_{\mathbb{R}^3} u_{i\delta}u_{j\delta}\partial_j u_{i\delta}dxds && (3.10)\\
&= -\frac{1}{2}\int_0^t\int_{\mathbb{R}^3}\partial_j u_{j\delta}u_{i\delta}u_{i\delta}dxds && (3.11)\\
&= 0 && (3.12)
\end{aligned}
$$

所以，只要估计$\int_0^t\int_{\mathbb{R}^3} Tr[(r_\delta(u,u)-(u-u_\delta)\otimes(u-u_\delta))\cdot\nabla u_\delta]dxds$ 即可。将这个式子记作$(**)$

先对$(**)$做一个初步的估计

$$
\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^3} Tr[(r_\delta(u,u)-(u-u_\delta)\otimes(u-u_\delta))\cdot\nabla u_\delta]dx && (3.13)\\
\leq &\int_{\mathbb{R}^3}|r_\delta(u,u)_{ij}\partial_j u_{i\delta}|dx+\int_{\mathbb{R}^3}|(u-u_\delta)_i(u-u_\delta)_j\partial_j u_{i\delta}|dx && (3.14)\\
\leq &\int_{\mathbb{R}^3}(r_\delta(u,u)_{ij})_{l^2}(\partial_j u_{i\delta})_{l^2}dx+\int_{\mathbb{R}^3}(u_i-u_{i\delta})^2_{l^2}(\partial_j u_{i\delta})_{l^2}dx && (3.15)\\
\leq &\|r_\delta(u,u)\|_{L^{\frac{3}{2}}}\|\nabla u_\delta\|_{L^3}+\|u-u_\delta\|^2_{L^3}\|\nabla u_\delta\|_{L^3} && (3.16)
\end{aligned}
$$

下一小节利用定理中$u\in L^3([0,T],B^{\alpha}_{\frac{1}{3},\infty}(\mathbb{R}^3))$ 这个条件对$\|r_\delta(u,u)\|_{L^{\frac{3}{2}}}$，$\|u-u_\delta\|^2_{L^3}$，$\|\nabla u_\delta\|_{L^3}$，三项分别进行估计。

第 2 节　对$\|r_\delta(u,u)\|_{L^{\frac{3}{2}}}$和$\|u-u_\delta\|^2_{L^3}$的估计

利用$B^{\alpha}_{3,\infty}(\mathbb{R}^3)$空间的定义

$$
\|f\|_{B^{\alpha}_{p,\infty}}=\left\{f\Big||f|_{L^p}+\sup_{|y|>0}\frac{\|f(\cdot+y)-f(\cdot)\|_{L^p}}{|y|^\alpha}\right\}
$$

对$\|r_\delta(u,u)\|_{L^{\frac{3}{2}}}$进行估计

$$\begin{aligned}
\|r_\delta(u,u)\|_{L^{\frac{3}{2}}} &= \left\|\int_{\mathbb{R}^3} h_\delta(y)[u_i(\cdot-y)-u_i(\cdot)][u_j(\cdot-y)-u_j(\cdot)]dy\right\|_{L^{\frac{3}{2}}} && (3.17)\\
&= \left\|\int_{\mathbb{R}^3} h(\frac{y}{\delta})[u_i(\cdot-y)-u_i(\cdot)][u_j(\cdot-y)-u_j(\cdot)]d\frac{y}{\delta}\right\|_{L^{\frac{3}{2}}} && (3.18)\\
&= \left\|\int_{\mathbb{R}^3} h(y)[\frac{u_i(\cdot-\delta y)-u_i(\cdot)}{|\delta y|^\alpha}][\frac{u_j(\cdot-\delta y)-u_j(\cdot)}{|\delta y|^\alpha}](\delta y)^{2\alpha}dy\right\|_{L^{\frac{3}{2}}} && (3.19)\\
&= \delta^{2\alpha}\int_{\mathbb{R}^3} h(y)\frac{\|u_i(\cdot-\delta y)-u_i(\cdot)\|_{L^3}}{|\delta y|^\alpha}\frac{\|u_j(\cdot-\delta y)-u_j(\cdot)\|_{L^3}}{|\delta y|^\alpha}dy && (3.20)\\
&\lesssim \delta^{2\alpha}\|u\|^2_{B^\alpha_{3,\infty}} && (3.21)
\end{aligned}$$

这里在倒数第二步估计的过程中，利用了磨光核的性质$supp(h)\subset B(0,1)$这个性质，把$|\delta y|$用δ在积分中控制。

类似上述步骤，对$\|u-u_\delta\|^2_{L^3}$进行估计

$$\begin{aligned}
\|u-u_\delta\|_{L^3} &\leq \left\|\int_{\mathbb{R}^3}(\delta y)^\alpha h(y)\frac{|u_i(\cdot-\delta y)-u_i(\cdot)|}{|\delta y|^\alpha}dy\right\|_{L^3} && (3.22)\\
&\leq \int_{\mathbb{R}^3}\delta^\alpha h(y)\frac{\|u_i(\cdot-\delta y)-u_i(\cdot)\|_{L^3}}{|\delta y|^\alpha}dy && (3.23)\\
&\lesssim \delta^\alpha\|u\|_{B^\alpha_{3,\infty}} && (3.24)
\end{aligned}$$

第 3 节 对$\|\nabla u_\delta\|_{L^3}$的估计

下面估计$\|\nabla u_\delta\|_{L^3}$。

$$\begin{aligned}
\|\nabla u_\delta\|_{L^3} &= \left\|\partial_i\int_{\mathbb{R}^3} h_\delta(y)u_j(\cdot-y)dy\right\|_{L^3} && (3.25)\\
&= \left\|\int_{\mathbb{R}^3}\partial_i\frac{1}{\delta^3}(h(\frac{y}{\delta}))u_j(\cdot-y)dy\right\|_{L^3} && (3.26)\\
&= \left\|\int_{\mathbb{R}^3}\frac{1}{\delta}(\partial_i h)(\frac{y}{\delta})u_j(\cdot-y)d\frac{y}{\delta}\right\|_{L^3} && (3.27)\\
&= \left\|\int_{\mathbb{R}^3}\frac{1}{\delta}(\partial_i h)(y)u_j(\cdot-\delta y)dy\right\|_{L^3} && (3.28)
\end{aligned}$$

因为$h\in C_0^\infty$，所以$\int_{\mathbb{R}^3}\partial_i h(y)dy=0$，所以

$$\begin{aligned}
&\left\|\int_{\mathbb{R}^3}\frac{1}{\delta}(\partial_i h)(y)u_j(\cdot-\delta y)dy\right\|_{L^3} && (3.29)\\
=& \left\|\int_{\mathbb{R}^3}\frac{1}{\delta}(\partial_i h)(y)[u_j(\cdot-\delta y)-u_j(\cdot)]dy\right\|_{L^3} && (3.30)\\
\leq& \int_{\mathbb{R}^3}\frac{1}{\delta}|(\partial_i h)(y)|\frac{\|u_i(\cdot-\delta y)-u_i(\cdot)\|_{L^3}}{|\delta y|^\alpha}|\delta y|^\alpha dy && (3.31)\\
\lesssim& \delta^{\alpha-1}\|u\|_{B^\alpha_{3,\infty}} && (3.32)
\end{aligned}$$

第 4 节　能量守恒时α应当满足的条件

结合以上对$\|r_\delta(u,u)\|_{L^{\frac{3}{2}}}$，$\|u-u_\delta\|^2_{L^3}$，$\|\nabla u_\delta\|_{L^3}$的估计，

$$
\begin{aligned}
& \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} Tr[(r_\delta(u,u)-(u-u_\delta)\otimes(u-u_\delta))\cdot\nabla u_\delta]dxds && (3.33)\\
\le\ & \int_0^t \|r_\delta(u,u)\|_{L^{\frac{3}{2}}}\|\nabla u_\delta\|_{L^3}+\|u-u_\delta\|^2_{L^3}\|\nabla u_\delta\|_{L^3}ds && (3.34)\\
\lesssim\ & \int_0^t \delta^{3\alpha-1}\|u\|^3_{B^{\alpha}_{3,\infty}}ds && (3.35)
\end{aligned}
$$

因为$u\in L^3([0,T],B^{\alpha}_{3,\infty}(\mathbb{R}^3))$，所以上述积分有意义。当$\alpha>\frac{1}{3}$时，当$\delta\to 0$时，$\delta^{3\alpha-1}\to 0$点点成立，利用控制收敛定理就有

$$
\begin{aligned}
& \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3}|u(\cdot,t)|^2dx-\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3}|u(\cdot,0)|^2dx && (3.36)\\
=\ & \lim_{\delta\to 0}\left[\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3}|u_\delta(\cdot,t)|^2dx-\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3}|u_\delta(\cdot,0)|^2dx\right] && (3.37)\\
=\ & \int_0^t \delta^{3\alpha-1}\|u\|^3_{B^{\alpha}_{3,\infty}}ds && (3.38)\\
=\ & 0 && (3.39)
\end{aligned}
$$

所以能量守恒。

[QED]

第四章　Onsager猜想在$B^{\frac{1}{3}}_{3,\infty}(\mathbb{R}^3)$中的讨论

第 1 节　利用二进制分解的一些准备工作

在[A. Cheskidov]论文中，利用二进制分解以及Littlewood-Paley定理对Besov空间的刻画，对结论做了进一步的加强。在这篇论文中，讨论了$u \in B^{\frac{1}{3}}_{3,\infty}(\mathbb{R}^3)$的情况。

定理4.1. 当$\int_0^t 2^j \|\Delta_j u\|^3_{L^3} ds \xrightarrow{j\to\infty} 0$ 时，能量守恒定理也成立。特别的，定义$B^{\frac{1}{3}}_{3,\infty}(\mathbb{R}^3)$的子空间$B^{\frac{1}{3}}_{3,c(\mathbb{N})}(\mathbb{R}^3)$ 为

$$\left\{ f | f \in B^{\frac{1}{3}}_{3,\infty}(\mathbb{R}^3), 2^{\frac{j}{3}} \|\Delta_j u\|_{L^3} \xrightarrow{j\to\infty} 0 \right\}$$

那么如果$u \in C([0,T], L^2(\mathbb{R}^3)) \bigcap L^3([0,T], B^{\frac{1}{3}}_{3,c(\mathbb{N})}(\mathbb{R}^3))$，则有能量守恒成立。

证明. 利用二进制分解，定义$S_Q u = \sum_{j\le Q} \Delta_j u$，那么$S_Q u$在这里的作用相当于之前的磨光子，类似于上一个证明，我们对弱解做磨光后的能量积分得到

$$\frac{1}{2}[\langle S_Q u(\cdot,0), S_Q u(\cdot,0)\rangle - \langle S_Q u(\cdot,t), S_Q u(\cdot,t)\rangle] = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} Tr[S_Q(u\otimes u)\cdot \nabla S_Q u] dxds \quad (4.1)$$

同样可以对$S_Q(u\otimes u)$拆分得到恒等式

$$S_Q(u\otimes u) = r_Q(u,u) - (u - S_Q u)\otimes(u - S_Q u) + S_Q u \otimes S_Q u$$

当中$r_Q(u,u)$意思同之前的$r_\delta(u,u)$类似，但是磨光核的半径是$2^{-(Q+1)}$。下面依然重复上一个证明的步骤，得到

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2}[\langle S_Q u(\cdot,0), S_Q u(\cdot,0)\rangle - \langle S_Q u(\cdot,t), S_Q u(\cdot,t)\rangle] && (4.2)\\
= & \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} Tr[S_Q(u\otimes u)\cdot \nabla S_Q u] dxds && (4.3)\\
= & \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} Tr[(r_Q(u,u) - (u - S_Q u)\otimes(u - S_Q u))\cdot \nabla S_Q u] dxds && (4.4)\\
\le & \int_0^t \|r_Q(u,u)\|_{L^{\frac{3}{2}}} \|\nabla S_Q u\|_{L^3} + \|(u - S_Q u)\|^2_{L^3} \|\nabla S_Q u\|_{L^3} ds && (4.5)
\end{aligned}$$

下面对$\|r_Q(u,u)\|_{L^{\frac{3}{2}}} \|\nabla S_Q u\|_{L^3}$，$\|(u - S_Q u)\|^2_{L^3} \|\nabla S_Q u\|_{L^3}$ 分别进行估计。

第 2 节　对$\|(u-S_Qu)\|^2_{L^3}\|\nabla S_Qu\|_{L^3}$的估计

根据定义$S_Qu=\sum_{j\le Q}\Delta_j u$，以及$L^3$范数的等价定义，有如下估计

$$
\begin{aligned}
& \|(u-S_Qu)\|^2_{L^3}\|\nabla S_Qu\|_{L^3} && (4.6)\\
= & \|\sum_{j>Q}\Delta_j u\|^2_{L^3}\|\sum_{j\le Q}2^j\Delta_j u\|_{L^3} && (4.7)\\
\lesssim & \|(\Delta_j u)_{l^2,j>Q}\|^2_{L^3}\|(2^j\Delta_j u)_{l^2,j\le Q}\|_{L^3} && (4.8)\\
\le & (\|\Delta_j u\|_{L^3})^2_{l^2,j>Q}(2^j\|\Delta_j u\|_{L^3})_{l^2,j\le Q} && (4.9)\\
= & (\sum_{j>Q}\|\Delta_j u\|^2_{L^3})(\sum_{j\le Q}2^{2j}\|\Delta_j u\|^2_{L^3})^{\frac{1}{2}} && (4.10)
\end{aligned}
$$

这里，$u\in B^{\frac{1}{3}}_{3,\infty}(\mathbb{R}^3)$利用Littlewood-Paley定理的等价描述是$\sup_j 2^{\frac{j}{3}}\|\Delta_j u\|_{L^3}<\infty$或者$\sup_j 2^{\frac{2j}{3}}\|\Delta_j u\|^2_{L^3}<\infty$。不妨定义$d(j)=2^{\frac{j}{3}}\|\Delta_j u\|_{L^3}$那么在估计中尽量能够凑出这样的形式

$$
\begin{aligned}
& (\sum_{j>Q}\|\Delta_j u\|^2_{L^3})(\sum_{j\le Q}2^{2j}\|\Delta_j u\|^2_{L^3})^{\frac{1}{2}} && (4.11)\\
= & (\sum_{j>Q}2^{\frac{-2j}{3}}2^{\frac{2j}{3}}\|\Delta_j u\|^2_{L^3})(\sum_{j\le Q}2^{\frac{4j}{3}}2^{\frac{2j}{3}}\|\Delta_j u\|^2_{L^3})^{\frac{1}{2}} && (4.12)\\
= & (\sum_{j>Q}2^{\frac{-2j}{3}}d^2(j))(\sum_{j\le Q}2^{\frac{4j}{3}}d^2(j))^{\frac{1}{2}} && (4.13)\\
= & (\sum_{j>Q}2^{\frac{2Q}{3}-\frac{2j}{3}}d^2(j))(\sum_{j\le Q}2^{\frac{4j}{3}-\frac{4Q}{3}}d^2(j))^{\frac{1}{2}} && (4.14)\\
\le & (K*d^2(Q))^{\frac{3}{2}} && (4.15)
\end{aligned}
$$

这里定义

$$K(j)=\begin{cases}2^{\frac{2j}{3}} & j\le 0\\ 2^{\frac{-4j}{3}} & j>0\end{cases}$$

定义$*$表示数列求和的卷积，即

$$(a*b)(n)=\sum_{i\in\mathbb{Z}}a(i)b(n-i)$$

第 3 节　对$\|r_Q(u,u)\|_{L^{\frac{3}{2}}}\|\nabla S_Qu\|_{L^3}$的估计

这一小节证明$\|r_Q(u,u)\|_{L^{\frac{3}{2}}}\|\nabla S_Qu\|_{L^3}$也能够用$(K*d^2(Q))^{\frac{3}{2}}$控制住，从而最终问题转化为研究$(K*d^2(Q))^{\frac{3}{2}}$的收敛性。不过这个估计中用到更多一点点的技巧。

$$
\begin{aligned}
\|r_Q(u,u)\|_{L^{\frac{3}{2}}} &= \left\|\int_{\mathbb{R}^3} h_Q(y)[u_i(\cdot-y)-u_i(\cdot)][u_j(\cdot-y)-u_j(\cdot)]dy\right\|_{L^{\frac{3}{2}}} && (4.16)\\
&\le \int_{\mathbb{R}^3} h_Q(y)\|u(\cdot-y)-u(\cdot)\|^2_{L^3}dy && (4.17)\\
&= \int_{\mathbb{R}^3} h(2^Qy)\|(\Delta_j(u(\cdot-y)-u(\cdot)))_{l^2}\|^2_{L^3}d2^Qy && (4.18)\\
&= \int_{\mathbb{R}^3} h(y)(\|\Delta_j(u(\cdot-2^{-Q}y)-u(\cdot))\|_{L^3})^2_{l^2}dy && (4.19)\\
& && (4.20)
\end{aligned}
$$

注意到如下两个性质。

性质4.1. 因为Lebesgue积分的平移不变性，$\|\Delta_j u(x-y)\|_{L^p}=\|\Delta_j u(x)\|_{L^p}$ 。

性质4.2. 利用Besov空间的定义，$\frac{\|\Delta_j(u(\cdot-y)-u(\cdot))\|_{L^p}}{|y|^\alpha}\le 2^{\alpha j}\|\Delta_j u\|_{L^p}$。

那么对上面一个估计，在数列的Q处做截断分成两部分去分别估计，再利用$supp(h)\subset B(0,1)$以及上一小节估计中的技巧，尽量凑出$d(j)=2^{\frac{j}{3}}\|\Delta_j u\|_{L^3}$ 的形式有

$$
\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^3} h(y)(\|\Delta_j(u(\cdot-2^{-Q}y)-u(\cdot))\|_{L^3})^2_{l^2}dy && (4.21)\\
\le\ &\int_{\mathbb{R}^3} h(y)[\sum_{j\le Q}2^{2j}\cdot 2^{-2Q}|y|\|\Delta_j u(\cdot)\|^2_{L^3}+2\sum_{j>Q}\|\Delta_j u(\cdot)\|^2_{L^3}]dy && (4.22)\\
\le\ &\int_{\mathbb{R}^3} h(y)[\sum_{j\le Q}2^{\frac{4j}{3}-\frac{4Q}{3}}d^2(j)+2\sum_{j>Q}2^{-\frac{2j}{3}+\frac{2Q}{3}}d^2(j)]dy\cdot 2^{-\frac{2Q}{3}} && (4.23)\\
\lesssim\ &K*d^2(Q)\cdot 2^{-\frac{2Q}{3}} && (4.24)
\end{aligned}
$$

然后，$\|\nabla S_Q u\|_{L^3}$沿用上一个小节的估计，有

$$\|\nabla S_Q u\|_{L^3}\lesssim (K*d^2(Q))^{\frac{1}{2}}\cdot 2^{\frac{2Q}{3}}$$

那么，整体有估计

$$\|r_Q(u,u)\|_{L^{\frac{3}{2}}}\|\nabla S_Q u\|_{L^3}\lesssim (K*d^2(Q))^{\frac{3}{2}} \tag{4.25}$$

第 4 节 对数列卷积的估计

所以最后问题化归为

$$\frac{1}{2}\|S_Q u(\cdot,0)\|^2_{L^2}-\frac{1}{2}\|S_Q(\cdot,t)\|^2_{L^2}\lesssim\int_0^t (K*d^2(Q))^{\frac{3}{2}}ds$$

所以只要估计$K*d^2(Q)$即可，有如下估计

$$
\begin{aligned}
K*d^2(Q) &= \sum_{j\le Q} 2^{\frac{4}{3}(j-Q)}d^2(j) + \sum_{j>Q} 2^{-\frac{2}{3}(j-Q)}d^2(j) && (4.26)\\
&\le C\sup_{j>Q} d^2(j) + \sum_{\frac{Q}{2}<j\le Q} 2^{\frac{4}{3}(j-Q)}d^2(j) + \sum_{j\le\frac{Q}{2}} 2^{\frac{4}{3}(j-Q)}d^2(j) && (4.27)\\
&\le C\sup_{j>\frac{Q}{2}} d^2(j) + C\cdot 2^{-\frac{2}{3}(Q)}\|u\|_{B^{\frac{1}{3}}_{3,\infty}} && (4.28)
\end{aligned}
$$

所以，当$u\in B^{\frac{1}{3}}_{3,c(\mathbb{N})}(\mathbb{R}^3)$时，即满足$K*d^2(Q)\longrightarrow 0$时，所以$\int_0^t (K*d^2(Q))^{\frac{3}{2}}ds$积分项关于时间点点收敛到0，利用控制收敛定理即可以导出能量守恒。 [QED]

第五章 $B^{\frac{1}{3}}_{3,\infty}(\mathbb{R}^3)$中能量不守恒的函数

在上一节我们利用二进制分解构造了如下等式

$$\frac{1}{2}[\langle S_Qu(\cdot,0),S_Qu(\cdot,0)\rangle-\langle S_Qu(\cdot,t),S_Qu(\cdot,t)\rangle]=\int_0^t\int_{\mathbb{R}^3}Tr[S_Q(u\otimes u)\cdot\nabla S_Qu]dxds$$

我们将等式右边记作能量流出，即

$$\begin{aligned}\Pi_Q &= \int_0^t\int_{\mathbb{R}^3}Tr[S_Q(u\otimes u)\cdot\nabla S_Qu]dxds && (5.1)\\ &= \int_0^t\int_{\mathbb{R}^3}u\cdot\nabla S_Q^2u\cdot udxds && (5.2)\end{aligned}$$

这一节我们将构造一个$B^{\frac{1}{3}}_{3,\infty}(\mathbb{R}^3)$中能量流出不为0的函数。

在做这个构造之前，先做一点说明。这个例子并不能说明在Onsager猜想中，弱解的范围比$B^{\frac{1}{3}}_{3,\infty}(\mathbb{R}^3)$要小。事实上，下面构造的函数并非是Euler方程的弱解，仅仅是使得上述的能量积分的右边，在$Q\to\infty$时，没有衰减到0。不过，即使如此，这个构造仍然是有意义的，因为它至少说明了，如果我们要用上述的能量积分直接证明能量守恒，应当对函数u 提出比$B^{\frac{1}{3}}_{3,\infty}(\mathbb{R}^3)$更多一点点的条件。也就是说，如果不加条件，上述证明是不能改良的。当然，也许以后可以从方程本身的性质推导出一些条件，使得$B^{\frac{1}{3}}_{3,\infty}(\mathbb{R}^3)$ 就是研究这个问题的最小空间。

第 1 节　函数的构造

以下这个精妙的构造来自[A. Cheskidov]。令$U:\mathbb{Z}^3\to\mathbb{C}^3$，满足

$$\begin{aligned}U(2^q,0,0)&=i2^{-\frac{q}{3}}(0,0,-1) & U(-2^q,0,0)&=i2^{-\frac{q}{3}}(0,0,1) && (5.3)\\ U(0,2^q,0)&=i2^{-\frac{q}{3}}(1,0,1) & U(0,-2^q,0)&=i2^{-\frac{q}{3}}(-1,0,-1) && (5.4)\\ U(2^q,2^q,0)&=i2^{-\frac{q}{3}}(0,0,1) & U(-2^q,-2^q,0)&=i2^{-\frac{q}{3}}(0,0,-1) && (5.5)\\ U(2^q,-2^q,0)&=i2^{-\frac{q}{3}}(1,1,-1) & U(-2^q,2^q,0)&=i2^{-\frac{q}{3}}(-1,-1,1) && (5.6)\\ & && && (5.7)\end{aligned}$$

在其他$\mathbb{Z}^3$的值上，U取值为0。

令χ和之前定义一样，是一个$C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$，$supp(\chi)\subset B(0,1)$，且在$B(0,\frac{1}{2})$上为1。令$\rho(x)=(\chi(\xi))\check{}$，$A=\int_{\mathbb{R}^3}\chi^3(x)dx$。

令$u=\mathbb{P}\sum_{k\in\mathbb{Z}^3}U(k)e^{ik\cdot x}\rho(x)$，这里$\mathbb{P}$是Leray投影，将函数分解成散度为0和旋度为0的两部分，并取散度为0的那一部分。上述定义的$u(x)$即为$B^{\frac{1}{3}}_{3,\infty}(\mathbb{R}^3$空间中能量积分不为0的函数。不难看出这个函数是良定义的，因为其中U有衰减项的。

下面我们将说明这个构造函数u的特殊性质，我们将看到这个函数的Fourier变换的频率分布是离散的，形象的说，它的相空间中的函数就像分布在空间中的原子排列一样。

为了后面方便说明，我们定义投影算子$P^{\perp}_{\xi}(x)$即为x在ξ垂直方向上的投影分量

$$P^{\perp}_{\xi}(x)=x-\frac{(x\cdot\xi)}{|\xi|^2}\xi$$

Leray投影事实上可以看作是相空间的投影运算，因为$\nabla\cdot\mathbb{P}u=0$，做Fourier变换后有$\xi\cdot\widehat{\mathbb{P}u}=0$，所以

$$\mathbb{P}u=(\hat{u}-\frac{(\hat{u}\cdot\xi)}{|\xi|^2}\xi)\check{}=u-\triangle^{-1}(\nabla(\nabla\cdot u))$$

这和Leray投影的定义是一致的，所以我们可以得到恒等式

$$\widehat{\mathbb{P}u}=P^{\perp}_{\xi}(\hat{u})$$

将这个结论运用到u的具体表达式当中得到

$$\hat{u}(\xi)=\sum_{k\in\mathbb{Z}^3}U(k)P^{\perp}_{\xi}\chi(4(\xi-k))$$

不难发现$U(k)P^{\perp}_{\xi}\xi(4(\xi-k))$的支撑集为$B(k,\frac{1}{4})$，所以右边实际上右边是离散的。那么利用二进制分解不难看出

$$2^{\frac{j}{3}}\|\triangle_j u\|_{L^3}\lesssim 2^{\frac{j}{3}}\sum_{2^j\leq|k|\leq 2^{j+1}}\|\mathbb{P}U(k)e^{ik\cdot x}\rho(x)\|_{L^3}<\infty$$

而且，$\sum_{2^j\leq|k|\leq 2^{j+1}}\|\mathbb{P}U(k)e^{ik\cdot x}\rho(x)\|_{L^3}$关于$j$是不衰减的。所以的确有$u\in B^{\frac{1}{3}}_{3,\infty}(\mathbb{R}^3)$

第 2 节　能量积分的非平凡项

在构造函数中，令$\Phi_k(x)=U(k)\rho(x)|k|^{\frac{1}{3}}$，这里乘上一个$|k|^{\frac{1}{3}}$是为了标准化。再令$\Psi_k(x)=\mathbb{P}(e^{ik\cdot x}\Phi_k(x))$，在这样的记号下，有$\Psi_k$的Fourier变换的支撑集在$B(k,\frac{1}{4})$上，且$u(x)=\sum_{k\neq 0}|k|^{-\frac{1}{3}}\Psi_k(x)$。能量流出

$$\Pi_Q=\int_0^t\int_{\mathbb{R}^3}\sum_{k_1,k_2,k_3\in\mathbb{Z}^3}|k_1|^{-\frac{1}{3}}|k_2|^{-\frac{1}{3}}|k_3|^{-\frac{1}{3}}\Psi_{k_1}\cdot\nabla S_Q^2\Psi_{k_2}\cdot\overline{\Psi_{k_3}}dxds$$

利用Ψ_k的Fourier变换的支撑集在$B(k,\frac{1}{4})$，以及$\nabla\cdot\Psi_k=0$，上述能量流出中其实有很多项都是0，可以进行化简。下面简述这些事实。

性质5.1.　当$k_1+k_2\neq k_3$时，

$$\int_{\mathbb{R}^3}\Psi_{k_1}\cdot\nabla S_Q^2\Psi_{k_2}\cdot\overline{\Psi_{k_3}}dx=0$$

证明. 利用Fourier变换是L^2保距变换，

$$\int_{\mathbb{R}^3}\Psi_{k_1}\cdot\nabla S_Q^2\Psi_{k_2}\cdot\overline{\Psi_{k_3}}dx = \int_{\mathbb{R}^3}\mathcal{F}(\Psi_{k_1}\cdot\nabla S_Q^2\Psi_{k_2})\cdot\mathcal{F}\overline{\Psi_{k_3}}d\xi \tag{5.8}$$

$$= \int_{\mathbb{R}^3}\mathcal{F}\Psi_{k_1}*\mathcal{F}\nabla S_Q^2\Psi_{k_2}\cdot\mathcal{F}\overline{\Psi_{k_3}}d\xi \tag{5.9}$$

其中$\mathcal{F}\Psi_{k_1}*\mathcal{F}\nabla S_Q^2\Psi_{k_2}$的支撑集是$B(k_1+k_2,\frac{1}{2})$，$\mathcal{F}\overline{\Psi_{k_3}}$的支撑集是$B(k_3,\frac{1}{4})$，所以当$k_1+k_2\neq k_3$时，没有公共支撑集，积分为0。 [QED]

性质5.2.　定义$A_Q=\mathbb{Z}^3\bigcap B(0,2^{Q+1})\backslash B(0,2^Q)$，当$k_2$和$k_3$都不在$A_Q$中时，

$$\int_{\mathbb{R}^3}\Psi_{k_1}\cdot\nabla S_Q^2\Psi_{k_2}\cdot\Psi_{k_3}+\Psi_{k_1}\cdot\nabla S_Q^2\Psi_{k_3}\cdot\Psi_{k_2}dx=0$$

证明. 注意到$S_Qu=\sum_{j\leq Q}\triangle_j u=(\chi(\frac{\cdot}{2^{Q+1}})\hat{u}(\xi))\check{}$，所以$S_Q$作频率截断时，对于相空间中频率超出$2^{Q+1}$的作用得到0，所以若$k_2$，$k_3$之一不在$B(0,2^{Q+1})$中，上述式子中转移一个$S_Q$算子，后，就会发生积分项为0。

另一方面，如果$k_2,k_3\in B(0,2^Q)$，因为$\chi(\frac{\cdot}{2^{Q+1}})$在$B(0,2^Q)$上恒等于1，那么$S_Q$对 Ψ_{k_2},Ψ_{k_3}的作用效果就是恒等算子，那么有

$$\int_{\mathbb{R}^3}\Psi_{k_1}\cdot\nabla S_Q^2\Psi_{k_2}\cdot\Psi_{k_3}+\Psi_{k_1}\cdot\nabla S_Q^2\Psi_{k_3}\cdot\Psi_{k_2}dx \tag{5.10}$$

$$= \int_{\mathbb{R}^3}\Psi_{k_1}\cdot\nabla\Psi_{k_2}\cdot\Psi_{k_3}+\Psi_{k_1}\cdot\nabla\Psi_{k_3}\cdot\Psi_{k_2}dx \tag{5.11}$$

$$= \int_{\mathbb{R}^3}\Psi_{k_1}\cdot\nabla(\Psi_{k_2}\cdot\Psi_{k_3})dx \tag{5.12}$$

$$= -\int_{\mathbb{R}^3}\nabla\cdot\Psi_{k_1}(\Psi_{k_2}\cdot\Psi_{k_3})dx \tag{5.13}$$

$$= 0 \tag{5.14}$$

上述结论同样可以推广到k_1和k_2上。 [QED]

结合上述两个式子，最后在能量流出中的非零项事实上有非常强的要求。结合上述两个性质，用简单的计算可以知道，如果三个数中有两个在A_Q中，那么第三个也在A_Q中，如果只有k_2在A_Q中，可以推出k_1,k_3的长度都至少应当是2^{Q-1}，定

义$C_Q = \mathbb{Z}^3 \bigcap B(0, 2^{Q+1}) \backslash B(0, 2^{Q-1})$

$$\begin{aligned}
\Pi_Q &= \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} \sum_{k_1,k_2,k_3\in\mathbb{Z}^3} (|k_1||k_2||k_3|)^{-\frac{1}{3}} \Psi_{k_1} \cdot \nabla S_Q^2 \Psi_{k_2} \cdot \overline{\Psi_{k_3}} dxds && (5.15)\\
&= \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} \sum_{\substack{k_1,k_2,k_3\in\mathbb{Z}^3\\ k_1+k_2+k_3=0\\ k_1,k_2,k_3\in C_Q}} (|k_1||k_2||k_3|)^{-\frac{1}{3}} \Psi_{k_1} \cdot \nabla S_Q^2 \Psi_{k_2} \cdot \Psi_{k_3} dxds && (5.16)
\end{aligned}$$

考察$\Psi_{k_1} \cdot \nabla S_Q^2 \Psi_{k_2}$，

$$\Psi_{k_1} \cdot \nabla S_Q^2 \Psi_{k_2} = \Psi_{k_1} \cdot S_Q^2(\mathbb{P}(\nabla(e^{ik_2\cdot x}\Phi_{k_2}))) = i(\Psi_{k_1}\cdot k_2) S_Q^2 \Psi_{k_2} + \Psi_{k_1} \cdot S_Q^2(\mathbb{P}(e^{ik_2\cdot x}\nabla\Phi_{k_2}))$$

下一节证明一个引理，用这两个引理可以把我们上述的简化变成离散的数列求和。

第 3 节　一个估计引理

引理5.1.　函数Φ_k满足

$$I_k = \int_{\mathbb{R}^3} |\xi||\hat{\Phi}_k(\xi)| d\xi < \infty$$

相应的Ψ_k满足

$$\sup_x |\Psi_k(x) - e^{ik\cdot x}(P_k^{\perp}\Phi_k)(x)| \le \frac{1}{4\pi^3}\frac{I_k}{|k|} \tag{5.17}$$

$$\sup_x |S_Q^2\Psi_k(x) - \chi_Q^2(k)\Psi_k(x)| \le \frac{c}{(2\pi)^3}\frac{I_k}{2^{Q+1}} \tag{5.18}$$

Proof. Φ的估计是显然的

$$\begin{aligned}
I_k &= \int_{\mathbb{R}^3} |\xi||\hat{\Phi}_k(\xi)| d\xi && (5.19)\\
&= \int_{\mathbb{R}^3} |\xi||k|^{\frac{1}{3}}|U_k||\chi(4\xi)| d\xi && (5.20)\\
&\sim \int_{\mathbb{R}^3} |\xi||\chi(4\xi)| d\xi && (5.21)
\end{aligned}$$

Ψ的第一个估计直接计算

$$\begin{aligned}
|\Psi_k(x) - e^{ik\cdot x}(P_k^{\perp}\Phi_k)(x)| &= |\mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F}\mathbb{P}(e^{ik\cdot x}\Phi_k(x)) - (P_k^{\perp}\hat{\Phi}_k)(\xi-k)]| && (5.22)\\
&= |\mathcal{F}^{-1}[(P_\xi^{\perp}\hat{\Phi}_k)(\xi-k) - (P_k^{\perp}\hat{\Phi}_k)(\xi-k)]| && (5.23)\\
&\le \frac{1}{(2\pi)^3}\int_{\mathbb{R}^3} |(P_\xi^{\perp}\hat{\Phi}_k)(\xi-k) - (P_k^{\perp}\hat{\Phi}_k)(\xi-k)| d\xi && (5.24)
\end{aligned}$$

利用定义

$$P_\xi^{\perp}(x) = x - \frac{(x\cdot\xi)}{|\xi|^2}\xi$$

$$\begin{aligned} & |P_\xi^\perp(v) - P_k^\perp(v)| && (5.25)\\ = & \left|(v - \frac{(v\cdot\xi)}{|\xi|^2}\xi) - (v - \frac{(v\cdot k)}{|k|^2}k)\right| && (5.26)\\ = & \left|\frac{(v\cdot\xi)}{|\xi|^2}\xi - \frac{(v\cdot k)}{|k|^2}k\right| && (5.27)\\ \leq & \left|\frac{(v\cdot\xi)}{|\xi|^2}\xi - \frac{(v\cdot\xi)}{|k|^2}k\right| + \left|\frac{(v\cdot\xi)}{|k|^2}k - \frac{(v\cdot k)}{|k|^2}k\right| && (5.28)\\ \leq & |v||\xi|\left|\frac{\xi}{|\xi|^2} - \frac{k}{|k|^2}\right| + \frac{|v||\xi-k|}{|k|} && (5.29)\\ \leq & \frac{|v|}{|k|}\left|\frac{|k|\xi}{|\xi|} - \frac{|\xi|k}{|k|}\right| + \frac{|v||\xi-k|}{|k|} && (5.30)\\ = & 2\frac{|v||\xi-k|}{|k|} && (5.31) \end{aligned}$$

上面倒数第二步用到了恒等式$|\frac{|k|\xi}{|\xi|} - \frac{|\xi|k}{|k|}| = |\xi - k|$。

将这个估计回代得到

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(2\pi)^3}\int_{\mathbb{R}^3}|(P_\xi^\perp\hat{\Phi}_k)(\xi-k) - (P_k^\perp\hat{\Phi}_k)(\xi-k)|d\xi && (5.32)\\ \leq & \frac{1}{4\pi^3}\frac{1}{|k|}\int_{\mathbb{R}^3}|\xi-k||\hat{\Phi}_k(\xi-k)|d\xi && (5.33)\\ \leq & \frac{1}{4\pi^3}\frac{1}{|k|}\int_{\mathbb{R}^3}|\xi||\hat{\Phi}_k(\xi)|d\xi && (5.34)\\ = & \frac{1}{4\pi^3}\frac{I_k}{|k|} && (5.35) \end{aligned}$$

类似的，做Ψ的第二个估计，注意到$|\hat{\Psi}_k(\xi)| = |(P_\xi^\perp\hat{\Phi}_k)(\xi-k)| \leq |\hat{\Phi}_k(\xi-k)|$

$$\begin{aligned} & |S_Q^2\Psi_k(x) - \chi_Q^2(k)\Psi_k(x)| && (5.36)\\ = & |\mathcal{F}^{-1}((\chi_Q^2(\xi) - \chi_Q^2(k))\hat{\Psi}_k(\xi))| && (5.37)\\ \leq & \frac{1}{(2\pi)^3}\int_{\mathbb{R}^3}|\hat{\Phi}_k(\xi-k)||\xi-k|\frac{|\chi_Q(\xi)-\chi_Q(k)|}{|\xi-k|}|\chi_Q(\xi)+\chi_Q(k)|d\xi && (5.38)\\ & && (5.39) \end{aligned}$$

所以利用

$$\begin{aligned} & |\chi_Q(\xi)+\chi_Q(k)| \leq 2 && (5.40)\\ & \frac{|\chi_Q(\xi)-\chi_Q(k)|}{|\xi-k|} = \frac{|\chi(\frac{\xi}{2^{Q+1}}) - \chi(\frac{k}{2^{Q+1}})|}{2^{Q+1}\frac{|\xi-k|}{2^{Q+1}}} \leq \frac{C}{2^{Q+1}} && (5.41) \end{aligned}$$

这里C是关于χ的Lipschitz常数。

回代到原来的估计

$$\frac{1}{(2\pi)^3}\int_{\mathbb{R}^3}|\hat{\Phi}_k(\xi-k)||\xi-k|\frac{|\chi_Q(\xi)-\chi_Q(k)|}{|\xi-k|}|\chi_Q(\xi)+\chi_Q(k)|d\xi \tag{5.42}$$

$$\lesssim \frac{1}{2^{Q+1}}\frac{1}{(2\pi)^3}\int_{\mathbb{R}^3}|\hat{\Phi}_k(\xi-k)||\xi-k|d\xi \tag{5.43}$$

$$= \frac{1}{2^{Q+1}}\frac{1}{(2\pi)^3}\int_{\mathbb{R}^3}|\hat{\Phi}_k(\xi)||\xi|d\xi \tag{5.44}$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^3}\frac{I_k}{2^{Q+1}} \tag{5.45}$$

[QED]

第 4 节　构造的细节计算

在这一节将利用上一节推导的若干用于估计的引理，对能量流出进行化简，并且最后我们将看到，能量流出的主要部分可以用一个离散的有限和来估计。能量流出如下

$$\Pi_Q=\int_0^t\int_{\mathbb{R}^3}\sum_{\substack{k_1,k_2,k_3\in\mathbb{Z}^3\\ k_1+k_2+k_3=0\\ k_1,k_2,k_3\in C_Q}}(|k_1||k_2||k_3|)^{-\frac{1}{3}}\Psi_{k_1}\cdot\nabla S_Q^2\Psi_{k_2}\cdot\Psi_{k_3}dxds$$

下面利用之前的结论，估计

$$\int_{\mathbb{R}^3}\Psi_{k_1}\cdot\nabla S_Q^2\Psi_{k_2}\cdot\Psi_{k_3}dx=\int_{\mathbb{R}^3}i(\Psi_{k_1}\cdot k_2)S_Q^2\Psi_{k_2}\cdot\Psi_{k_3}dx+\int_{\mathbb{R}^3}\Psi_{k_1}\cdot S_Q^2(\mathbb{P}(e^{ik_2\cdot x}\nabla\Phi_{k_2}))\cdot\Psi_{k_3}dx$$

这里尽量少用放缩，而用等价量。有之前的结论，Ψ_k，Φ_k都是标准化之后的速降函数，所以关于它们的积分都可以用常数控制，所以上述积分的第二项是可以用一个常数控制，用$\mathcal{O}(C)$表示。第一项积分中因为有k_2，所以直观感觉应该是$\mathcal{O}(2^Q)$，事实上，这个直觉是对的。利用$\sup_x|S_Q^2\Psi_k(x)-\chi_Q^2(k_2)\Psi_k(x)|\le\frac{c}{(2\pi)^3}\frac{I_k}{2^{Q+1}}$这个估计

$$\int_{\mathbb{R}^3}i(\Psi_{k_1}\cdot k_2)S_Q^2\Psi_{k_2}\cdot\Psi_{k_3}dx \tag{5.46}$$

$$= \int_{\mathbb{R}^3}i(\Psi_{k_1}\cdot k_2)\chi_Q^2(k_2)\Psi_{k_2}\cdot\Psi_{k_3}dx+i(\Psi_{k_1}\cdot k_2)(S_Q^2-\chi_Q^2(k_2))\Psi_{k_2}\cdot\Psi_{k_3}dx \tag{5.47}$$

$$= \int_{\mathbb{R}^3}i(\Psi_{k_1}\cdot k_2)\chi_Q^2(k_2)\Psi_{k_2}\cdot\Psi_{k_3}dx+\mathcal{O}(C) \tag{5.48}$$

再利用$\sup_x|\Psi_k(x)-e^{ik\cdot x}(P_k^{\perp}\Phi_k)(x)|\le\frac{1}{4\pi^3}\frac{I_k}{|k|}$ 这个式子进行估计。此处，注意到Φ_k满足

性质$P_k^{\perp}\Phi_k=\Phi_k$，这是用到了Φ_k在构造时的特点，读者不难手动验算。那么

$$
\begin{aligned}
& \int_{\mathbb{R}^3} i(\Psi_{k_1}\cdot k_2)\chi_Q^2(k_2)\Psi_{k_2}\cdot\Psi_{k_3}dx && (5.49)\\
= & \int_{\mathbb{R}^3} e^{i(k_1+k_2+k_3)x} i(\Phi_{k_1}\cdot k_2)\chi_Q^2(k)\Phi_{k_2}\cdot\Phi_{k_3}dx+\mathcal{O}(C) && (5.50)\\
= & \int_{\mathbb{R}^3} i(\Phi_{k_1}\cdot k_2)\chi_Q^2(k_2)\Phi_{k_2}\cdot\Phi_{k_3}dx+\mathcal{O}(C) && (5.51)\\
= & \int_{\mathbb{R}^3} (|k_1||k_2||k_3|)^{\frac{1}{3}}\rho^3(x) i(U(k_1)\cdot k_2)\chi_Q^2(k_2)U_{k_2}\cdot U_{k_3}dx+\mathcal{O}(C) && (5.52)\\
= & (|k_1||k_2||k_3|)^{\frac{1}{3}} Ai(U(k_1)\cdot k_2)\chi_Q^2(k_2)U_{k_2}\cdot U_{k_3}+\mathcal{O}(C) && (5.53)
\end{aligned}
$$

所以在计算能量流出时，即为

$$
\begin{aligned}
\Pi_Q = & \int_0^t\int_{\mathbb{R}^3}\sum_{\substack{k_1,k_2,k_3\in\mathbb{Z}^3\\ k_1+k_2+k_3=0\\ k_1,k_2,k_3\in C_Q}} (|k_1||k_2||k_3|)^{-\frac{1}{3}}\Psi_{k_1}\cdot\nabla S_Q^2\Psi_{k_2}\cdot\Psi_{k_3}dxds && (5.54)\\
= & \sum_{\substack{k_1,k_2,k_3\in\mathbb{Z}^3\\ k_1+k_2+k_3=0\\ k_1,k_2,k_3\in C_Q}} Ai(U(k_1)\cdot k_2)\chi_Q^2(k_2)U_{k_2}\cdot U_{k_3}+\mathcal{O}(2^{-Q}) && (5.55)
\end{aligned}
$$

比较就能看出，上面这个式子其实对于不同的Q是同一个式子，只是对自变量进行了伸缩变换。只要说明不为0就可以，用一个简单的Matlab可以计算得到结果。

第 5 节 程序计算

用MATLAB做程序计算$\sum_{\substack{k_1,k_2,k_3\in\mathbb{Z}^3\\ k_1+k_2+k_3=0\\ k_1,k_2,k_3\in C_Q}} Ai(U(k_1)\cdot k_2)\chi_Q^2(k_2)U_{k_2}\cdot U_{k_3}$，就在环$B(0,2)\backslash B(0,1)$上计算，最后得到数值

$$
\sum_{\substack{k_1,k_2,k_3\in\mathbb{Z}^3\\ k_1+k_2+k_3=0\\ k_1,k_2,k_3\in C_Q}} Ai(U(k_1)\cdot k_2)\chi_Q^2(k_2)U_{k_2}\cdot U_{k_3}=3.2A
$$

所以验证了能量是耗散的。

```
function [rate,n] = Onsager(U,V)
a = 0;
b = 0;
c = 0;
rate = 0;
n = 0;
temp = 0;
x = 0;
r = 0;
for(a = 1:16)
    for(b = 1:16)
        for(c = 1:16)
            if(U(a,:)+U(b,:)+U(c,:) == zeros(1,3))
                n = n+1;
                r = U(b,:)*(U(b,:)');
                if(r < 4 )
                    x = 1;
                else
                    x = 0.5;
                end
                temp = x*(V(a,:)*(U(b,:)'))*(V(b,:)*(V(c,:)'));
                rate = rate + temp;
            end
        end
    end
end
end
```

第六章　小结

最后做一些小结，本文总结了Onsager猜想的一些进展和成果。[E. Weinan]在早期的研究成果中肯定了在当速度的光滑些比较好，在$u \in B^{\alpha}_{3,\infty}(\mathbb{R}^3), \alpha > \frac{1}{3}$时，能量守恒是成立的。在[A. Cheskidov]中，作者考察了$u \in B^{\frac{1}{3}}_{3,\infty}(\mathbb{R}^3)$ 时的情况，利用二进制分解证明了，如果速度场比$B^{\frac{1}{3}}_{3,\infty}(\mathbb{R}^3)$再好一点点，比如$B^{\frac{1}{3}}_{3,p}(\mathbb{R}^3)$，或者$B^{\frac{1}{3}}_{3,c(\mathbb{N})}(\mathbb{R}^3)$时，命题也是成立的。事实上，如果我们重新回顾[E. Weinan]的证明，我们可以看到这个证明的最后一步

$$\Pi_\delta \lesssim \int_0^t \delta^{3\alpha-1} \sup_{|y|<1} \left| \frac{\|u_i(\cdot - \delta y) - u_i(\cdot)\|_{L^3}}{(\delta y)^\alpha} \right|^3 ds$$

在$\alpha = \frac{1}{3}$时，上式关于δ的衰减就没有了，变成了常数。如果要求当$\delta \to 0$时，仍然有衰减，则必然要求

$$\sup_{|y|<1} \frac{\|u_i(\cdot - \delta y) - u_i(\cdot)\|_{L^3}}{(\delta y)^\alpha} \xrightarrow{\delta \to 0} 0$$

利用二进制分解，这正是$B^{\frac{1}{3}}_{3,c(\mathbb{N})}(\mathbb{R}^3)$的等价定义。这一点在[R. Shvydkoy]中也有提到了。所以利用Littlewood-Paley定理的做法本质上只是把一个积分的估计转化到了数列的估计上。

在[A. Cheskidov]中，用同样的做法还证明了诸如旋度守恒律等一些其他的守恒律，并给了对非线性项估计的一些其他估计，比如如果频率截断在Q_0, Q_1之间的话，在这段频率上的能量流出有估计

$$|\Pi_{Q_0 Q_1}| \leq C(K * d^2)^{\frac{3}{2}}(Q_0) + C(K * d^2)^{\frac{3}{2}}(Q_1)$$

这个估计对建模很有帮助。

用简单的数学分析知识可以知道用在$(K * d^2)^{\frac{3}{2}}(Q)$估计能量流出时，最后提出的条件已经是最佳的，如果要做改进，那么在用能量积分时要用其他技巧。另一方面[A. Cheskidov]构建的反例，虽然不能完全解决这个问题，但是揭示了这样一件事情，就是在不加入其他条件下，仅在$u \in B^{\alpha}_{3,\infty}(\mathbb{R}^3)$框架下是不可能证明能量守恒的。当然，弱解有很多性质，是不是代入其他测试函数得到对解决问题有用的性质呢？这个值得我们思考。另外在构建弱解例子方面，文章中也指出这是现在的一个难点，需要继续努力。

致谢

感谢雷震老师本学期毕业论文对我的指导，在讨论课上，我学到了很多知识，更学会了如何去克服阅读文献中的困难，以及把想法做简洁的陈述和报告。

感谢这学期一同参加讨论课的王坤睿、王佑仁、陈俊雅和肖尧同学，你们的报告开阔了我的眼界。

感谢论文写作过程中徐天一同学给予的LaTeX技术上的支持，感谢张一超、冯立卓给予的MATLAB技术上的支持。

最后感谢四年来老师们辛勤栽培和同学们携手共进，祝复旦大学数学科学学院老师工作顺利，10数学学学院同学学业有成，前程似锦。

参考文献

[E. Weinan] Peter Constantin, E. Weinan E and Edriss S. Titi, Onsager's conjecture on the energy conservation for solutions of Euler's Equation, Comm. Math. Phys.,165(1994),207-209

[A. Cheskidov] A. Cheskidov and P. Constantin, S. Friedlander and R. Shvydkoy, Energy conservation and Onsager's conjecture for Euler equations, Nonlinearity, 21(2008), 1233-1252

[R. Shvydkoy] Roman Shvydkoy, Lectures on the Onsager conjecture, Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. S 3 (2010), no. 3, 473 – 496

[Miao] 苗长兴，吴家宏，章志飞，Littlewood-Paley理论及其在流体动力学方程中的应用，北京: 科学出版社, 2012

[L. Grafakos] L. Grafakos, Classical and Modern Fourier Analysis, Prentice Hall, NJ 2003.

[U. Frisch] U. Frisch, Turbulence. The legacy of A. N. Kolmogorov. Cambridge University Press, Cambridge, 1995.

[J. Duchon] J. Duchon and R. Robert, Inertial energy dissipation for weak solutions of incompressible Euler and Navier-Stokes equations, Nonlinearity 13 (2000), 249 – 255.

[G. L. Eyink1] G. L. Eyink and K. R. Sreenivasan, Onsager and the theory of hydrodynamic turbulence, Rev. Mod. Phys. 78 (2006).

[G. L. Eyink2] G. L. Eyink, Energy dissipation without viscosity in ideal hydrodynamics. I. Fourier analysis and local energy transfer, Phys. D 78 (1994), 222 – 240.

[L. Onsager] L. Onsager, Statistical Hydrodynamics, Nuovo Cimento (Supplemento) 6 (1949), 279 – 287