1.1.1

Soit P vérifiant les conditions de l'énoncé.

On écrit P dans la base $1, X-a, \dots, (X-a)^n, \dots$

d'où $P = \sum_{k=0}^{n} a_k (X-a)^k$.

On a :

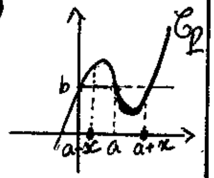
$\mathcal{C}_P$ symétrique par rapport à (a,b)

$\Leftrightarrow P(a-X) + P(a+X) = 2b$.

$\Leftrightarrow \sum_{k=0}^{n} ((-1)^k+1) a_k X^k = 2b$.

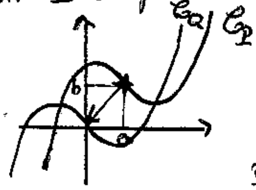
$\Leftrightarrow a_0 = b$ et $a_k = 0$ si $k \neq 0$ est pair

$\Leftrightarrow \exists Q \in \mathbb{R}[X],\ P = b + (X-a) Q((X-a)^2)$. $\square$



OU

Soit P vérifiant les conditions de l'énoncé.



Soit $Q(X) = P(X+a) - b$.

Alors :

$Q(-X) = P(a-X) - b$

$= P(a+X) + 2b - b = Q(X)$.

Donc Q est impair, et :

$\exists R \in \mathbb{R}[X],\ Q(X) = X R(X^2)$.

d'où : $P(X) = b + Q(X-a) = b + (X-a) R((X-a)^2)$ $(*)$

Réciproquement, s'il existe $R \in \mathbb{R}[X]$ vérifiant $(*)$,

alors $\left.\begin{array}{l} P(a-X) = b - X R(X^2) \\ P(a+X) = b + X R(X^2) \end{array}\right\} P(a-X) + P(a+X) = 2b$

Donc $\mathcal{C}_P$ est symétrique par rapport à (a,b).

1.1.2.

Notons $x_1, \dots, x_n$ les racines de P.

Soit $E = \mathbb{R} - \{x_1, \dots, x_n\}$.

$\forall x \in E$,

$$\frac{P'^2(x) - P(x)P''(x)}{P'^2(x)} = \left(\frac{P}{P'}\right)'(x)$$

Or : $\frac{P'}{P} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{X - x_k}$.

D'où : $$\frac{P'^2(x) - P(x)P''(x)}{P'^2(x)} = \frac{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(x-x_k)^2}}{\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x-x_k}\right)^2} \geq \frac{1}{n}, \quad (*)$$

d'après l'inégalité de Cauchy-Schwartz.

Donc $\forall x \in E$, $(n-1) P'^2(x) \geq n P(x) P''(x)$.

Par continuité des fonctions polynômiales, on a :

$\forall x \in \mathbb{R},\ (n-1) P'^2(x) \geq n P(x) P''(x)$. $\square$

Rq. : Cas d'égalité : • Si $x \in E$,

Il faut que $(*)$ soit une égalité, et donc que $x - x_1 = \dots = x - x_k$, ie $x_1 = \dots = x_k$.

Dans ce cas, $P = \lambda (X - x_1)^n$ et on a :

$(n-1) P'^2(X) = n P(X) P''(X)$,

donc il y a égalité pour tout $x \in \mathbb{R}$.

• Si $x \notin E$, il y a clairement égalité si x est racine multiple.

1.1.3. Soient P, Q vérifiant les conditions.

Soit ζ une racine primitive n^e de 1.

Alors : $\forall k \in [\![0, n-1]\!],\ P(\zeta)(P(\zeta) - 1) = 0$

ie $\forall k \in [\![0, n-1]\!],\ P(\zeta) \in \{0, 1\}$.

Notons $P = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k$.

Alors : $P(1) + P(\zeta) + \dots + P(\zeta^{n-1}) = n(a_0 + a_n + a_{2n} + \dots)$

d'où $P(1) + \dots + P(\zeta^{n-1})$ est multiple de n.

Donc : $\left| \begin{array}{l} \forall i \in [\![0, n-1]\!],\ P(\zeta^i) = 0 \\ \text{ou} \\ \forall i \in [\![0, n-1]\!],\ P(\zeta^i) = 1 \end{array}\right.$

Donc dans $\mathbb{C}[X]$, $X^n - 1 \mid P$ ou $X^n - 1 \mid P - 1$.

Mais comme $P \in \mathbb{Z}[X]$, $X^n - 1 \in \mathbb{Z}[X]$ et $X^n - 1$ est unitaire, on a $X^n - 1 \mid P$ ou $X^n - 1 \mid P - 1$ dans $\mathbb{Z}[X]$.

Les solutions sont donc :

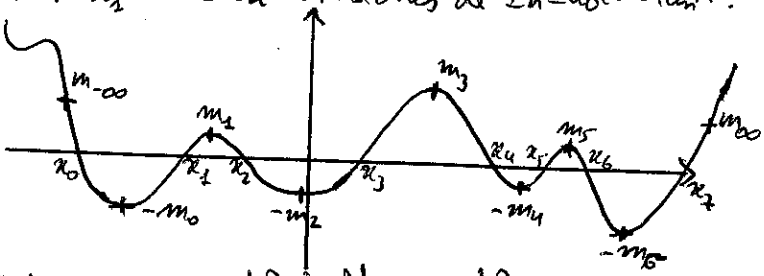
$\left| \begin{array}{l} P = (X^n - 1) R \\ Q = R[(X^n - 1)R - 1] \end{array}\right.$

et $\left| \begin{array}{l} P = (X^n - 1) R + 1 \\ Q = [(X^n - 1)R + 1] R \end{array}\right.$ avec $R \in \mathbb{Z}[X]$. $\square$

1.1.4. Construisons par récurrence une suite (a_k) qui convient.

On choisit $a_0 = a_1 = 1$. Supposons avoir construit $a_0, \dots, a_n$ tq : $\forall k \in [\![0, n]\!]$, $a_0 + \dots + a_n X^n$ est scindé à racines simples sur $\mathbb{R}$, et $a_i \neq 0$.

Soient $x_1 < \dots < x_n$ les racines de $P_n = a_0 + \dots + a_n X^n$.



Soit $m_k = \max_{[x_k, x_{k+1}]} |P_n(x)|$, $m_\infty = |P_n(x_n + 1)|$,

$m_{-\infty} = |P_n(x_1 - 1)|$, et ε_k = signe de P_n sur $]x_k, x_{k+1}[$.

Soit $y_k \in [x_k, x_{k+1}]$ tq $|P_n(y_k)| = m_k$, $y_\infty = x_n + 1$, $y_{-\infty} = x_1 - 1$.

Soit $\left| \begin{array}{l} \varepsilon_\infty = \text{signe de } P_n \text{ sur }]x_n, +\infty[, \\ \varepsilon_{-\infty} = \text{signe de } P_n \text{ sur }]-\infty, x_1[. \end{array}\right.$

Soit $m = \min_k \{m_k\}$.

Soit $\varepsilon > 0$ tq : $\forall x \in [x_1 - 1, x_n + 1],\ |\varepsilon x^{n+1}| \leq \frac{m}{2}$.

1^{er} cas : $\varepsilon_\infty = +1$.

On choisit $a_{n+1} = -\varepsilon$.

On a : $\varepsilon_k P_{n+1}(y_k) > 0$, donc le TVI impose que pour tout k, P_{n+1} a une racine dans $]y_k, y_{k+1}[$, ce qui donne n racines 2 à 2 distinctes.

De plus, $P_{n+1}(y_\infty) > 0$ et $P_{n+1}(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} -\infty$.
Donc le TVI montre l'existence d'une racine de P dans $]y_\infty, +\infty[$. P_{n+1} a donc $n+1$ racines 2 à 2 distinctes et est donc scindé sur $\mathbb{R}$.

2^{e} cas : $\varepsilon_\infty = -1$.

Analogue avec $a_{n+1} = \varepsilon$.

Par récurrence, on a construit (a_k) vérifiant les conditions requises. □

1.2.1. Soit $A = \prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)$.

Soit $P = \sum_{k=0}^{n-1} X^k = \prod_{k=1}^{n-1} (X - e^{2ik\pi/n})$.

Alors :
$$P(1) = n = \prod_{k=1}^{n-1} (1 - e^{2ik\pi/n})$$
$$= \left[\prod_{k=1}^{n-1} (e^{ik\pi/n} - e^{-ik\pi/n})\right](-1)^{n-1} e^{\frac{i\pi}{n}\frac{n(n-1)}{2}}$$
$$= (-1)^{n-1} e^{\frac{i\pi(n-1)}{2}} (2i)^{n-1} \prod_{k=1}^{n-1} \sin\frac{k\pi}{n}.$$
$$= 2^{n-1} A.$$

Donc : $A = \frac{n}{2^{n-1}}$. □

1.2.3. Montrons d'abord que la somme a un sens.

On a : $n(z) = d - \deg((P-z) \wedge P')$.

Si $d - n(z) \neq 0$, alors $(P-z) \wedge P' \neq 1$, donc z doit être l'image par P d'une racine de P'.

Donc la somme donnée est en fait une somme finie et a bien du sens, et on a :
$$\sum_{z\in\mathbb{C}} (d - n(z)) = \sum_{z\in\{P(x_1),\dots,P(x_r)\}} \deg((P-z)\wedge P').$$
où $P' = (X-x_1)^{\alpha_1} \dots (X-x_r)^{\alpha_r}$ (car $\mathbb{C}$ alg. clos).

~~Pour $z = P(x_i)$,~~

Sans perte de généralité, on suppose que
$$\left.\begin{matrix} P(x_1) = \dots = P(x_{r_1}) \\ P(x_{r_1+1}) = \dots = P(x_{r_2}) \\ \vdots \\ P(x_{r_{n-1}+1}) = \dots = P(x_{r_n}) \end{matrix}\right\} n \text{ complexes 2 à 2 distincts.}$$

Alors :
$$\sum_{z\in\mathbb{C}} (d - n(z)) = \sum_{k=1}^{n} \deg((P - P(x_{r_k})) \wedge P')$$
$$= \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{i=r_{k-1}+1}^{r_k} \alpha_i\right)$$
(avec $r_0 = 0$)
$$= \deg P'$$
$$= d - 1. \quad □$$

1.2.2.

• Décomposons en éléments simples $F(X) = \frac{1}{P(X)}$.

Les pôles de F sont $x_1, \dots, x_n$ et ils sont simples.

D'après le cours :
$$F(X) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{P'(x_k)(X - x_k)}. \quad (*)$$

Donc : $-F(0) = -\frac{1}{P(0)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k P'(x_k)}$.

• Avec $(*)$,
$$XF(X) = \sum_{k=1}^{n} \frac{X}{P'(x_k)(X - x_k)}.$$

En évaluant en $x \in \mathbb{R}$ et en faisant $x \to +\infty$, on obtient :

→ si $n > 1$, $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{P'(x_k)} = 0$.

→ si $n = 1$, $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{P'(x_k)} = \frac{1}{c}$, où c = coeff. dominant de P.

□

1.2.4.

Soit P un tel polynôme.

On écrit $P = \pm X^\alpha Q$ avec $Q(0) \neq 0$ et Q unitaire.

Q est scindé sur $\mathbb{R}$ à coefficients dans $\{-1, 0, 1\}$.

Soient $x_1, \dots, x_n$ ses racines.

Posons $S = \sum_{1\le i,j\le n} \frac{x_i^2}{x_j^2}$.

Par Cauchy-Schwarz :
$$S = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i^2}\right) \geq \left(\sum_{i=1}^{n} 1\right)^2 = n^2.$$

On écrit d'autre part :
$$Q = X^n - \sigma_1 X^{n-1} + \dots + (-1)^n \sigma_n$$
où les σ_i sont les fonctions symétriques élémentaires des racines de Q.

Alors :
$$S = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i^2}\right) = (\sigma_1^2 - 2\sigma_2)\left[\left(\frac{\sigma_{n-1}}{\sigma_n}\right)^2 - 2\frac{\sigma_{n-2}}{\sigma_n}\right].$$
$\leq 3 \times 3 = 9$ car les σ_i sont dans $\{-1, 0, 1\}$.

Donc $n^2 \leq 9$ et $n \leq 3$.

• Pour $n = 1$, $X - 1$ et $X + 1$ conviennent.

• Pour $n = 2$, on obtient $X^2 - 1$, $X^2 + X - 1$, $X^2 - X - 1$.

• Pour $n = 3$, il y a égalité dans les inégalités, donc $\sigma_1 = \pm 1$, $\sigma_2 = -1$, $\sigma_3 = \pm 1$ et $\sigma_1 = -\sigma_3$.

On obtient donc $X^3 + X^2 - X - 1$ et $X^3 - X^2 - X + 1$, qui conviennent tous les deux.

Les polynômes recherchés sont donc :
$\pm X^\alpha$, $\pm X^\alpha(X-1)$, $\pm X^\alpha(X+1)$, $\pm X^\alpha(X^2-1)$, $\pm X^\alpha(X^2+X-1)$, $\pm X^\alpha(X^2-X-1)$, $\pm X^\alpha(X^3+X^2-X-1)$, $\pm X^\alpha(X^3-X^2-X+1)$. □

1.3.1.

$P-7$ a 4 racines entières 2 à 2 distinctes au moins, disons n_1, n_2, n_3, n_4.

On écrit : $P = 7+(X-n_1)(X-n_2)(X-n_3)(X-n_4)Q(X)$, avec $Q(X) \in \mathbb{Q}[X]$.

Comme $P-7 \in \mathbb{Z}[X]$ et $(X-n_1)(X-n_2)(X-n_3)(X-n_4)$ est unitaire, $Q \in \mathbb{Z}[X]$.

S'il existait $n_0 \in \mathbb{Z}$ tq $P(x_0) = 14$, on aurait :

$$7 = \underbrace{(14-n_1)(14-n_2)(14-n_3)(14-n_4)}_{4 \text{ entiers } 2 \text{ à } 2 \text{ distincts}} \underbrace{Q(14)}_{\in \mathbb{Z}}$$

7 étant premier, les 4 entiers 2 à 2 distincts sont nécessairement ± 1 et ± 7, et donc $49 | 7$: Absurde ! □

1.3.2.

Écrivons $P = (X-x_1)^{\alpha_1} \cdots (X-x_n)^{\alpha_n}$, $\alpha_i \in \mathbb{N}^*$.

Alors $\frac{P'}{P} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha_k}{X-x_k}$.

Soit $z_0 \in \mathbb{C}$ tq $P'(z_0) = 0$.

Si $z_0 \in \{x_1, \dots, x_n\}$, on a terminé.

Sinon, on a :

$$0 = \sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha_k}{z_0 - x_k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha_k}{|z_0-x_k|^2}(z_0 - x_k).$$

$$z_0 = \frac{\sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha_k}{|z_0-x_k|^2} x_k}{\sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha_k}{|z_0-x_k|^2}},$$

ce qui démontre que z_0 est dans l'enveloppe convexe de $x_1, \dots, x_n$. □

1.3.3.

Une simple étude de fonction donne :

x	$-\infty$ → 1	1 → 2	...	k → $k+1$	...	99 → 100	100 → $+\infty$
$f(x)$	$0 \searrow -\infty$	$+\infty \searrow 1 \searrow -\infty$	...	$+\infty \searrow 1 \searrow -\infty$	$+\infty \searrow 1 \searrow -\infty$	$+\infty \searrow 1 \searrow -\infty$	$+\infty \searrow 1 \searrow 0$

où $f : x \mapsto \sum_{k=1}^{100} \frac{k}{x-k}$.

Pour $k \in [\![1, 99]\!]$, soit $\alpha_k \in]k, k+1[$ tq $f(\alpha_k) = 1$.

Soit $\alpha_{100} \in]100, +\infty[$ tq $f(\alpha_{100}) = 1$.

L'ensemble des solutions est alors :

$$\bigcup_{k=1}^{100}]k, \alpha_k].$$

La somme des longueurs vaut :

$$S = \sum_{k=1}^{100} (\alpha_k - k) = \sum_k \alpha_k - \frac{100 \cdot 101}{2} = \sum_k \alpha_k - 5050.$$

Les α_k sont les racines de :

$$P = \sum_{k=1}^{100} k \Big[\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{100} (X-j)\Big] - \prod_{j=1}^{100} (X-j).$$

Par les relations entre coefficients et racines, on a :

$$\sum_k \alpha_k = \sum_{k=1}^{100} k + \sum_{j=1}^{100} j = 2 \cdot 5050.$$

d'où $S = 5050$. □

1.3.4.

Soit l'application linéaire $D : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X]$, $R \mapsto R'$.

Écrivons $Q = (X-\lambda_1) \cdots (X-\lambda_n)$.

Alors $\sum_{k=0}^{n} q_k P^{(k)} = (D-\lambda_1 Id) \circ \dots \circ (D-\lambda_n Id)(P)$.

Par une récurrence immédiate, il suffit de voir que, pour $\lambda \in \mathbb{R}$, $(D-\lambda Id)(P) = P' - \lambda P$ est scindé sur $\mathbb{R}$.

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto P(x) e^{-\lambda x}$.

Alors $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = (P'(x) - \lambda P(x)) e^{-\lambda x}$.

Soient $x_1 < \dots < x_s$ les racines de P, de multiplicités $\alpha_1, \dots, \alpha_s$ respectivement.

$\forall k \in [\![1, s]\!]$, $f(x_k) = 0$.

Le théorème de Rolle impose que, pour $k \in [\![1, s-1]\!]$, $P' - \lambda P$ a une racine $y_k \in]x_k, x_{k+1}[$.

De plus, $f(x_1) = 0$ et $f(x) \xrightarrow[x \to -\infty]{} 0$.

Soit $\alpha \in]-\infty, x_1[$ (tq $f(\alpha) \neq 0$).

D'après le TVI, on trouve $\beta_1 < \beta_2 < x_1$ tq $f(\beta_1) = f(\beta_2) = f(\alpha)/2$.

Alors le théorème de Rolle impose que $P' - \lambda P$ a une racine $y_0 \in]-\infty, x_1[$.

Finalement, chaque x_k est une racine de $P' - \lambda P$ de multiplicité au moins $\alpha_k - 1$.

Nous avons trouvé $s + \sum(\alpha_k - 1) = d^\circ P$ racines de $P' - \lambda P$ comptées avec leur multiplicité : ce polynôme est bien scindé. □

2.1.1.

1. $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$\left|\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k} - l_1 l_2\right| = \left|\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} \left[(u_k - l_1) v_{n-k} + l_1 (v_{n-k} - l_2)\right]\right|$$

$$\leq \frac{1}{n+1}\left(\sum_{k=0}^{n} |u_k - l_1|\right) M + \frac{1}{n+1}|l_1| \left(\sum_{k=0}^{n} |v_{n-k} - l_2|\right)$$

(où $M = \sup_k |u_k|$.

$\xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ par Césaro.

Donc $w_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} l_1 l_2$. □

2. $\forall n \in \mathbb{N} - \{0, 1\}$,

$$|u_n| = \left(1 + \frac{n^2}{(n^2-1)^2}\right)^{n/2} = e^{\frac{n}{2}\ln\left(1+\frac{n^2}{(n^2-1)^2}\right)} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1.$$

$$\operatorname{Arg}(u_n) = n \operatorname{Arctan}\left(\frac{n}{n^2-1}\right) \sim \frac{n^2}{n^2-1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1.$$

Donc $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} e^{i}$. □

3. (e^{a_n}), (e^{b_n}), (e^{c_n}) sont majorées, donc (a_n), (b_n), (c_n) le sont aussi.
Comme $a_n = (a_n + b_n + c_n) - b_n - c_n$, on en déduit que (a_n) est minorée. Il en est de même pour (b_n) et (c_n). Donc (a_n), (b_n) et (c_n) sont bornées. Par conséquent, il suffit de montrer qu'elles n'ont qu'une valeur d'adhérence.
Soit λ une valeur d'adhérence de (a_n).
Soit $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strict. croissante telle que $a_{\varphi(n)} \xrightarrow[n\to\infty]{} \lambda$.
On peut alors trouver $\psi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strict. croissante telle que $b_{\varphi(\psi(n))} \xrightarrow[n\to\infty]{} \mu$, où $\mu \in \mathbb{R}$.
Alors $c_{\varphi(\psi(n))} \xrightarrow[n\to\infty]{} -\lambda - \mu$.
D'où : $e^{\lambda} + e^{\mu} + e^{-\lambda-\mu} = 3$.
L'inégalité arithmético-géométrique impose alors que :

$$e^{\lambda} + e^{\mu} + e^{-\lambda-\mu} \geq 3\sqrt[3]{e^{\lambda} e^{\mu} e^{-\lambda-\mu}} = 3.$$

Il y a égalité, donc $e^{\lambda} = e^{\mu} = e^{-(\lambda+\mu)}$
D'où : $\lambda = \mu = -\lambda - \mu$.
Donc $\lambda = \mu = 0$.
La seule valeur d'adhérence de (a_n) est 0, donc (a_n) converge vers 0.
Il en est de même de (b_n) et (c_n). □

2.1.2.

On a :
$\forall x \in \mathbb{R}$, $f(f(f(x))) = f(ax+b) = af(x) + b$.
En dérivant : $f'(ax+b) = f'(x)$.

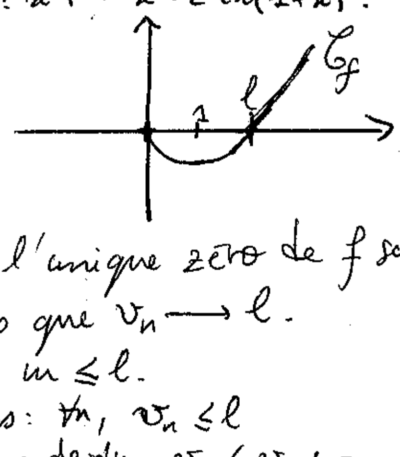
1er cas : $a < 0$
$f \circ f$ est bijective, donc f l'est aussi. De plus, f est continue. Donc f est strictement monotone.
$f \circ f$ est donc strictement croissante.
Or il n'en est rien. Donc dans ce cas, il n'y a pas de solutions.

2e cas : $0 < a < 1$.
Soit $x_0 \in \mathbb{R}$, et on pose $x_{n+1} = a x_n + b$.
Alors $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{b}{1-a}$.
De plus, $\forall n$, $f'(x_{n+1}) = f'(x_n)$.
Donc $\forall n$, $f'(x_n) = f'(x_0)$.
Par continuité de f', $f'(x_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} f'\left(\frac{b}{1-a}\right)$
Donc $f'(x_0) = f'\left(\frac{b}{1-a}\right)$, et ce pour tout x_0. Donc f' est constante, et :
$\exists \alpha, \beta, \forall x, f(x) = \alpha x + \beta$.
On obtient alors 2 solutions :

$$f : x \mapsto \sqrt{a}\, x + \frac{b}{1+\sqrt{a}}$$
$$f : x \mapsto -\sqrt{a}\, x + \frac{b}{1-\sqrt{a}}. \quad (*)$$

3e cas : $1 < a$.
On procède comme avant, avec la suite $x_0 \in \mathbb{R}$, $x_{n+1} = \frac{x_n - b}{a}$. $\left(\frac{1}{a} < 1\right)$.
On trouve les mêmes solutions que $(*)$. □

2.1.3. Soit $m = \min(u_0, u_1)$, $M = \max(u_0, u_1)$.
Posons : $v_0 = v_1 = m$, $v_{n+2} = \ln(1 + v_{n+1}) + \ln(1 + v_n)$
$w_0 = w_1 = M$, $w_{n+2} = \ln(1 + w_{n+1}) + \ln(1 + w_n)$.
Soit $f : x \mapsto x - 2\ln(1+x)$.



Soit l l'unique zéro de f sur $[1, +\infty[$.
Montrons que $v_n \longrightarrow l$.

1er cas : $m \leq l$.
Alors : $\forall n$, $v_n \leq l$
On a de plus $v_0 \leq v_1 \leq v_2$.
Comme $v_{n+3} - v_{n+2} = \ln(1 + v_{n+2}) - \ln(1 + v_n)$,
une réc. simple montre que (v_n) est croissante.

Croissante et majorée, v_n converge vers l.

2ᵉ cas : $m \geq l$.

De manière analogue $v_n \to l$.

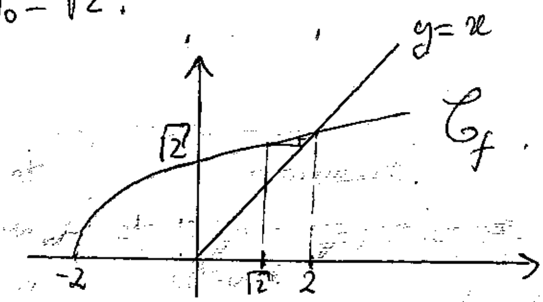
Dans tous les cas, $v_n \to l$.
De même, $w_n \to l$.
De plus, une récurrence simple montre que :

$$\forall n, \quad v_n \leq u_n \leq w_n.$$

Donc $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} l$. $\square$

2.2.1.

1) $\left| \begin{array}{l} \forall n \in \mathbb{N}, \quad y_{n+1} = \sqrt{2+y_n}, \; 0 \leq y_n \\ y_0 = \sqrt{2}. \end{array}\right.$



$f : x \mapsto \sqrt{2+x}$

Une récurrence simple montre que :
$\forall n \in \mathbb{N}, \; y_n \in [0, 2]$.
Or $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de la droite $y = x$ sur $[0,2]$, dc y_n croît.
Donc (y_n), croissante et majorée, converge.
Soit l sa limite. Alors, par continuité de f, $l = \sqrt{2+l}$, et $l \in [0,2]$.
Donc $l = 2$. $\square$

2) On vérifie aisément que $y_n = \lambda x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 2\lambda$. $\square$

3) * On prend $x_n = n^n$.

$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \frac{x_{n+1}}{x_n} = (n+1)\left(\frac{n+1}{n}\right)^n \leq e(n+1) \leq 2^{2^{n+1}}$.

et $x_0 \leq 8$.

Donc $\forall n \in \mathbb{N}, \; x_n \leq 8 \cdot 2^{2^2 + \cdots + 2^n} = 4 \cdot 2^{2^{n+1}-1}$
$= 2 \cdot 2^{2^{n+1}}$.

Donc avec 2), (y_n) est majorée.
De plus, (y_n) est croissante.
Croissant et majorée, (y_n) converge. $\square$

* Prenons $x_n = n^{2^{n+1}}$.
Alors $y_n \geq \sqrt[2^{n+1}]{x_n} = n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.
Donc $y_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$. $\square$

2.2.2.

• Posons $a_n = E\left((1+\sqrt{3})^{2n+1}\right)$.
Soit $b_n = (1+\sqrt{3})^{2n+1} + (1-\sqrt{3})^{2n+1}$.
Alors $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$b_n = \sum_{k=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} \left(1+(-1)^k\right) 3^{k/2}$$

$$= 2 \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ pair}}}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} 3^{k/2} \in \mathbb{N}.$$

Or $-1 < 1-\sqrt{3} < 0$.

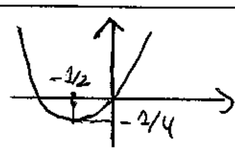
Donc $b_n = a_n$.

• $(1+\sqrt{3})^2$ et $(1-\sqrt{3})^2$ sont les racines de $P(X) = X^2 - 8X + 4$.
Donc : $\forall n \in \mathbb{N}, \; b_{n+2} = 8b_{n+1} - 4b_n$
$a_{n+2} = 4(2a_{n+1} - a_n)$.

Par réc. :
→ $a_0 = 2$: on a bien $2 \mid a_0$.
→ $a_1 = 20$: on a bien $4 \mid a_1$.
→ Soit $n \in \mathbb{N}$ tq $2^{n+1} \mid a_n$ et $2^{n+2} \mid a_{n+1}$.
Alors $a_{n+2} = 4(2a_{n+1} - a_n)$ est multiple de 2^{n+3}.

Donc $\forall n \in \mathbb{N}, \; 2^{n+1} \mid a_n$. $\square$

2.2.3. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2 + x$.



Soit E l'ensemble des valeurs d'adhérence de (u_n).
• Si $\lambda \in E$, on trouve $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strict. croiss. tq $u_{\varphi(n)} \to \lambda$, et donc $u_{\varphi(n)+1} \to \lambda^2 + \lambda$, d'où $\lambda^2 + \lambda \in E$.
• (u_n) étant bornée, on peut extraire une ss-suite convergente de $(u_{\varphi(n)-1})$, et sa limite μ vérifie alors $\mu^2 + \mu = \lambda$.
On en déduit que E est invariant par f.
Soient $m = \inf E$, $M = \sup E$.
On a alors $f(M) \leq M$, donc $M = 0$.
De plus, $E \subseteq \operatorname{Im} f$, donc $m \geq -1/4$.
$f(E) = E \subseteq [m^2+m, M^2+M]$, car f est croissante sur $[-1/4, 0]$.
Donc $m^2 + m \leq m$, d'où $m = 0$.
Donc $E = \{0\}$.
Par conséquent, $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. $\square$

2.3.1.

Soit $L=\sup_n\left(\frac{a_n}{n}\right)$.

Soit $\epsilon>0$. Soit $n_0>0$ tq $\frac{a_{n_0}}{n_0}\geq L-\epsilon$.

$\forall m>0$, $a_{mn_0}\geq m a_{n_0}$, donc $\frac{a_{mn_0}}{mn_0}\geq\frac{a_{n_0}}{n_0}\geq L-\epsilon$

Soit $k\geq n_0$. Écrivons la division euclidienne de k par n_0 : $k=n_0q+r$, $0\le r\le n_0-1$, $q\geq 1$.

Alors :

$$(L-\epsilon)\frac{q}{q+1}\le\frac{(L-\epsilon)n_0q}{n_0(q+1)}\le\frac{a_{n_0q}}{n_0(q+1)}\le\frac{a_k}{k}\le L$$

Donc, pour k assez grand,

$$L-2\epsilon\le\frac{a_k}{k}\le L.$$

Donc $\frac{a_k}{k}\xrightarrow[k\to+\infty]{}L$. □

2.3.2.

1) $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $\sqrt{n!}\le u_n\le\sqrt{n!}+\sqrt{(n-1)!}+\sqrt{(n-2)!}+n\sqrt{(n-3)!}$.

Or $n\sqrt{(n-3)!}=o(\sqrt{n!})$, $\sqrt{(n-1)!}=o(\sqrt{n!})$, $\sqrt{(n-2)!}=o(\sqrt{n!})$.

Donc $\sqrt{n!}+\sqrt{(n-1)!}+\sqrt{(n-2)!}+n\sqrt{(n-3)!}\sim\sqrt{n!}$.

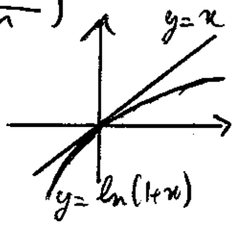
D'où, $u_n\sim\sqrt{n!}$ □

2) $\forall n\in\mathbb{N}^*$,

$$a_n=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{a+k}{n}\right)^n=\sum_{k=1}^{n}e^{n\ln\left(1+\frac{a+k-n}{n}\right)}$$

$$\le\sum_{k=1}^{n}e^{a+k-n}$$

$$\le e^{a-n+1}\,\frac{e^n-1}{e-1}\xrightarrow[n\to+\infty]{}\frac{e^{a+1}}{e-1}$$



À n_0 fixé :

$$a_n\geq\sum_{k=n-n_0}^{n}\left(\frac{a+k}{n}\right)^n\xrightarrow[n\to+\infty]{}\sum_{k=0}^{n_0}e^{a-k}$$

$$=e^a\,\frac{e^{-n_0-1}-1}{e^{-1}-1}.$$

Or $e^a\,\frac{1-e^{-n_0-1}}{\frac{1}{e}-1}\xrightarrow[n_0\to\infty]{}\frac{e^{a+1}}{e-1}$.

Une quantification simple donne alors que

$$a_n\xrightarrow[n\to+\infty]{}\frac{e^{a+1}}{e-1}.\ \square$$

2.3.3.

Soit $x_0>0$.

Soit (x_n) définie par $x_{n+1}=f(x_n)$.

Alors $x_{n+2}=6x_n-x_{n+1}$.

Le polynôme caractéristique est :

$$P=X^2+X-6=(X+3)(X-2).$$

Il existe donc $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$ tq :

$$\forall n,\ x_n=\lambda 2^n+\mu(-3)^n.$$

$\forall n\in\mathbb{N}$, $x_n>0$.

Donc $\mu=0$. Alors $\lambda=x_0$.

Donc $f(x_0)=x_1=2x_0$, et ce pour tout x.

On vérifie bien que $x\mapsto 2x$ est solution : c'est la seule ! □

2.3.4.

• On cherche $(m,n)\in\mathbb{N}^2$ tq :

$$2011\cdot 10^m\le 2^n<2012\cdot 10^m.$$

$$\ln 2011+m\ln 10\le n\ln 2<\ln 2012+m\ln 10.$$

$$n-\frac{\ln 2012}{\ln 2}\le m\,\frac{\ln 10}{\ln 2}\le n-\frac{\ln 2011}{\ln 2}.$$

• Soit $\alpha=\frac{\ln 10}{\ln 2}$. Montrons que $\alpha\notin\mathbb{Q}$.

On a : $2^\alpha=10$.

Si $\alpha=p/q$, $p,q\in\mathbb{Z}$, $q\neq 0$, alors $2^p=10^q$: absurde !

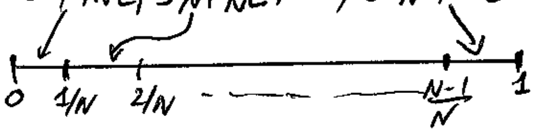
Donc $\alpha\notin\mathbb{Q}$.

• Soit $N\in\mathbb{N}^*$ tq $\frac{1}{N}<\frac{\ln 2012-\ln 2011}{\ln 2}$.

Considérons les $N+1$ réels : $\{\alpha\},\{2\alpha\},\dots,\{(N+1)\alpha\}$,

où $\{\cdot\}$ est la partie décimale.

Chacun tombe dans l'un des N intervalles : $]0,1/N[$, $]\frac{1}{N},\frac{2}{N}[$, …, $]\frac{N-1}{N},1[$



D'après le principe des tiroirs, il existe m_1,m_2 distincts de $[\![1,N+1]\!]$, tq $\{m_1\alpha\}$ et $\{m_2\alpha\}$ tombent ds le même intervalle, et donc il existe $m_0\in\mathbb{N}$ tq $0<\{m_0\alpha\}<\frac{1}{N}$ ou $\frac{N-1}{N}<\{m_0\alpha\}<1$.

Dans ce deuxième cas, on peut trouver m_0' multiple de m_0 tq $0<\{m_0'\alpha\}<1/N$.

On trouve donc toujours $m_0\in\mathbb{N}$ tq :

$$0<\{m_0\alpha\}<1/N.$$

En choisissant pour m un multiple judicieux de m_0, on trouve m et n vérifiant $(*)$. □

3.1.1.

$\forall t>1$,

$$f(t) \leq \int_0^1 \frac{dx}{(1+x)^t} = \left[\frac{1}{1-t}\,\frac{1}{(1+x)^{t-1}}\right]_0^1 = \frac{1}{t-1}\left(1-\frac{1}{2^{t-1}}\right) \sim \frac{1}{t}$$

$$f(t) = \int_0^1 \frac{(1-x)^t}{(1-x^3)^t} \geq \int_0^1 (1-x)^t\,dx = \left[-\frac{1}{t+1}(1-x)^{t+1}\right]_0^1 = \frac{1}{t+1} \sim \frac{1}{t}.$$

Donc $\underline{f(t) \sim \frac{1}{t}}$. □

3.1.2.

1) $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_n \geq 0$ et $u_{n+1} \leq u_n$.

Décroissante et minorée, la suite (u_n) converge. Soit ℓ sa limite.

Alors $\ell = \frac{\ell}{1+\ell^a}$, donc $\ell = 0$.

• Soit $\alpha > 0$.

$$\forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1}^\alpha - u_n^\alpha = u_n^\alpha\left[\frac{1}{(1+u_n^a)^\alpha} - 1\right]$$
$$= u_n^\alpha(1-\alpha u_n^a - 1) + o(u_n^{\alpha+a})$$
$$= -\alpha u_n^{a+\alpha} + o(u_n^{\alpha+a}).$$

Prenons $\alpha = -a$.

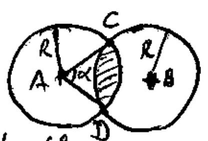
Alors $u_{n+1}^\alpha - u_n^\alpha \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\alpha = a$.

D'après le théorème de Cesaro:

$u_n^\alpha - u_0^\alpha \sim an$.

donc $\underline{u_n \sim (an)^{-1/a}}$. □

2) • Calculons d'abord $f(R)$ en fonction de R.



D'après le théorème de Pythagore,

$\left(\frac{CD}{2}\right)^2 = R^2 - 1$, donc $CD = 2\sqrt{R^2-1}$

d'où $\alpha = 2\operatorname{Arccos}(1/R)$.

Donc $f(R) = 2\left(\pi R^2 \frac{\alpha}{2\pi} - \frac{CD}{2}\right)$
$= 2\left(R^2 \operatorname{Arccos}(1/R) - \sqrt{R^2-1}\right)$.

• Trouvons le comportement de $f(R)$ quand $R \to 1^+$.

$$\operatorname{Arccos}'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{-1}{\sqrt{1-(1-h)^2}} \text{ avec } x = 1-h.$$
$$= \frac{-1}{\sqrt{2h-h^2}} = \frac{-1}{\sqrt{2h}\sqrt{1-\frac{h}{2}}}.$$
$$= \frac{-1}{\sqrt{2h}}\left(1+\frac{h}{4}+o(h)\right).$$

Donc, en intégrant,

$$\operatorname{Arccos}(x) \underset{x\to1^-}{=} \sqrt{2}\sqrt{1-x} + \frac{(1-x)^{3/2}}{6\sqrt{2}} + o\left((1-x)^{3/2}\right).$$

Avec $R = 1+h$,

$$f(R) = 2\left[(1+h)^2\operatorname{Arccos}\left(\frac{1}{1+h}\right) - \sqrt{(1+h)^2-1}\right].$$
$$= 2\left((1+h)^2 \operatorname{Arccos}(1-h+h^2+o(h^2))\right) - \sqrt{h(2+h)}.$$
$$= 2\left[(1+h)^2\sqrt{2h}\left(1-\frac{5}{12}h+o(h)\right) - \sqrt{2h}\left(1+\frac{h}{4}+o(h)\right)\right].$$
$$= 2\sqrt{2h}\left[1+\frac{19}{12}h - 1 - \frac{h}{4} + o(h)\right].$$
$$= 2h\sqrt{2h}\left[\frac{4}{3}+o(1)\right].$$

d'où: $\underline{f(R) \underset{R\to1^+}{\sim} \frac{8\sqrt{2}}{3}(R-1)^{3/2}}$. □

3.1.3.

• Pour n pair, $f: x \mapsto x\sin x - c\cos x$ est strictement croissante continue sur $[n\pi, n\pi+\frac{\pi}{2}]$, $f(n\pi) = -c < 0$, $f(n\pi+\frac{\pi}{2}) = n\pi+\frac{\pi}{2} > 0$.

Pour n impair, f est strictement décroissante continue sur $[n\pi, n\pi+\frac{\pi}{2}]$, $f(n\pi) = c > 0$, $f(n\pi+\frac{\pi}{2}) = -n\pi-\frac{\pi}{2} < 0$.

Par le théorème des valeurs intermédiaires, pour tout $n\in\mathbb{N}$, l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution $x_n \in \left]n\pi, n\pi+\frac{\pi}{2}\right[$.

• $\forall n\in\mathbb{N}$, $n\pi \leq x_n \leq n\pi+\frac{\pi}{2}$, donc $\underline{x_n \sim n\pi}$.

• Posons $y_n = x_n - n\pi$. On a $y_n = O(1)$.

Alors $(y_n+n\pi)\tan y_n = c$.

$$y_n = \operatorname{Arctan}\left(\frac{c}{y_n+n\pi}\right) \sim \frac{c}{y_n+n\pi} \sim \frac{c}{n\pi}.$$

• Posons $z_n = y_n - \frac{c}{n\pi}$. On a $z_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$.

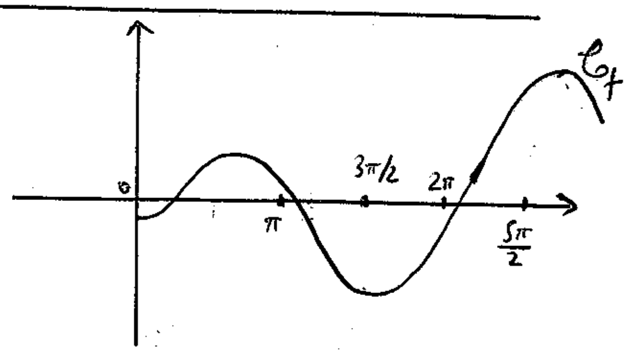
$$\frac{c}{n\pi} + z_n = \operatorname{Arctan}\left(\frac{c}{n\pi+\frac{c}{n\pi}+z_n}\right).$$
$$= \operatorname{Arctan}\left(\frac{c}{n\pi}\cdot\left(1-\frac{c}{n^2\pi^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\right).$$
$$= \frac{c}{n\pi} - \frac{c^2}{n^3\pi^3} - \frac{1}{3}\frac{c^3}{n^3\pi^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right).$$

Car $\operatorname{Arctan} x = x - \frac{x^3}{3} + o(x^3)$).

$$= \frac{c}{n\pi} - c^2\left(1-\frac{c}{3}\right)\frac{1}{n^3\pi^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right).$$

Donc :

$$x_n = n\pi + \frac{c}{n\pi} - c^2\left(1-\frac{c}{3}\right)\frac{1}{\pi^3 n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right). \ \square$$



3.2.1.

$\sin x \ln(\sin x) \underset{x\to 0^+}{=} (x+o(x^2))\ln(x+o(x^2))$
$= x\ln x + o(x^{3/2})$.

$\dfrac{\sin x^{\sin x}-1}{x^x-1} = \dfrac{x^x(1+o(x^{3/2}))-1}{x^x-1}$
$= 1 + \dfrac{o(x^{3/2})}{x^x-1}$.

$x^x = e^{x\ln x} = 1 + x\ln x + o(x\ln x)$

Donc $\dfrac{\sin x^{\sin x}-1}{x^x-1} = 1 + o(x^{1/4}) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 1$. □

3.2.2.

1) Rien ! On ne peut même pas donner un équivalent de f.
En effet, si $F(x) = x^2 + e^{-2x}\sin(e^{3x})$, alors $F(x) = x^2 + o(e^{-x})$, et :
$$f(x) = 2x - 2e^{-2x}\sin(e^{3x}) + e^{-2x}\,3e^{3x}\cos(e^{3x})$$
$$\sim 2x + 3e^{x}\cos(e^{3x}) \not\sim 2x.$$

2) Soit $h \in]0,1[$. Par croissance de f, pour $x>0$,
$$\varphi(x) = F(x(1+h)) - F(x) = \int_x^{x(1+h)} f(t)\,dt \geq xh\,f(x).$$
$$\psi(x) = F(x) - F(x(1-h)) = \int_{x(1-h)}^{x} f(t)\,dt \leq xh\,f(x).$$
d'où : $\dfrac{\psi(x)}{x^a h} \leq \dfrac{f(x)}{x^{a-1}} \leq \dfrac{\varphi(x)}{x^a h}$.

Comme $F(x) \sim x^a$,
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\varphi(x)}{x^a h} = \frac{(1+h)^a-1}{h}$$
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\psi(x)}{x^a h} = \frac{1-(1-h)^a}{h}.$$
Or $\dfrac{(1+h)^a-1}{h} \underset{h\to 0}{\longrightarrow} a$ et $\dfrac{1-(1-h)^a}{h} \underset{h\to 0}{\longrightarrow} a$.

Soit $\varepsilon>0$. Fixons $h \in]0,1[$ tel que $\dfrac{(1+h)^a-1}{h}$ et $\dfrac{1-(1-h)^a}{h}$ appartiennent à $[a-\varepsilon, a+\varepsilon]$. Pour x assez grand, on aura $\dfrac{\varphi(x)}{x^a h}$ et $\dfrac{\psi(x)}{x^a h}$ (et donc $\dfrac{f(x)}{x^{a-1}}$) dans $[a-2\varepsilon, a+2\varepsilon]$.

Donc $\dfrac{f(x)}{x^{a-1}} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} a$, d'où $f(x) \sim ax^{a-1}$! □

3) Soit η une fonction positive tq $\eta(x) = o(x)$ en $+\infty$.
Comme avant,
$$\varphi(x) = F(x+\eta(x)) - F(x) \geq \eta(x) f(x)$$
$$\psi(x) = F(x) - F(x-\eta(x)) \leq \eta(x) f(x).$$
Donc $\dfrac{\psi(x)}{\eta(x)} \leq f(x) \leq \dfrac{\varphi(x)}{\eta(x)}$.

Soit une fonction ε tq $F(x) = x^2 + x\varepsilon(x)$ et $\varepsilon(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Alors :
$$\frac{\varphi(x)}{\eta(x)} = \frac{1}{\eta(x)}\Big[\big((x+\eta(x))^2 - x^2\big) + (x+\eta(x))\varepsilon(x+\eta(x)) - x\varepsilon(x)\Big].$$
$$= 2x + \eta(x) + \varepsilon(x+\eta(x)) + \frac{x}{\eta(x)}\big(\varepsilon(x+\eta(x)) - \varepsilon(x)\big)$$
De même,
$$\frac{\psi(x)}{\eta(x)} = 2x - \eta(x) + \varepsilon(x-\eta(x)) + \frac{x}{\eta(x)}\big(\varepsilon(x) - \varepsilon(x-\eta(x))\big).$$
On voudrait que ces fonctions s'écrivent $2x + o(\sqrt{x})$.
Il faut donc que $\eta(x) = o(\sqrt{x})$, $\dfrac{\sqrt{x}}{\eta(x)}\big(\varepsilon(x+\eta(x)) - \varepsilon(x)\big) = o(1)$,
$\dfrac{\sqrt{x}}{\eta(x)}\big(\varepsilon(x) - \varepsilon(x-\eta(x))\big) = o(1)$.

Soit $m(x) = \sup_{t\in[x-\sqrt{x}, +\infty[} |\varepsilon(t)|$ et $\eta(x) = \sqrt{x\,m(x)}$.

$m(x) \underset{+\infty}{\longrightarrow} 0$ car $\varepsilon(x) \underset{+\infty}{\longrightarrow} 0$

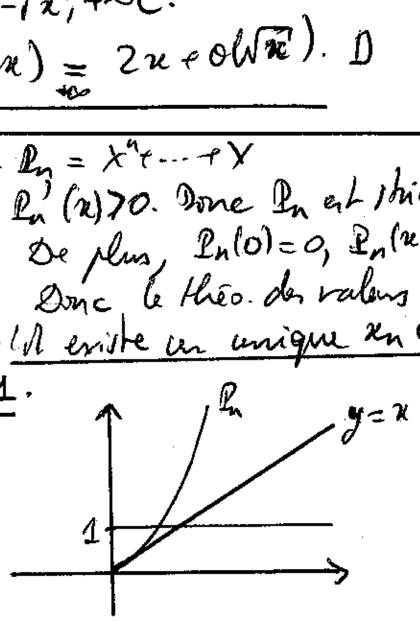
Donc $\eta(x) = o(\sqrt{x})$, et :
$$\left|\frac{\sqrt{x}}{\eta(x)}\big(\varepsilon(x+\eta(x)) - \varepsilon(x)\big)\right| \leq \frac{2\sqrt{x}}{\eta(x)} m(x) \leq 2\sqrt{m(x)} = o(1).$$
$$\left|\frac{\sqrt{x}}{\eta(x)}\big(\varepsilon(x) - \varepsilon(x-\eta(x))\big)\right| \leq \frac{2\sqrt{x}\,m(x)}{\eta(x)} \leq 2\sqrt{m(x)} = o(1).$$
car pour x assez grand, x, $x+\eta(x)$, $x-\eta(x)$ sont dans $[x-\sqrt{x}, +\infty[$.

Donc $f(x) \underset{+\infty}{=} 2x + o(\sqrt{x})$. □

3.2.3.

Soit $P_n = X^n + \dots + X$

• $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $P_n'(x) > 0$. Donc P_n est strictement croissant sur $\mathbb{R}_+$. De plus, $P_n(0) = 0$, $P_n(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, et P_n est continue. Donc le théo. des valeurs intermédiaires impose qu'il existe un unique $x_n \in \mathbb{R}^+$ tel que $P_n(x_n) = 1$.



• $\forall n \in \mathbb{N}$, $1 = P_n(x_n) < P_{n+1}(x_n)$
$P_{n+1}(x_{n+1}) < P_{n+1}(x_n)$.

Donc, par croissance de P_{n+1}, $x_{n+1} < x_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$.
$(x_n)_n$ est décroissante et minorée, dc converge.

Soit l sa limite.
$l \leq x_2 < 1$, donc $l < 1$.
$\forall n \in \mathbb{N}$, $x_n^{n+1} - 2x_n + 1 = 0$.
Par continuité, en passant à la limite,
$-2l+1=0$, donc $\underline{l = 1/2}$.

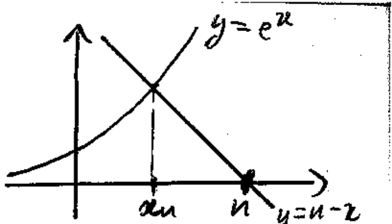
• Posons $y_n = x_n - 1/2$.
$(y_n + \frac{1}{2})^{n+1} - 2(y_n + 1/2) + 1 = 0$.
$(y_n + \frac{1}{2})^{n+1} = 2y_n$. (*).
$y_n \to 0$, donc pour n assez grand, $y_n \leq 1/4$
et alors avec (*), $y_n \leq \frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}$.
Donc $y_n = o\left(\left(\frac{4}{5}\right)^n\right)$.
Donc $2y_n = (y_n + \frac{1}{2})^{n+1} = \frac{1}{2^{n+1}} e^{(n+1)\ln(1+2y_n)}$
$= \frac{1}{2^{n+1}} e^{(n+1)o((\frac{4}{5})^n)} \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{1}{2^{n+1}}$.

donc $\underline{y_n \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{1}{2^{n+2}}}$.

• Soit $z_n = y_n - \frac{1}{2^{n+2}} = o\left(\frac{1}{2^n}\right)$.
On a : $(z_n + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^{n+2}})^{n+1} = 2(z_n + \frac{1}{2^{n+2}})$.
donc :
$(z_n + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^{n+2}})^{n+1} = \frac{1}{2^{n+1}}\left(1 + \frac{1}{2^{n+1}} + 2z_n\right)^{n+1}$.
$= \frac{1}{2^{n+1}} e^{(n+1)(\frac{1}{2^{n+1}} + o(\frac{1}{2^n}))}$
$= \frac{1}{2^{n+1}}\left(1 + \frac{n}{2^{n+1}} + o\left(\frac{n}{2^n}\right)\right)$.
$= \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{n}{4^{n+1}} + o\left(\frac{n}{4^n}\right) = \frac{1}{2^{n+1}} + 2z_n$.
donc $z_n \sim \frac{n}{2 \cdot 4^{n+1}}$.
Finalement :
$$x_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^{n+2}} + \frac{n}{2\cdot 4^{n+1}} + o\left(\frac{n}{4^n}\right).$$

$\boxed{3.3.1.}$ $\mathrm{Arcsin}\, x \underset{x\to 0}{=} x + o(x^2)$.
Donc, il existe $\varepsilon > 0$ tq :
$\forall x \in [0, \varepsilon]$, $\quad x - x^2 \leq \mathrm{Arcsin}\, x \leq x + x^2$.
Soit $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que $\frac{1}{n_0} \leq \varepsilon$.
$\forall n \geq n_0$,
$\frac{1}{2} \underset{n\to\infty}{\leftarrow} \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n^2} + \frac{k^2}{n^4}\right) \geq \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Arcsin}\left(\frac{k}{n^2}\right) \geq \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n^2} - \frac{k^2}{n^4}\right) \to \frac{1}{2}$
Donc : $\underline{\sum_{k=1}^{n} \mathrm{Arcsin}\left(\frac{k}{n^2}\right) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1/2}$. D

$\boxed{3.3.2.}$



• Soit $f : x \mapsto e^x + x$.
f est strict. croissante sur $\mathbb{R}_+$.
De plus, $f(0) = 1$, $f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, et
f est continue.
D'après le théo. des valeurs intermédiaires, $\underline{\text{l'équation}}$
$\underline{f(x) = n \text{ admet une unique solution positive } x_n.}$

• $f(\ln \ln n) = \ln n + \ln\ln n = o(n)$.
Donc à partir d'un certain rang, $x_n \geq \ln\ln n$,
d'où $\underline{x_n \underset{+\infty}{\longrightarrow} +\infty}$.

• On a :
$\ln n = \ln(e^{x_n} + x_n) = x_n + \ln(1 + x_n e^{-x_n})$.
$= x_n + x_n e^{-x_n} - \frac{x_n^2}{2} e^{-2x_n} + o(x_n^2 e^{-2x_n})$.
Donc $\underline{x_n \sim \ln n}$.

• Posons $y_n = x_n - \ln n$.
Alors $0 = y_n + x_n e^{-x_n} - \frac{x_n^2}{2} e^{-2x_n} + o(x_n^2 e^{-2x_n})$.
Donc $y_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, et :
$y_n \sim -x_n e^{-x_n} \sim \underline{\frac{-\ln n}{n}}$.

• Posons $z_n = y_n + \frac{\ln n}{n}$.
On a :
$0 = -\frac{\ln n}{n} + z_n + (\ln n + y_n)\frac{e^{-y_n}}{n} - \frac{x_n^2}{2} e^{-2x_n} + o(x_n^2 e^{-2x_n})$
$= z_n + \frac{\ln n(-y_n + o(y_n))}{n} + y_n \frac{e^{-y_n}}{n} - \frac{x_n^2}{2} e^{-2x_n} + o(x_n^2 e^{-2x_n})$
$= z_n + \frac{\ln n(-y_n + o(y_n))}{n} + y_n \frac{e^{-y_n}}{n} - \frac{x_n^2}{2n^2} e^{-2y_n} + o\left(\frac{x_n^2 e^{-2y_n}}{n^2}\right)$
$= z_n + \frac{\ln^2 n}{2n^2} + o\left(\frac{\ln^2 n}{2n^2}\right)$.
donc $z_n \sim -\frac{\ln^2 n}{2n^2}$.
Finalement, $\underline{x_n = \ln n - \frac{\ln n}{n} - \frac{\ln^2 n}{2n^2} + o\left(\frac{\ln^2 n}{n^2}\right)}$. D

$\boxed{3.3.3.}$
• On considère le réseau $\Lambda = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) + \mathbb{Z}^3$.
On colorie en bleu l'intérieur des cubes de ce réseau entièrement contenus ds la boule de rayon R, en rouge tous ceux qui sont entièrement à l'extérieur de la même boule, en blanc les autres.
Alors $\#$cubes bleus $\leq f(R) \leq \#$cubes bleus $+ \#$cubes blancs
volume bleu $\leq f(R) \leq$ volume bleu + volume blanc. (*)

• Soit M un point blanc ou rouge.
Soit K un point du cube contenant M n'appartenant pas à la boule de rayon R.
L'inégalité triangulaire impose :

$OM \geq OK - KM \geq R - \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Donc la boule $B(O, R - \frac{\sqrt{3}}{2})$ est bleue, et donc volume bleu $\geq \frac{4}{3}\pi\left(R - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3$.

• Soit M bleu ou blanc.

Soit K un point du cube contenant M, appartenant à $B(O, R)$.

Comme avant,

$$OM \leq OK + KM \leq R + \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Donc les zones bleue et blanche sont dans $B(O, R + \frac{\sqrt{3}}{2})$.

Donc $\mathrm{vol}(\text{bleu}) + \mathrm{vol}(\text{blanc}) \leq \frac{4}{3}\pi\left(R + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3$.

Avec $(\ast)$, $\underline{f(R) \underset{R \to +\infty}{\sim} \frac{4}{3}\pi R^3}$. $\square$

3.3.4.

1)

4.1.1 Si $\alpha=0$, l'exercice n'a pas d'intérêt.

On supposera $\alpha\neq 0$. On a alors:

$$(\mathrm{ch}\, n)^\alpha-(\mathrm{sh}\, n)^\alpha=\left(\frac{e^n+e^{-n}}{2}\right)^\alpha-\left(\frac{e^n-e^{-n}}{2}\right)^\alpha$$
$$=\frac{e^{n\alpha}}{2^\alpha}\left[(1+e^{-2n})^\alpha-(1-e^{-2n})^\alpha\right].$$
$$=\frac{e^{n\alpha}}{2^\alpha}\left[1+\alpha e^{-2n}-1+\alpha e^{-2n}+o(e^{-2n})\right].$$
$$=\frac{\alpha}{2^{\alpha-1}}e^{n(\alpha-2)}+o\left(e^{n(\alpha-2)}\right)$$

Donc $(\mathrm{ch}\, n)^\alpha-(\mathrm{sh}\, n)^\alpha\sim\frac{\alpha}{2^{\alpha-1}}e^{n(\alpha-2)}$.

1^{er} cas: $\alpha>2$. Alors par TCPSP, $\underline{\sum\left((\mathrm{ch}\, n)^\alpha-(\mathrm{sh}\, n)^\alpha\right)\text{ diverge}}$,
et $\sum_{n=0}^{N}\left((\mathrm{ch}\, n)^\alpha-(\mathrm{sh}\, n)^\alpha\right)\sim\sum_{n=0}^{N}\frac{\alpha}{2^{\alpha-1}}e^{n(\alpha-2)}$
$$\sim\frac{\alpha}{2^{\alpha-1}}\,\frac{e^{(N+1)(\alpha-2)}}{e^{\alpha-2}-1}.$$

2^{e} cas: $\alpha=2$. Alors par TCPSP, $\underline{\sum\left((\mathrm{ch}\, n)^\alpha-(\mathrm{sh}\, n)^\alpha\right)\text{ diverge}}$,
et $\sum_{n=0}^{N}\left((\mathrm{ch}\, n)^\alpha-(\mathrm{sh}\, n)^\alpha\right)\sim\sum_{n=0}^{N}\frac{\alpha}{2^{\alpha-1}}\sim\frac{\alpha}{2^{\alpha-1}}N.$

3^{e} cas: $\alpha<2$. Alors par TCPSP, $\underline{\sum\left((\mathrm{ch}\, n)^\alpha-(\mathrm{sh}\, n)^\alpha\right)\text{ converge}}$,
et $\sum_{n=N+1}^{\infty}\left((\mathrm{ch}\, n)^\alpha-(\mathrm{sh}\, n)^\alpha\right)\sim\sum_{n=N+1}^{\infty}\frac{\alpha}{2^{\alpha-1}}e^{n(\alpha-2)}$
$$\sim\frac{\alpha}{2^{\alpha-1}}\,\frac{e^{(N+1)(\alpha-2)}}{1-e^{\alpha-2}}\qquad\square$$

4.1.2 • Supposons que $\sum u_n$ converge.

$\forall n\in\mathbb{N},\ v_{n+1}-v_n=\frac{1}{2}\left(\sqrt{v_n^2+u_n}-v_n\right)=\frac{1}{2}\frac{u_n}{\sqrt{v_n^2+u_n}+v_n}$
$\leq\frac{1}{2}\frac{u_n}{2}$ (car $\forall n,\ v_n\geq 1$).
$\leq\frac{u_n}{4}$.

Donc par TCPSP, $\sum(v_{n+1}-v_n)$ converge, donc $\underline{(v_n)\text{ converge}}$.

• Supposons que (v_n) converge. Soit ℓ sa limite.
Alors $u_n=(2v_{n+1}-v_n)^2-v_n^2\longrightarrow 0$.
Donc il existe $M\geq 0$ tel que $\forall n,\ v_n\leq M,\ u_n\leq M$.
Alors, comme la suite (v_n) est croissante,
$\forall n\in\mathbb{N},\ u_n=2\left(\sqrt{v_n^2+u_n}+v_n\right)(v_{n+1}-v_n)$
$\leq 2\left(\sqrt{M^2+M}+M\right)(v_{n+1}-v_n)$
(v_n) converge, donc $\sum(v_{n+1}-v_n)$ converge,
donc par TCPSP, $\underline{\sum u_n\text{ converge}}$. $\square$

4.1.3.

1) Soit $x_0\in\mathbb{R}$ un point de discontinuité de f.
D'après le théorème de limite monotone, f admet une limite à gauche $f(x_0^-)$ et une limite à droite $f(x_0^+)$ avec $f(x_0^-)<f(x_0^+)$.
Par densité de $\mathbb{Q}$ ds $\mathbb{R}$, il existe $q_{x_0}\in\mathbb{Q}\cap\left]f(x_0^-),f(x_0^+)\right[$.

• Soit $x_1\in\mathbb{R}$, tel que $q_{x_0}=q_{x_1}$.
Supposons que $x_0<x_1$.
Alors $f(x_0^-)<q_{x_0}<f(x_0^+)\leq f(x_1^-)<q_{x_1}<f(x_1^+)$.
absurde!
De même, $x_1<x_0$ mène à une contradiction.
Donc $x_0=x_1$.

• Donc $q:\{\text{pts de discontinuité}\}\to\mathbb{Q}$ est injective.
Donc $\underline{\{\text{pts de discontinuité}\}\text{ est dénombrable}}$. $\square$

2) Soit (r_n) une énumération de $\mathbb{Q}$. Posons $f(x)=\sum_{r_n<x}\frac{1}{(n+1)^2}$

• f est strictement croissante, car pour $x<y$, il existe $n\in\mathbb{N}$ tq $x<r_n<y$ dc $f(x)-f(y)\geq\frac{1}{(n+1)^2}$.

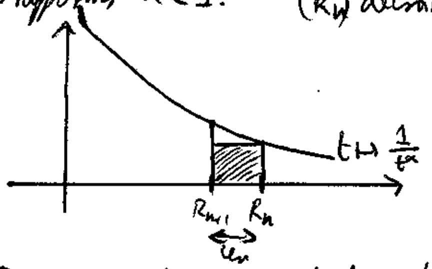
• Si $x\in\mathbb{Q}$, $x=r_k$ pour un certain k, donc:
$f(x^+)-f(x^-)\geq\frac{1}{(k+1)^2}$, donc f est discontinue en x.

• Si $x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ et $n\in\mathbb{N}$, alors il existe un voisinage de x ne contenant aucun r_i, $i\leq n$,
d'où $f(x^+)-f(x^-)\leq\sum_{i>n}\frac{1}{(i+1)^2}\xrightarrow[n\to\infty]{}0$.

Donc f est continue en x.

$\underline{\text{La réponse est donc OUI.}}$ $\square$

4.1.4 • Supposons $\alpha<1$. (R_n) décroît vers 0.



Si $\alpha<0$, $\frac{u_n}{R_n^\alpha}=o(u_n)$ et donc l'énoncé est trivial.
On suppose donc $\alpha\in[0,1[$.

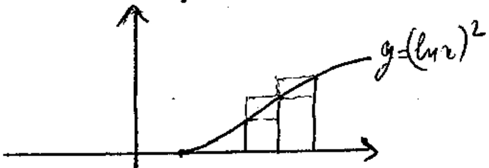
$\frac{u_n}{R_n^\alpha}\leq\int_{R_{n+1}}^{R_n}\frac{dt}{t^\alpha}$, d'où:

$\sum_{k=0}^{n}\frac{u_k}{R_k^\alpha}\leq\int_0^{R_0}\frac{dt}{t^\alpha}$, car $t\mapsto\frac{1}{t^\alpha}$ intégrable sur $]0,R_0[$. Donc, par TCPSP, $\underline{\sum\frac{u_k}{R_k^\alpha}\text{ converge}}$.

• Supposons $\alpha=1$.
$\frac{u_n}{R_n}=1-\frac{R_{n+1}}{R_n}$
Si $\frac{R_{n+1}}{R_n}$ ne tend pas vers 1, $\sum\frac{u_n}{R_n}$ diverge.
Si $R_{n+1}\sim R_n$, alors $\frac{u_n}{R_n}\sim\ln\left(\frac{R_{n+1}}{R_n}\right)$ et $\sum\ln\left(\frac{R_{n+1}}{R_n}\right)$ diverge. Par TCPSP, $\sum\frac{u_n}{R_n}$ diverge.

• Si $\alpha>1$, $\frac{u_n}{R_n}=o\left(\frac{u_n}{R_n^\alpha}\right)$, et par TCPSP, $\underline{\sum\frac{u_n}{R_n^\alpha}\text{ diverge}}$. $\square$

4.2.1. Comparaison série-intégrale :



$\forall n\in\mathbb{N}-\{0,1\}$, $\int_{n-1}^{n}(\ln t)^2\,dt \le (\ln n)^2 \le \int_{n}^{n+1}(\ln t)^2\,dt$.

$\int (\ln t)^2\,dt = [t(\ln t)^2] - 2\int \ln t\,dt = t(\ln t)^2 - 2(t\ln t - 1)$

Donc : $\forall n\in\mathbb{N}$,

$n(\ln n)^2 - 2n\ln n \le (\ln 1)^2 + \dots + (\ln n)^2 \le (n+1)\ln(n+1)^2 - 2(n+1)\ln(n+1)$.

Donc : $(\ln 1)^2 + \dots + (\ln n)^2 \sim n(\ln n)^2$.

Par TCPSP, la nature de $\sum \frac{1}{\sum_{k=1}^{n}(\ln k)^2}$ est la même que celle de $\sum \frac{1}{n(\ln n)^2}$, qui converge (série de Bertrand).

Donc $\sum \frac{1}{\sum_{k=1}^{n}\ln^2 k}$ converge. □

4.2.2.

1) Montrons que la série $\sum \frac{\sigma(n)}{n^2\ln n}$ diverge.

Posons :

$$a_N = \sum_{n=2^N+1}^{2^{N+1}} \frac{\sigma(n)}{n^2\ln n}.$$

On a :

$$a_N \ge \frac{1}{(2^{N+1})^2\ln(2^{N+1})}\sum_{\substack{n=2^N+1\\ \sigma(n)\ge 2^{N-1}}}^{2^{N+1}} \sigma(n)$$

(cette somme contient au moins 2^{N-1} termes).

$$\ge \frac{1}{(2^{N+1})^2\ln(2^{N+1})}\,2^{N-1}\cdot 2^{N-1}$$

$$\ge \frac{1}{16(N+1)\ln 2}$$

$\sum \frac{1}{N+1}$ diverge, donc par TCPSP, $\sum a_n$ aussi.

Or $\sum \frac{\sigma(n)}{n^2\ln n}$ et $\sum a_n$ sont de même nature, donc $\sum \frac{\sigma(n)}{n^2\ln n}$ diverge. □

2) Ici tout est possible.

- Si $\sigma = \mathrm{Id}$, $\sum \frac{\sigma(n)}{n^3}$ converge.
- Si σ est telle que, pour n pair, $\sigma(n) = n^3$, alors $\frac{\sigma(n)}{n^3}$ ne tend pas vers 0, donc $\sum \frac{\sigma(n)}{n^3}$ diverge. □

4.2.3.

- Posons $v_n = 2^{-n}\ln u_n$.

u_n est croissante. Si (u_n) convergeait, alors la limite l vérifierait, $l = l + l^2$, donc $l = 0$. absurde ! Donc $u_n \to +\infty$.

- On écrit alors : $\forall n\in\mathbb{N}$,

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{2^{n+1}}\left(\ln(u_n + u_n^2) - \ln(u_n^2)\right) = \frac{1}{2^{n+1}}\ln\left(1+\frac{1}{u_n}\right) \sim \frac{1}{2^{n+1}u_n}.$$

Par TCPSP, $\sum(v_{n+1}-v_n)$ converge. Soit α sa somme. Soit $\beta = e^{\alpha}$.

- Par TCRSP,

$$\sum_{n=N}^{\infty}(v_{n+1}-v_n) \underset{N\to+\infty}{\sim} \sum_{n=N}^{\infty}\frac{1}{2^{n+1}u_n} = o\left(\sum_{n=N}^{\infty}\frac{1}{2^{n+1}}\right) = o\left(\frac{1}{2^N}\right).$$

Donc

$$\alpha - v_N \underset{N\to\infty}{=} o\left(\frac{1}{2^N}\right)$$

$$u_N = e^{2^N v_N} = e^{2^N\left(\alpha + o\left(\frac{1}{2^N}\right)\right)} = \beta^{2^N} e^{o(1)}.$$

Donc $u_N \sim \beta^{2^N}$. □

4.2.4.

Soit $(p_0, p_1, \dots)$ la suite croissante des nombres premiers, et $S_k = \sum_{q_n\le p_k}\frac{1}{n}$ (avec éventuellement $S_k = +\infty$).

On a :

$$S_k = \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{\substack{p_k^i\mid n\\ p_k^{i+1}\nmid n\\ q_n\le p_k}}\frac{1}{n} = \sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{p_k^i}\sum_{q_n\le p_{k-1}}\frac{1}{n} = \left(\sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{p_k^i}\right)S_k = \frac{p_k}{p_k-1}S_k$$

et $S_0 = 1$, donc $S_k < \infty$.

La série demandée est :

$$\frac{S_0}{p_0} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{S_k - S_{k-1}}{p_k} = \frac{S_0}{p_0} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{S_k}{p_k^2}.$$

Mq $S_k \le 2\sqrt{p_k}$ par récurrence.

- $k=0$: OK.
- $k=1$: OK.
- Si $S_{k-1} \le 2\sqrt{p_{k-1}}$, alors

$$S_k = \frac{p_k}{p_k-1}S_{k-1} \le 2\sqrt{p_k}\sqrt{\frac{p_k p_{k-1}}{(p_k-1)^2}} \le 2\sqrt{p_k}\sqrt{\frac{p_k(p_k-2)}{(p_k-1)^2}} \le 2\sqrt{p_k}.$$

Donc $\frac{S_0}{p_0} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{S_k - S_{k-1}}{p_k} \le \frac{S_0}{p_0} + 2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{p_k^{3/2}} < \infty$.

Donc $\sum \frac{1}{n q_n}$ converge. □

4.3.1.

Soit $v_n = \sum_{k=10^n}^{10^{n+1}-1} \frac{1}{a^{p_k}}$.

On a : $v_n = \sum_{k=10^n}^{10^{n+1}-1} \frac{1}{a^{n+1}} = \frac{10^{n+1}-10^n}{a^{n+1}} = \frac{9}{a}\left(\frac{10}{a}\right)^n$.

Comme $\frac{1}{a^{p_k}} \geq 0$, par le théorème sur les séries groupées, $\sum \frac{1}{a^{p_k}}$ converge ssi $\sum v_n$ converge, ssi $a>10$, et dans ce cas :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{a^{p_n}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{9}{a}\left(\frac{10}{a}\right)^n = \frac{9}{a}\,\frac{1}{1-\frac{10}{a}} = \frac{9}{a-10}.$$ □

4.3.2. Posons $S_n = \sum_{i=1}^{n} a_i^2$.

- Supposons que $\sum a_i^2 < \infty$.

Soit $\ell = \sum_{i=1}^{\infty} a_i^2 > 0$. Alors $a_n \to \frac{1}{\ell} > 0$.

Par TCPSP, $S_n \sim \frac{n}{\ell^2}$, donc $S_n \to +\infty$: absurde !

- Donc $S_n \to +\infty$.

On a $S_n - S_{n-1} \sim \frac{1}{S_n^2}$.

Pour $\alpha \in \mathbb{R}^*$,

$$S_n^\alpha - S_{n-1}^\alpha = \left(S_{n-1} + \frac{1}{S_n^2} + o\left(\frac{1}{S_n^2}\right)\right)^\alpha - S_{n-1}^\alpha$$
$$= S_{n-1}^\alpha\left[\left(1+\frac{1}{S_n^2 S_{n-1}} + o\left(\frac{1}{S_n^2 S_{n-1}}\right)\right)^\alpha - 1\right].$$

Or $\frac{S_n}{S_{n-1}} - 1 \sim \frac{1}{S_n^2 S_{n-1}}$, donc $\frac{S_n}{S_{n-1}} \to 1$

et $S_n \sim S_{n-1}$. Donc

$$S_n^\alpha - S_{n-1}^\alpha = S_{n-1}^\alpha\left[\left(1+\frac{1}{S_{n-1}^3} + o\left(\frac{1}{S_{n-1}^3}\right)\right)^\alpha - 1\right]$$
$$= S_{n-1}^\alpha\left[1 + \frac{\alpha}{S_{n-1}^3} - 1 + o\left(\frac{1}{S_{n-1}^3}\right)\right].$$

$S_n^\alpha - S_{n-1}^\alpha \sim \alpha S_{n-1}^{\alpha-3}$

Prenons $\alpha = 3$.

Alors $S_n^3 - S_{n-1}^3 \to 3$.

Par TCPSP, $S_n^3 \sim 3n$, donc $S_n \sim \sqrt[3]{3n}$.

Donc $a_n \sim \frac{1}{\sqrt[3]{3n}}$ □

4.3.3.

Tous les triangles obtenus sont semblables aux triangles initiaux.

De plus, si p et q sont les raisons de similitude T_1 et T_2 resp. par rapport à T :

les raisons des triangles obtenus au cours du processus par rapport aux triangles initiaux sont de la forme $p^n q^m$, $(n,m) \in \mathbb{N}^2$.

À un triangle de raison $p^n q^m$ on associe le coefficient $\frac{1}{2^{n+m}}$.

Après k découpages, on note S_k la somme des coefficients des triangles obtenus.

Il est clair que (S_k) est constante.

Donc $\forall k$, $S_k = S_0 = N$.

Supposons maintenant qu'à la fin il n'y a pas plus de K triangles identiques.

Alors, on doit avoir :

$$N = S_{\text{à la fin}} < K \sum_{n,m} \frac{1}{2^{n+m}} = 4K.$$
$$\frac{N}{4} < K.$$

C'est exactement ce qu'il fallait prouver. □

Rq. : il y a aussi une solution combinatoire élémentaire.

4.3.4.

Nous allons appliquer le critère de condensation de Cauchy.

u_n décroît vers 0.

Donc, avec le critère de condensation :

$$\sum \min\left(u_n, \frac{1}{n\ln n}\right) \text{ CV} \Leftrightarrow \sum \min\left(2^n u_{2^n}, \frac{1}{n}\right) \text{ CV}.$$
$$\Leftrightarrow \sum \min\left(v_n, \frac{1}{n\ln 2}\right) \text{ CV}$$

où $v_n = 2^n u_{2^n}$.

v_n est décroissante, positive, convergente vers 0.

Donc :

$$\sum \min\left(v_n, \frac{1}{n\ln 2}\right) \text{ CV} \Leftrightarrow \sum \min\left(2^n v_{2^n}, \frac{1}{\ln 2}\right) \text{ CV}.$$
$$\Leftrightarrow \sum 2^n v_{2^n} \text{ CV}.$$
$$\Leftrightarrow \sum v_n \text{ CV}.$$
$$\Leftrightarrow \sum 2^n u_{2^n} \text{ CV}.$$
$$\Leftrightarrow \sum u_n \text{ CV}.$$ □

8.1.1. $\forall n \in \mathbb{N}$, $|e^{n \sin n}| \leq e^n$.

Or $\sum e^n z^n$ a pour rayon $1/e$.

Donc $R \geq 1/e$.

1 est valeur d'adhérence de $(\sin n)_n$.

Donc soit (k_n) strict. croissante telle que $\sin(k_n) \xrightarrow[n \to \infty]{} 1$.

Donc, pour z tel que $|z| > 1/e$, $\left(e^{k_n \sin k_n} z^{k_n}\right)_n$ ne tend pas vers 0.

Donc $R \leq 1/e$.

Finalement, $\underline{R = 1/e}$. □

8.1.2. Posons $f(z) = \sum_{n \geq 0} \frac{a_n}{n!} z^n$

Soit R le rayon de convergence. On vérifie facilement que $R > 0$ (car $a_n \leq 1$)

$\forall z \in B(0, R)$,

$$f(z)^2 = \sum_{n \geq 0} \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k a_{n-k}}{k!(n-k)!} z^n$$

(produit de Cauchy).

$$= \sum_{n \geq 0} \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_k a_{n-k} \right) \frac{z^n}{n!}$$

$$= \sum_{n \geq 0} 2 a_{n+1} \frac{z^n}{n!}$$

$$= 2 f'(z)$$

Il existe I intervalle ouvert contenant 0 tel que :

$\forall x \in I$

$$f(x) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}x}$$

$$= \sum_{n \geq 0} \frac{1}{2^n} x^n.$$

donc $\forall n$, $\frac{a_n}{n!} = \frac{1}{2^n}$

$\underline{a_n = \frac{n!}{2^n}}$. □

8.1.3. La réponse est non.

Prenons $f(z) = \sum_{n \geq 0} z^{n!}$.

$R = 1$.

Supposons qu'il existe un tel U.

Alors $U \cap \partial D \neq \emptyset$.

$\mathbb{Q}$ étant dense dans $\mathbb{R}$, il existe $\theta \in \mathbb{Q}$ tel que

$e^{2i\pi\theta} \in U \cap \partial D$.

On note $\theta = p/q$, $p, q \in \mathbb{N}$. Pour $r < 1$,

$$f(re^{2i\pi\theta}) = \sum_{n \geq 0} r^{n!} e^{2\pi i (p/q) n!}$$

$$= \underbrace{\sum_{n=0}^{q} r^{n!} e^{2\pi i (p/q) n!}}_{\text{borné quand } r \to 1} + \sum_{n \geq q+1} r^{n!}$$

$$\sum_{n \geq q+1} r^{n!} \xrightarrow[r \to 1]{} +\infty$$

Donc $|f(re^{2i\pi\theta})| \xrightarrow[r \to 1^-]{} +\infty$.

La réponse est donc $\underline{\text{NON}}$. □

8.1.4. Soit $f(z) = \prod_{i=1}^{m} \frac{1}{1 - z^{a_i}}$, définie sur $B(0,1)$.

Alors : $\forall z \in B(0,1)$,

$$f(z) = \prod_{i=1}^{m} \left(\sum_{k=0}^{\infty} z^{k a_i} \right)$$

$$= \sum_{n \geq 0} \left(\sum_{\substack{(x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{N}^k \\ \sum a_i x_i = n}} 1 \right) z^n = \sum_{n \geq 0} p(n) z^n.$$

f est une fraction rationnelle : 1 est pôle de degré m et les autres pôles sont de degré $< m$.

Notons $\omega_1, \dots, \omega_p$ les pôles avec $\omega_1 = 1$.

$\exists c_{ij}$, $\forall z$, $|z| < 1 \Rightarrow f(z) = \frac{\alpha}{(1-z)^m} + \sum_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq p-1}} \frac{c_{ij}}{(\omega_i - z)^j}$.

En développant en série entière chaque terme, il vient :

$$a_n = \alpha \binom{n+m-1}{n} + \sum_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq p-1}} c_{ij} \binom{n+j-1}{n} \omega^{n-j}.$$

$$\sim \alpha \frac{n^{m-1}}{(m-1)!}.$$

Or $\alpha = \frac{1}{a_1 \dots a_m}$.

Donc $a_n \sim \frac{1}{a_1 \dots a_m} \frac{n^{m-1}}{(m-1)!}$. □

8.2.1.

1) $\sum n|a_n|$ converge, donc par TCPSP, $\sum |a_n|$ aussi. Donc $R \geq 1$.

2) Si $\forall n \geq 2, a_n = 0$, le résultat est évident.
Supposons que $\exists n \geq 2, a_n \neq 0$.
Soient $z_1, z_2 \in D$ tels que $f(z_1) = f(z_2)$ et $z_1 \neq z_2$. Alors:

$$\sum_{n\geq 2} a_n (z_2^n - z_1^n) = (z_1 - z_2) a_1.$$

$(z_2 - z_1)\sum_{n\geq 2} a_n($

$$|a_1| = \left|\sum_{n\geq 2} a_n \left(\sum_{k=0}^{n-1} z_2^k z_1^{n-k-1}\right)\right|$$

$< \sum_{n\geq 2} n|a_n|$ (inégalité triangulaire).
$\uparrow$ stricte car $\exists n\geq 2, a_n\neq 0$.
Absurde!
Donc f est injective. □

8.2.2 On remarque: $\forall n>0, \sin(n\pi\sqrt{3}) \neq 0$ car $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$.

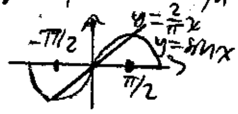
$\sum \frac{1}{\sin(n\pi\sqrt{3})}$ diverge puisque $|\sin(n\pi\sqrt{3})| \leq 1$.

Donc $R \leq 1$.

Soit $p_n \in \mathbb{N}$ l'entier tel que $p_n - \frac{1}{2} \leq n\sqrt{3} < p_n + \frac{1}{2}$.

Soit $\varepsilon_n = n\sqrt{3} - p_n$.

Par convexité, on a:



$\forall x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}], \quad |\sin x| \geq \frac{2}{\pi}|x|$.

Donc: $\forall n, |\sin(n\pi\sqrt{3})| = |\sin(\pi\varepsilon_n)| \geq \frac{2}{\pi} |\pi\varepsilon_n| = 2|\varepsilon_n|$

$$\frac{1}{|\sin(n\pi\sqrt{3})|} \leq \frac{1}{2|\varepsilon_n|} = \frac{1}{2|n\sqrt{3} - p_n|}$$
$$= \frac{n\sqrt{3}+p_n}{2|3n^2-p_n^2|} \leq \frac{n\sqrt{3}+p_n}{2}$$

car $|3n^2 - p_n^2| \in \mathbb{N}^*$.

Donc $\frac{1}{|\sin(n\pi\sqrt{3})|} = O(n)$, donc $R = 1$. □

On a: $R = 1$.

8.2.3. Posons $H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$.

On a: $\ln(n) \sim H_n$.

$\forall n, \ln n \in \mathbb{R}_+^*$, et $\sum \ln n$ diverge.

Donc:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\ln n) x^n \underset{x\to 1}{\sim} \sum_{n=1}^{\infty} H_n x^n$$

Or:

$$\forall x \in]-1,1[, \quad \sum_{n=1}^{\infty} H_n x^n = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right) x^n$$
$$= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=k}^{\infty} \frac{1}{k} x^n \quad \text{(Fubini).}$$
$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \frac{x^k}{1-x} = \frac{-\ln(1-x)}{1-x}.$$

Donc $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (\ln n)x^n \underset{x\to 1^-}{\sim} -\frac{\ln(1-x)}{1-x}$. □

8.2.4. Pour $k\in\mathbb{N}$, $r \in]0,1[$,

$$\int_0^{2\pi} f(re^{i\theta}) e^{-ki\theta}\, d\theta = \int_0^{2\pi} \sum_{n\geq 0} a_n r^n e^{ni\theta} e^{-ki\theta}\, d\theta.$$
$$= \sum_{n\geq 0} \int_0^{2\pi} a_n r^n e^{(n-k)i\theta}\, d\theta$$

par convergence normale.

$$= a_k r^k \cdot 2\pi.$$

donc:

$$2\pi r^k |a_k| = \left|\int_0^{2\pi} f(re^{i\theta}) e^{-ki\theta}\, d\theta\right|.$$
$$\leq \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|\, d\theta.$$
$$\leq \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1-r}$$
$$\leq \frac{2\pi}{1-r}.$$
$$|a_k| \leq \frac{1}{r^k(1-r)}.$$

On choisit $r = \frac{k}{k+1}$:

$$|a_k| \leq \frac{1}{\frac{k^k}{(k+1)^k}\frac{1}{k+1}} = (k+1)\left(1+\frac{1}{k}\right)^k.$$
$$\leq (k+1) e^{k\ln(1+\frac{1}{k})}$$
$$< (k+1) e^{k\cdot\frac{1}{k}} = (k+1)e \quad \text{(par convexité)} \ □$$

8.3.1

Pour $x \in [-1, 1[$, posons $f(x) = \sum_{n\geq 0} \frac{x^{3n+1}}{3n+1}$.

f est bien définie car le rayon de $\sum \frac{z^{3n+1}}{3n+1}$ est 1 et $\sum \frac{(-1)^{3n+1}}{3n+1}$ converge d'après le CSCVSA.

f est dérivable sur $]-1, 1[$:

$\forall x \in]-1, 1[$, $f'(x) = \sum_{n\geq 0} x^{3n} = \frac{1}{1-x^3}$.

$$f(x) - f(0) = \int_0^x \frac{dt}{1-t^3}$$

$$= \int_0^x \left(\frac{1/3}{1-t} + \frac{\frac{2}{3}+\frac{1}{3}t}{1+t+t^2} \right) dt$$

$$= -\frac{1}{3}\ln(1-x) + \int_0^x \left(\frac{1}{6}\frac{2t+1}{t^2+t+1} + \frac{1}{2}\frac{1}{t^2+t+1}\right) dt$$

$$= -\frac{1}{3}\ln(1-x) + \frac{1}{6}\ln(x^2+x+1) + \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{Arctan}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right)\right).$$

$$= f(x)$$

D'après CSCVSA,

$\forall x \in [-1, 0], \forall N \in \mathbb{N}$,

$$\left| \sum_{n\geq N} \frac{x^{3n+1}}{3n+1} \right| \leq \frac{1}{3N+1}$$

Il y a donc convergence normale sur $[-1, 0]$ et f est continue en -1.

Donc

$$\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{3n+1} = -f(-1) = +\frac{1}{3}\ln 2 + \frac{\pi}{3\sqrt{3}}. \quad \square$$

8.3.2. $f(\bar{B}(0,1))$ étant compact, l'aire est bien définie. Notons $K = f(\bar{B}(0,1))$.

f est injective, donc f est bijective entre $\bar{D}$ et K. $\bar{D}$ étant compact, c'est en fait un homéomorphisme.

De plus, f est C^1 sur D, de jacobien :

$$\mathrm{Jac}(f)(x,y) = |f'(x+iy)|^2$$

(calcul à justifier !).

En faisant le changement de variables $(x,y) \mapsto (u,v) = f(x,y)$, si A_r est l'aire de $f(\bar{D}_r)$ où $\bar{D}_r = \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z| \leq r\}$, pour $r<1$,

$$A_r = \iint_{(x,y)\in \bar{D}_r} |f'(x+iy)|^2 \,dx\,dy.$$

$$= \iint_{\substack{0\leq s\leq r \\ 0\leq \theta < 2\pi}} |f'(se^{i\theta})|^2 s\,ds\,d\theta.$$

$$= \int_0^r \left(\int_0^{2\pi} |f'(se^{i\theta})|^2 d\theta \right) s\,ds$$

$$= \int_0^r \left(\int_0^{2\pi} \sum_{n\geq 0}\sum_{m\geq 0} a_{n+1}\overline{a_{m+1}}\,(n+1)(m+1)s^{n+m} e^{i\theta(n-m)} d\theta \right) s\,ds$$

(produit de Cauchy).

$$= \sum_{n\geq 0}\sum_{m\geq 0} a_{n+1}\overline{a_{m+1}} \iint_0^{2\pi} (n+1)(m+1)s^{n+m} e^{i\theta(n-m)} d\theta\, s\,ds$$

(conv. normale).

$$= \pi \sum_{n\geq 1} n|a_n|^2 r^{2n} \xrightarrow[r\to 1]{} \pi \sum_{n\geq 1} n|a_n|^2 \text{ (à justifier !).}$$

On remarque que $A_r \xrightarrow[r\to 1]{} A_1$. (pourquoi ?)

Donc :

$$A_1 = \pi \sum_{n\geq 1} n|a_n|^2. \quad \square$$

8.3.3. On procède de manière analogue à 8.1.2., en prouvant l'équation :

$$2x f'(x) - 2x f^2(x) + f(x) = 3x\zeta(2)$$

où $f(x) = \sum_{n\geq 0} \zeta(2n) x^n$.

8.3.4.

1^{er} cas : $\forall z \in \partial D(0,1)$, $f(z) = 0$.

Comme en 8.2.4, pour $k \in \mathbb{N}$, $r \in]0, 1[$,

$$2\pi a_k r^k = \int_0^{2\pi} f(re^{i\theta}) e^{-ki\theta} d\theta.$$

$(r,\theta) \mapsto f(re^{i\theta})e^{-ik\theta}$ est continue sur $[0,1]\times\mathbb{R}$.

Donc $r \mapsto \int_0^{2\pi} f(re^{i\theta})e^{-ik\theta}d\theta$ est continue sur $[0,1]$.

En faisant $r \to 1$, on a : $\forall k$, $a_k = 0$. $\square$

2^d cas : Soit $g(z) = \prod_{k=0}^{n} f(e^{ik\alpha}z)$.

Avec le 1^{er} cas, $g \equiv 0$.

$\forall p \in \mathbb{N}^*$, $g\left(\frac{1}{p}\right) = 0$.

Donc $\exists k \in [\![0, n-1]\!]$,

$f\left(\frac{1}{p}e^{ik\alpha}\right) = 0$ pour une infinité de valeurs de p.

D'après le principe des zéros isolés, $f \equiv 0$ sur D et par continuité sur $\bar{D}$. $\square$

9.1.1.

Posons $f(z)=\sum_{n\geq 0}\frac{z^n}{\binom{2n}{n}}$. Alors $R\geq 1$ car $\binom{2n}{n}\geq 1$.

$\forall z\in B(0,1)$,

$$z^2 f'(z)=\sum_{n\geq 0}\frac{n z^{n+1}}{\binom{2n}{n}}=\sum_{n\geq 0}\frac{n\, n!\, n!}{(2n)!}z^{n+1}$$

$$=\sum_{n\geq 0}\frac{(n+1)!\,n!}{(2n)!}z^{n+1}-\sum_{n\geq 0}\frac{n!^2}{(2n)!}z^{n+1}$$

$$=2\sum_{n\geq 0}\frac{(n+1)!^2}{(2(n+1))!}(2n+1)z^{n+1}-zf(z).$$

$$=4zf'(z)-2f(z)+2-zf(z)$$

$$z(z-4)f'(z)+(z+2)f(z)=2.$$

Intégrons à présent.

$$\int\frac{x+2}{x(x-4)}dx=\int\left(\frac{3}{2}\frac{1}{x-4}-\frac{1}{2}\frac{1}{x}\right)dx$$

$$=\frac{3}{2}\ln|x-4|-\frac{1}{2}\ln|x|$$

La solution générale est donc, sur $]0,1[$

$$f_0(x)=(4-x)^{3/2}x^{1/2}.$$

On pose $f(x)=(4-x)^{3/2}x^{1/2}g(x)$.

Alors : $\forall x\in]0,1[$,

$$g'(x)\cdot x(x-4)(4-x)^{3/2}x^{1/2}=2.$$

$$g'(x)=-\frac{2(4-x)^{1/2}}{x^{3/2}}$$

$$\int\frac{(4-x)^{1/2}dx}{x^{3/2}}=\int\frac{1}{2}\left(\frac{4}{u^2+1}-4\right)du.$$

$$\left(u=\sqrt{\frac{4-x}{x}}\right)$$

$$=2(\operatorname{Arctan}u-2u)$$

$$=2\left(\operatorname{Arctan}\sqrt{\frac{4-x}{x}}-\sqrt{\frac{4-x}{x}}\right).$$

Les solutions sont donc : $\forall x\in]0,1[$,

$$f(x)=4\sqrt{\frac{x}{(4-x)^3}}\left(-\operatorname{Arctan}\sqrt{\frac{4-x}{x}}+\sqrt{\frac{4-x}{x}}+c\right).$$

$(c\in\mathbb{R})$.

Au voisinage de 0 :

$$f(x)=1+\frac{x}{2}+o(x)$$

$$=1+\left(-\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}c\right)\sqrt{x}+o(\sqrt{x}).$$

Donc $c=\frac{\pi}{2}$.

Par convergence normale, f est continue sur $[0,1]$.

Donc $f(x)\xrightarrow[x\to 1^-]{}\frac{4}{3\sqrt{3}}\left(-\frac{\pi}{3}+\sqrt{3}+\frac{\pi}{2}\right)=f(1)$.

Donc $f(1)=\frac{4}{3}+\frac{2\pi}{9\sqrt{3}}$.

9.1.2.

Voir 8.3.4.

9.1.3.

Voir 8.1.4.

9.1.4

Voir 8.3.3.

9.2.1.

1er cas : v et w ne sont pas colinéaires.

Alors $f(\mathbb{C}) = f(K)$, où $K = \{t_1 v + t_2 w / (t_1, t_2) \in [0,1]^2\}$.
K est compact et f continue.
Donc $f(K)$ est compact, donc borné dans $\mathbb{C}$.
Le théorème de Liouville impose donc que f est constante.

2è cas : v et w sont colinéaires, et $\frac{v}{w} \notin \mathbb{Q}$.

Quitte à considérer $g(t) = f(e^{-i\theta}z)$ avec $\theta = \mathrm{Arg}(v)$, on peut supposer $v, w \in \mathbb{R}^*$.
D'après la classification des sous-groupes additifs de $\mathbb{R}$, comme $v/w \notin \mathbb{Q}$, $v\mathbb{Z} + w\mathbb{Z}$ est dense dans $\mathbb{R}$. Or $(f - f(0))(v\mathbb{Z} + w\mathbb{Z}) = \{0\}$.
Donc d'après le théorème des zéros isolés, $f - f(0) = 0$, donc f est constante.

3è cas : v et w sont colinéaires, et $\frac{v}{w} \in \mathbb{Q}$.

Quitte à considérer $g(t) = f(\alpha z)$ avec α bien choisi, on peut supposer que $v, w \in \mathbb{N}^{*2}$.
Soit $d = v \wedge w$. Il suffit donc de trouver f non constante telle que $f(z) = f(z+d)$.
$f(z) = \cos(2\pi z)$ convient.

La condition recherchée est donc $\frac{v}{w} \in \mathbb{Q}$. □

9.2.2

1) Pour $z \in U$ et $r \geq 0$ tels que
$$|z - z_0| < r < d,$$
on pose :
$$F_{r,z} : [0,1] \longrightarrow \mathbb{C}$$
$$\lambda \longmapsto \frac{r}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{f(z + \lambda(re^{iu} + z_0 - z)) - f(z)}{z_0 + re^{iu} - z} e^{iu}\, du$$

Notons $g_{r,z}(\lambda, u) = \frac{f(z + \lambda(re^{iu} + z_0 - z)) - f(z)}{z_0 + re^{iu} - z} e^{iu}$

$\partial g_{r,z}/\partial \lambda$ est continue sur le compact $[0,1] \times [0, 2\pi]$, donc uniformément continue. Soit $\varepsilon > 0$, et soit $\eta > 0$ tel que : $\forall (\lambda, \lambda', u, u') \in [0,1]^2 \times [0, 2\pi]^2$,
$|\lambda - \lambda'| \leq \eta$ et $|u - u'| \leq \eta$
$\Rightarrow \left|\frac{\partial g_{r,z}}{\partial \lambda}(\lambda, u) - \frac{\partial g_{r,z}}{\partial \lambda}(\lambda', u')\right| \leq \varepsilon$.

Alors pour $-\varepsilon \leq h \leq \varepsilon$:

$$\left|\frac{F_{r,z}(\lambda + h) - F_{r,z}(\lambda)}{h} - \frac{r}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\partial g_{r,z}}{\partial \lambda}(\lambda, u)\, du\right|$$

$$= \frac{r}{2\pi}\left|\int_0^{2\pi}\left(\frac{g_{r,z}(\lambda + h, u) - g_{r,z}(\lambda, u)}{h} - \frac{\partial g_{r,z}}{\partial \lambda}(\lambda, u)\right) du\right|$$

$$\leq \frac{r}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|\underbrace{\frac{g_{r,z}(\lambda + h, u) - g_{r,z}(\lambda, u)}{h}}_{= \frac{\partial g_{r,z}}{\partial \lambda}(\lambda + \mu, u)} - \frac{\partial g_{r,z}}{\partial \lambda}(\lambda, u)\right| du$$

$= \frac{\partial g_{r,z}}{\partial \lambda}(\lambda + \mu, u)$ pour un certain μ entre 0 et h par les accroissements finis.

$$\leq \frac{r}{2\pi}\int_0^{2\pi} \varepsilon\, du = r\varepsilon.$$

Donc :
$$F'_{r,z}(\lambda) = \frac{r}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\partial g_{r,z}}{\partial \lambda}(\lambda, u)\, du$$
$$= \frac{r}{2\pi}\int_0^{2\pi} f'(z + \lambda(re^{iu} + z_0 - z))\, e^{iu}\, du.$$
$$= \frac{1}{2\pi i\lambda}\int_0^{2\pi} f'(z + \lambda(re^{iu} + z_0 - z))\, i\lambda re^{iu}\, du$$
$$= \frac{1}{2\pi i\lambda} \cdot 0 = 0.$$

Donc $F_{r,z}$ est constante, et :
$$F_{r,z}(0) = 0 = F_{r,z}(1).$$
d'où :
$$\int_0^{2\pi} e^{iu}\frac{f(z + (re^{iu} + z_0 - z))}{z_0 + re^{iu} - z}\, du = f(z)\int_0^{2\pi} \frac{e^{iu}\, du}{z_0 + re^{iu} - z}.$$
$$= \frac{f(z)}{r}\int_0^{2\pi} \sum_{n \geq 0}\left(\frac{z - z_0}{re^{iu}}\right)^n du.$$
$$= \frac{f(z)}{r}\sum_{n \geq 0}\int_0^{2\pi}\left(\frac{z - z_0}{r}\right)^n e^{-inu}\, du$$
(conv. normale).
$$= \frac{f(z)}{r}\int_0^{2\pi} du = \frac{2\pi f(z)}{r}.$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + re^{iu})}{z_0 + re^{iu} - z}\, rie^{iu}\, du = 2\pi i f(z).$$
$$= \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + re^{iu})}{\cancel{re^{iu}}}\sum_{n \geq 0}\left(\frac{z - z_0}{re^{iu}}\right)^n \cancel{r}i\cancel{e^{iu}}\, du.$$
$$= \sum_{n \geq 0}(z - z_0)^n\int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + re^{iu})}{r^n}\, ie^{-inu}\, du.$$
(conv. normale).

Et on en déduit le résultat.

2) Par l'absurde : soit $\lambda \in \mathbb{C}$ et $r > 0$ tels que $\mathrm{Im} f \cap B(\lambda, r) = \emptyset$.
Soit $g : z \mapsto \frac{1}{f(z) - \lambda}$.
g est C^1, donc avec 1), g est une fonction entière sur $\mathbb{C}$.

De plus, g est bornée.
Donc avec le théorème de Liouville, g est constante, et donc f l'est aussi. $\square$

D'autre part, $f : z \mapsto e^z$ n'est pas surjective.

3) La composée de deux fonctions analytiques est C^1, donc analytique. $\square$

9.2.3.

Voir 8.2.4.

9.3.1. 1) Soit $z_0 \in B(0,1)$ tel que :

$\forall z \in B(0,1),\ |f(z)| \leq |f(z_0)|$.

Je peux supposer que $f(z_0) \in \mathbb{R}_+$.

Soit $S = \{z \in B(0,1) \mid f(z) = f(z_0)\}$.

S est fermé par continuité de f.

Montrons que S est ouvert.

Soit $z_1 \in S$.

Soit $r>0$ tel que $r < 1 - |z_1|$.

Alors :

- $\int_0^{2\pi} f(z_1 + re^{i\theta})\,d\theta$

$= \int_0^{2\pi} \sum_{n \geq 0} a_n (z_1 + re^{i\theta})^n d\theta$

$= \sum_{n\geq 0} a_n \int_0^{2\pi} (z_1 + re^{i\theta})^n d\theta$

(Conv. normale).

$= \left(\sum_{n\geq 0} a_n z_1^n\right) 2\pi$

$= f(z_1) \cdot 2\pi$.

- $\left|\int_0^{2\pi} f(z_1 + re^{i\theta}) d\theta\right|$

$\leq |f(z_1)| \cdot 2\pi$

(inégalité triangulaire).

On en déduit que :

$\forall \theta, |f(z_1 + re^{i\theta})| = |f(z_1)| = f(z_1)$

- $\left|\mathrm{Re} \int_0^{2\pi} f(z_1 + re^{i\theta}) d\theta\right|$

$\leq \int_0^{2\pi} |\mathrm{Re}\, f(z_1 + re^{i\theta})|\, d\theta$

$\leq \int_0^{2\pi} |f(z_1 + re^{i\theta})|\, d\theta$.

$\leq f(z_1) \cdot 2\pi$.

D'où :

$\forall \theta, |\mathrm{Re}(f(z_1 + re^{i\theta}))| = f(z_1)$.

Donc : $\forall z \in B(z_1, 1 - |z_1|)$,

$f(z) = \pm f(z_1)$

Par continuité,

$\forall z \in B(z_1, 1 - |z_1|)$,

$f(z) = f(z_1)$, d'où $z \in S$.

Donc S est ouvert.

Par connexité de $B(0,1)$,

$\underline{S = B(0,1)}$. □

2)

$f(z) = \sum_{n \geq 1} a_n z^n$.

Donc $g(z) = \frac{f(z)}{z} = \sum_{n\geq 0} a_{n+1} z^n$ est une série entière.

Posons, pour $r \in [0,1[$,

$g_r(z) = g(rz)$

g_r est une série entière sur $B(0, 1/r)$, donc sur $\overline{B(0,1)}$.

Par 1), le maximum de $|g_r(z)|$ pour $z \in \overline{B(0,1)}$ est atteint sur le bord $\partial B(0,1)$, en un point ζ.

Donc :

$\forall z \in \overline{B(0,1)} \setminus \{0\}$,

$|g_r(z)| \leq |g_r(\zeta)| = \left|\frac{f(r\zeta)}{r\zeta}\right|$.

$\leq \frac{1}{r}$.

$\forall z \in \overline{B(0,r)} \setminus \{0\}$.

$\left|\frac{f(z)}{z}\right| \leq \frac{1}{r}$.

En faisant $r \to 1$,

$\forall z \in B(0,1)$,

$\underline{|f(z)| \leq |z|}$.

$|f'(0)| = \lim_{z\to 0} \left|\frac{f(z)}{z}\right| \leq 1$. □

Si il existe z tel que $|f(z)| = |z|$ ou si $|f'(0)| = 1$, 1) impose que g est constante, et donc $\underline{f \text{ est une rotation}}$. □

3) $\forall z \in B(0,1)$,

$\phi_a(z) = (z-a) \sum_{n\geq 0} (\bar{a} z)^n$

ϕ_a est bien une série entière de rayon >1.

Pour $z \in \partial B(0,1)$,

$|\phi_a(z)| = \left|\frac{1}{z} \frac{z-a}{\bar{z} - \bar{a}}\right| = 1$.

Par 1, $\forall z \in B(0,1)$,

$|\phi_a(z)| \leq 1$.

Donc $\phi_a : B(0,1) \to B(0,1)$.

Finalement, ϕ_a est bijective, et :

$\phi_a^{-1}(z) = \frac{z+a}{1+\bar{a}z}$ est bien une série entière de rayon >1. □

ϕ_a est bien un automorphisme du disque.

4) Soit ρ un automorphisme du disque.

Soit $a = \rho(0)$.

Soit $\rho_0 = \phi_a \circ \rho$.

Alors $\rho_0(0) = \phi_a(\rho(0)) = \phi_a(a) = 0$

Avec 2, $|\rho_0'(0)| \leq 1$.

$\rho_0^{-1} = (\phi_a \circ \rho)^{-1}$

$= \rho^{-1} \circ \phi_a^{-1}$

est encore une série entière $B(0,1) \to B(0,1)$, et $\rho_0^{-1}(0) = 0$.

Donc, avec 2,

$|(\rho_0^{-1})'(0)| = \frac{1}{|\rho_0'(0)|} \leq 1$.

Donc $|\rho_0'(0)| = 1$.

Avec 2,

ρ_0 est une rotation.

Il existe donc une rotation r_θ telle que :

$\rho = \phi_{-a} \circ r_\theta$.

<u>Les automorphismes du disque sont donc les composées d'une transformation de Moebius et d'une rotation.</u> □

9.3.2

Voir 8.1.3.

<u>Remarque</u> :

Se référer à l'exercice 9.2.2 pour prouver le résultat admis.

10.1.1

Soit $f :]1,+\infty[\to \mathbb{R}$

$\alpha \mapsto \int_0^\pi \ln(\alpha - \cos x)\,dx$

Notons $g(x,\alpha) = \ln(\alpha - \cos x)$, définie sur $[0,\pi] \times]1,+\infty[$: elle est C^1.

On en déduit que f est C^1 et :

$$\forall \alpha \in]1,+\infty[,\ f'(\alpha) = \int_0^\pi \frac{\partial g}{\partial \alpha}\,dx$$

$$= \int_0^\pi \frac{dx}{\alpha - \cos x}$$

$$= \int_0^{+\infty} \frac{2du}{(1+u^2)\left[\alpha - \frac{1-u^2}{1+u^2}\right]} \quad \left(u = \tan\frac{x}{2}\right)$$

$$= \int_0^{+\infty} \frac{2du}{\alpha(1+u^2) - (1-u^2)}$$

$$= \int_0^{+\infty} \frac{2du}{(\alpha+1)u^2 + \alpha - 1}$$

$$= \frac{2}{\alpha-1} \int_0^{\infty} \frac{\sqrt{\frac{\alpha-1}{\alpha+1}}\,dv}{v^2+1} \quad \left(v = \sqrt{\frac{\alpha+1}{\alpha-1}}\,u\right)$$

$$= \frac{2}{\sqrt{\alpha^2-1}} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{\sqrt{\alpha^2-1}}$$

Donc $f(b) - f(a) = \int_a^b \frac{\pi\,d\alpha}{\sqrt{\alpha^2-1}}$

$$= \underline{\pi \cdot \left(\operatorname{Argch} b - \operatorname{Argch} a\right)}. \quad \square$$

10.1.2.

- Fixons $x_0 \in [-1,1] \setminus \{-1,0,1\}$.

Soit :

$g : [-1,1] \to \mathbb{R}$

$x \mapsto f(x) - \lambda x(x+1)(x-1)$

λ étant choisi tel que $g(x_0) = 0$.

Alors g s'annule en 4 points distincts, $-1, 0, 1$ et x_0.

En appliquant successivement le théorème de Rolle, on obtient que g' s'annule en 3 points distincts, puis que g'' s'annule en 2 points distincts et finalement que g''' s'annule

On en déduit que :

$\exists c_{x_0} \in [-1,1],\ g'''(c) = 0$

$$\frac{f'''(c_{x_0}) \cdot x_0(x_0+1)(x_0-1)}{6} = f(x_0)$$

- Majorons $\int_{-1}^1 |f(t)|\,dt$:

$$\int_{-1}^1 |f(t)|\,dt = \int_{-1}^0 |f(t)|\,dt + \int_0^1 |f(t)|\,dt$$

$$= \int_{-1}^0 \frac{|f'''(c_t)|\,|t(t+1)(t-1)|}{6}\,dt + \int_0^1 \frac{|f'''(c_t)|\,|t(t+1)(t-1)|}{6}\,dt$$

$$\leq 2\|f^{(3)}\|_\infty \int_0^1 \frac{t(t+1)(1-t)}{6}\,dt$$

$$\leq \frac{\|f^{(3)}\|_\infty}{12}.$$

Rq $C = \frac{1}{12}$ est la meilleure constante possible.

pour $f(t) = t(t+1)(t-1)$,

$$\int_{-1}^1 |f(t)|\,dt = \frac{\|f^{(3)}\|_\infty}{12} = \frac{1}{2}.$$

Donc $\underline{C = \frac{1}{12}}$. $\square$

10.1.3.

- Pour $\varphi = 1$, $\Lambda_n(\varphi) = 1 \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$.
- Pour $\varphi : t \mapsto t$, $\Lambda_n(\varphi) = \int_0^1 x f(x)\,dx \to \int_0^1 x f(x)\,dx$
- Pour $\varphi : t \mapsto t^k$ et $n \geq k$,

$$\Lambda_n(\varphi) = \int_0^1 \cdots \int_0^1 \left(\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}\right)^k f(x_1) \cdots f(x_n)\,dx_1 \cdots dx_n$$

$$= \frac{1}{n^k} \sum_{i_1+\cdots+i_n = k} \left(\int_0^1 \cdots \int_0^1 x_1^{i_1} \cdots x_n^{i_n} f(x_1) \cdots f(x_n)\,dx_1 \cdots dx_n\right) \frac{k!}{i_1! \cdots i_n!}$$

$$= \frac{k!}{n^k} \sum_{i_1+\cdots+i_n = k} \frac{1}{i_1! \cdots i_n!} \left(\int_0^1 x_1^{i_1} f(x_1)\,dx_1\right) \cdots \left(\int_0^1 x_n^{i_n} f(x_n)\,dx_n\right).$$

$$= \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{n^k} \left(\int_0^1 x f(x)\,dx\right)^k \left(\int_0^1 f(x)\,dx\right)^{n-k} + \left(1 - \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{n^k}\right) O(1).$$

$$\xrightarrow[n\to+\infty]{} \left(\int_0^1 x f(x)\,dx\right)^k.$$

- Montrons donc que $\Lambda_n(\varphi) \xrightarrow[n\to\infty]{} \varphi\left(\int_0^1 x f(x)\,dx\right)$.

Cela est vrai pour φ monôme.

Par linéarité, c'est encore vrai pour φ polynôme.

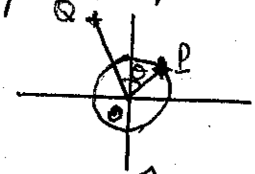
Par le théorème de Weierstrass, c'est encore vrai pour φ continue.

Donc : $\underline{\Lambda_n(\varphi) \to \varphi\left(\int_0^1 x f(x)\,dx\right)}$. $\square$

10.1.4.

- Soit $Q \in$

Soit P sur le cercle unité.
Supposons que Q n'est pas sur le unité.



On note $\theta = \widehat{POQ}$ (angle géométrique), et $a = OQ$.
La formule d'Al-Kashi donne :

$$PQ^2 = PO^2 + OQ^2 - 2\, OP \times QO \times \cos\theta$$
$$= 1 + a^2 - 2a\cos\theta.$$
$$\ln PQ = \frac{1}{2}\ln(1 - 2a\cos\theta + a^2)$$

- Calculons $I = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}\ln(1 - 2a\cos\theta + a^2)\,d\theta$.

On a :
$$\prod_{k=1}^{n}\left(1 - 2a\cos\frac{2k\pi}{n} + a^2\right) = \prod_{k=1}^{n}\left[\left(a - e^{i\frac{2k\pi}{n}}\right)\left(a - e^{-i\frac{2k\pi}{n}}\right)\right]$$
$$= (a^n - 1)^2.$$

D'après le théorème des séries de Riemann,
$$\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 - 2a\cos\frac{2k\pi}{n} + a^2\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln(1 - 2a\cos\theta + a^2)\,d\theta$$
$$\parallel$$
$$\ln(a^n - 1)^2 \xrightarrow[n\to\infty]{} \begin{cases} 0 & \text{si } a < 1 \\ 2\ln a & \text{si } a > 1 \end{cases}$$

Donc
$$I = \begin{cases} 0 & \text{si } a < 1 \\ 2\pi\ln a & \text{si } a > 1 \end{cases}$$

- Notons maintenant $P_\varphi = e^{i\varphi}$.

On suppose que :
$$\forall i,\ OQ_i \neq 1.$$

Alors :
$$\int_0^{2\pi} \ln \prod_i P_\varphi Q_i\, d\varphi = \sum_{i=1}^{n} \int_0^{2\pi} \ln P_\varphi Q_i\, d\varphi$$
$$= \sum_{\substack{i=1 \\ OQ_i > 1}}^{n} 2\pi \ln a \geq 0.$$

Donc : $\exists \varphi_0,\ \ln\left(\prod_{i=1}^{n} P_{\varphi_0} Q_i\right) \geq 0$
$$\underline{\prod_{i=1}^{n} P_{\varphi_0} Q_i \geq 1.}$$

Si de plus pour tout i, $OQ_i < 1$, alors
$\int_0^{2\pi} \ln \prod P_\varphi Q_i\, d\varphi = 0$, d'où :
$$\underline{\exists \varphi_0,\ \prod_{i=1}^{n} P_{\varphi_0} Q_i = 1.}$$

- Reste à voir le cas où certains Q_i sont tels que $OQ_i = 1$.

On note $\mathcal{C}$ le cercle unité.
Pour chaque $i \in [\![1, n]\!]$, on choisit une suite $Q_j^{(i)} \in \mathbb{R}^2$ telle que
$$Q_j^{(i)} \xrightarrow[j\to\infty]{} Q_i$$
et telle que $\forall i, j,\ Q_j^{(i)} \notin \mathcal{C}$: c'est possible car $\mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{C}$ est dense dans $\mathbb{R}^2$.
Pour chaque $j \in \mathbb{N}$, soit $P_j \in \mathcal{C}$ tel que : $\prod_{i=1}^{n} P_j Q_j^{(i)} \geq 1$.
$\mathcal{C}$ est compact, donc on peut extraire $P_{\varphi(j)}$ de P_j telle que $P_{\varphi(j)} \xrightarrow[j\to\infty]{} P$ pour un certain $P \in \mathcal{C}$.
Comme $\forall j,\ \prod_{i=1}^{n} P_{\varphi(j)} Q_{\varphi(j)}^{(i)} \geq 1$,
on a aussi $\underline{\prod_{i=1}^{n} P Q_i \geq 1.}$

- De manière analogue, on prouve que si $\forall i,\ OQ_i \leq 1$, alors
$$\underline{\exists P \in \mathcal{C},\ \prod_{i=1}^{n} P Q_i = 1.}$$ D

10.2.1 1) Soit $\varepsilon>0$.

Soit $\eta>0$ tel que $\forall x, |x|<\eta \Rightarrow |f(x)-f(0)|\leq\varepsilon$.
Alors, pour $t>0$,

$$\left|g(t)-\int_0^1\frac{f(0)}{1+tx}dx\right| = \left|\int_0^1\frac{f(x)-f(0)}{1+tx}dx\right|$$
$$\leq \int_0^1\frac{|f(x)-f(0)|}{1+tx}dx.$$
$$\leq \varepsilon\cdot\int_0^1\frac{dx}{1+tx}\leq\varepsilon\cdot\frac{\ln(1+t)}{t}.$$

Donc $g(t)-f(0)\frac{\ln(1+t)}{t}=o\left(\frac{\ln(1+t)}{t}\right)$.

Comme $f(0)\neq 0$, $g(t)\underset{t\to+\infty}{\sim}f(0)\frac{\ln(1+t)}{t}$
$$\sim f(0)\frac{\ln t}{t}$$

2) Avec le théorème des accroissements finis,
$\forall x\in[0,1]$, $\exists c_x\in[0,x]$,
$$f(x)-f(0)=f'(c_x)\,x.$$
$$\left|g(t)-\int_0^1\frac{f(0)}{1+tx}dx\right|=\left|\int_0^1\frac{f(x)-f(0)}{1+tx}dx\right|$$
$$=\left|\int_0^1\frac{xf'(c_x)}{1+tx}dx\right|$$
$$\leq\|f'\|_\infty\int_0^1\frac{x}{1+tx}dx.$$
$$\leq\frac{\|f'\|_\infty}{t}\left(1-\frac{\ln(1+t)}{t}\right)$$

Si $t\geq 1$,
$$\left|g(t)-f(0)\frac{\ln t}{t}\right|\leq\frac{\|f'\|_\infty}{t}\left(1-\frac{\ln(1+t)}{t}\right)+|f(0)|\left|\frac{\ln(1+t)-\ln t}{t}\right|.$$
$$\leq\frac{\|f'\|_\infty}{t}+\frac{\ln 2}{t}|f(0)|$$
$$\leq\frac{1}{t}\left(\|f'\|_\infty+|f(0)|\ln 2\right).\ \square$$

10.2.2.

1) Notons: $\varphi:[0,2\pi]\to\mathbb{C}$
$$x\mapsto\exp\left(\int_0^x\frac{f'(t)}{f(t)}dt\right)$$

φ est de classe C^1, et:
$\forall x\in[0,2\pi]$,
$$\varphi'(x)=\frac{f'(x)}{f(x)}\varphi(x).$$

Donc $\varphi'f-\varphi f'=0$.

D'où $\left(\frac{\varphi}{f}\right)'=0$.

Comme $f(0)=f(2\pi)$, $\varphi(0)=\varphi(2\pi)$, d'où:
$$\varphi(2\pi)=1.$$

Donc $\frac{1}{2i\pi}\int_0^{2\pi}\frac{f'(t)}{f(t)}dt\in\mathbb{Z}.\ \square$

2) Soit $P\in\mathbb{C}[X]$ sans racines, unitaire, de degré n.
Soit $f_r:\ \mathbb{R}\to\mathbb{C}$
$$\theta\mapsto P(re^{i\theta})$$, pour $r\in\mathbb{R}_+$.

Clairement, $f_r\in C^1(\mathbb{R},\mathbb{C})$ est 2π périodique et ne s'annule pas.
Donc, en posant $I(r)=\frac{1}{2i\pi}\int_0^{2\pi}\frac{f_r'(\theta)}{f_r(\theta)}d\theta$,
l'image de I est incluse dans $\mathbb{Z}$.
Comme $(r,\theta)\mapsto\frac{f_r'(\theta)}{f_r(\theta)}$ est continue sur $\mathbb{R}_+\times[0,2\pi]$, I est continue sur $\mathbb{R}_+$.
Donc I est constante, égale à 0 (car $I(0)=0$).
• Cherchons la limite de I en $+\infty$.

$$|I(r)-n|=\left|\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{Q(re^{i\theta})}{P(re^{i\theta})}d\theta\right|$$ où Q est un polynôme de degré $\leq n-1$.
$$\leq\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{|Q(re^{i\theta})|}{|P(re^{i\theta})|}d\theta.$$
$$\leq\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{Cr^{n-1}}{C'r^n}d\theta$$ pour r assez grand et $C,C'\in\mathbb{R}_+$.
$$\leq\frac{C}{C'r}\xrightarrow[r\to+\infty]{}0.$$

Donc $I(r)\xrightarrow[r\to+\infty]{}n$.

Donc $n=0$. $\square$

10.2.3. Posons:
$$F(x)=\int_1^x\frac{f(t)}{t^2}dt,\quad h(x)=F'(x)-\frac{a}{x^2}F(x)-\frac{b}{x^2}.\ (*)$$
Par hypothèse, $h\leq 0$. Résolvons l'équation différentielle $(*)$.
• Solution homogène: $F(x)=Ce^{-a/x}$, $C\in\mathbb{R}$.
• Variation de la constante: $g_0(x)=F(x)e^{a/x}$
$$e^{-a/x}g_0'(x)=h(x)+\frac{b}{x^2}.$$
$$g_0(x)=\int_1^x e^{a/t}\left(h(t)+\frac{b}{t^2}\right)dt$$
$$F(x)\leq e^{-(a/x)}\int_1^x e^{a/t}\frac{b}{t^2}dt\leq\frac{b}{a}\left(e^{a-a/x}-1\right)$$

D'où: $f(x)\leq aF(x)+b\leq be^{a-\frac{a}{x}}$.

La fonction $g(x)=be^{a-\frac{a}{x}}$ est optimale car elle vérifie l'inégalité de l'énoncé.

$\square$

10.3.1.

$$\frac{u-\sin u}{u^4} \underset{u\to 0}{=} \frac{u-u+\frac{u^3}{6}}{u^4}+o(1)=\frac{1}{6u}+o(1).$$

Soit $\varepsilon>0$. Soit $\eta>0$ tel que $\eta<1$ et $\forall u\in[0,\eta]$, $\frac{u-\sin u}{u^4}\in\left[\frac{1}{6u}-\varepsilon,\frac{1}{6u}+\varepsilon\right]$.

Pour $x\in\left]0,\frac{\eta}{b}\right[$,

$$\left|\int_{ax}^{bx}\left(\frac{u-\sin u}{u^4}-\frac{1}{6u}\right)du\right|\le\varepsilon(b-a)x \le \varepsilon$$

Donc :

$$\int_{ax}^{bx}\frac{u-\sin u}{u^4}\,du=\int_{ax}^{bx}\frac{du}{6u}+o(1)$$

$$=6\ln(b/a)+o(1).$$

Donc $\int_{ax}^{bx}\frac{u-\sin u}{u^4}\,du \xrightarrow[x\to 0^+]{} 6\ln(b/a)$. □

10.3.2.

(i)⇒(ii) : • Pour $f=\chi_{[a,b]}$, on a :

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(u_k)=\frac{N_n(a,b)}{n}\xrightarrow[n\to+\infty]{} a-b=\int_0^1 f(t)dt$$

• Par linéarité, la formule

$$\frac{1}{n}\sum_1^n f(u_k)\longrightarrow\int_0^1 f(t)dt$$

est encore vraie pour f en escalier.

• Soit $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ continue, et $\varepsilon>0$. Soit $g:[0,1]\to\mathbb{R}$ en escalier telle que $\|f-g\|_\infty\le\varepsilon$.

Alors :

$$\left|\frac{1}{n}\sum_1^n f(u_k)-\int_0^1 f(t)dt\right|$$

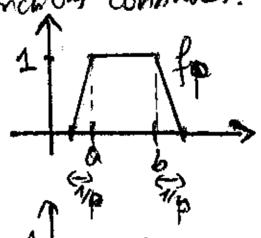
$$\le\left|\frac{1}{n}\sum_1^n (f(u_k)-g(u_k))\right|+\left|\frac{1}{n}\sum_1^n g(u_k)-\int_0^1 g(t)dt\right|+\left|\int_0^1(g(t)-f(t))dt\right|.$$

$$\le 2\varepsilon+\left|\frac{1}{n}\sum_1^n g(u_k)-\int_0^1 g(t)dt\right|.$$

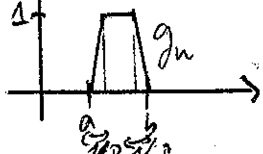
$\le 3\varepsilon$ pour n assez grand.

Donc $\frac{1}{n}\sum_1^n f(u_k)\longrightarrow\int_0^1 f(t)dt$.

(ii)⇒(i) : Supposons $0<a<b<1$. Approchons $\chi_{[a,b]}$ par des des fonctions continues :



f_p est bien définie à partir d'un certain rang.



g_p est bien définie à partir d'un certain rang.

Pour p assez grand, $g_p\le\chi_{[a,b]}\le f_p$.

D'où : $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n g_p(u_k)\le\frac{N_n(a,b)}{n}\le\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n f_p(u_k)$.

$\downarrow n\to+\infty$ $\qquad\qquad$ $\downarrow n\to+\infty$

$$\int_0^1 g_p=b-a-\frac{1}{p}\qquad\qquad \int f_p=b-a+\frac{1}{p}.$$

d'après les sommes de Riemann.

Une quantification simple montre alors que $\frac{N_n(a,b)}{n}\to b-a$.

On montre le résultat de manière analogue lorsque $0=a$, $b=1$ ou $a=b$.

(ii)⇒(iii). On a, pour $p\in\mathbb{N}^*$,

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n\cos(2\pi p u_k)\xrightarrow[n\to+\infty]{}\int_0^1\cos(2\pi p t)dt=0.$$

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n\sin(2\pi p u_k)\xrightarrow[n\to+\infty]{}\int_0^1\sin(2\pi p t)dt=0.$$

d'où $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n e^{2i\pi p u_k}\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$.

(iii)⇒(ii) : On a, pour $p\in\mathbb{Z}^*$,

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n e^{2i\pi p u_k}\xrightarrow[n\to+\infty]{}0=\int_0^1 f(t)dt.$$

$$1=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n e^{2i\pi u_k\cdot 0}\xrightarrow[n\to+\infty]{}1=\int_0^1 e^{2i\pi\cdot 0}dt.$$

• Par linéarité, si P est un polynôme trigonométrique (1-périodique),

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n P(u_k)\longrightarrow\int_0^1 P(t)dt.$$

• Soit $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ continue telle que $f(0)=f(1)$. f est limite uniforme de polynômes trigonométriques 1-périodiques d'après le théorème de Weierstrass trigonométrique.

Donc $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n f(u_k)\longrightarrow\int_0^1 f(t)dt$.

• Pour $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ continue quelconque, comme avant, on encadre f par des fonctions g continues telles que $g(0)=g(1)$, et une quantification simple permet de conclure. □

10.3.3) La formule de Taylor avec reste intégral donne :

$$0=f(1)=f(0)+f'(0)+\int_0^1 f''(t)(1-t)dt.$$

$$=a+\int_0^1 f''(t)(1-t)dt.$$

$-a=\int_0^1 f''(t)(1-t)dt$. Par Cauchy-Schwarz :

$$a^2=\left(\int_0^1 f''(t)(1-t)dt\right)^2\le\left(\int_0^1 f''(t)^2dt\right)\left(\int_0^1(1-t)^2dt\right).$$

$$\le\frac{1}{3}\left(\int_0^1 f''(t)^2dt\right).$$

Il y a égalité pour

$$f: t\mapsto\frac{a}{2}t(1-t)(2-t).$$

Le minimum recherché est donc $3a^2$. □

11.1.1.

Rappelons que $\det A = \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) a_{1\sigma(1)}\cdots a_{n\sigma(n)}$.

Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n \setminus \{Id\}$. On peut écrire $\sigma = c_1\cdots c_k$ où $c_1\cdots c_k$ sont des cycles à supports disjoints et de longueur >1.
On écrit alors $c_1 = (i_1, \dots, i_p)$.
Il existe alors $x\in\mathbb{C}$ tel que :

$$a_{1\sigma(1)}\cdots a_{n\sigma(n)} = x \underbrace{a_{i_1i_2}a_{i_2i_3}\cdots a_{i_pi_1}}_{P}.$$

Si $a_{i_pi_1}=0$ alors $P=0$.
Sinon $a_{i_1}a_{i_p}=0$ et donc $a_{i_1i_2}\cdots a_{i_{p-1}i_p}=0$, d'où $P=0$.
Dans tous les cas, $a_{1\sigma(1)}\cdots a_{n\sigma(n)}=0$.
Donc $\det(A) = a_{11}\cdots a_{nn}$. □

11.1.2.

Soit $d_P = \deg P \geq 1$, et $d_A = \deg A$.
Soit $k\in\mathbb{N}^*$ et $n = kd_P$.
On note $\mathbb{K}_n[X]$ les polynômes de $\mathbb{K}[X]$ de degré $\le n$.
C'est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n+1 = kd_P+1$.
$\mathbb{K}_n[X]\cap\mathbb{K}[P]$ et $\mathbb{K}_n[X]\cap A\mathbb{K}[X]$ en sont des sous-espaces vectoriels de dimensions respectives $k+1$ et $n+1-d_A = kd_P+1-d_A$.
Pour $k=d_A$,

$$(n+1-d_A)+(k+1) > n+1.$$

Donc $\mathbb{K}_n[X]\cap\mathbb{K}[P]\cap A\mathbb{K}[X]\neq\{0\}$.
Donc $\mathbb{K}[P]\cap A\mathbb{K}[X]\neq\{0\}$. □

11.1.3. Soit $p>0$.

Soit $\omega_k = e^{i\frac{(2k+1)\pi}{p}}$, $0\le k\le p-1$.
Alors comme $AB=BA$,

$$A^p+B^p = \prod_{k=0}^{p-1}(A-\omega_k B).$$

d'où : $\det(A^p+B^p) = \prod_{k=0}^{p-1}(\det(A-\omega_k B))$.

Si $p=2q$ est pair :

$$\det(A^p+B^p) = \prod_{k=0}^{q-1}|\det(A-\omega_kB)|^2 \ge 0.$$

Si $p=2q+1$ est impair :

$$\det(A^p+B^p) = \det(A+B)\prod_{k=0}^{q-1}|\det(A-\omega_kB)|^2\ge 0$$

Or $\det(A+B)\ge 0$.
Donc $\det(A^p+B^p)\ge0$. □

11.4.4.

Unicité : Soit $(\Lambda E', i')$ un autre couple.
Avec (ii), soit $j:\Lambda E\to\Lambda E'$ et $j':\Lambda E'\to\Lambda E$ telles que :
$i = j'\circ i'$ et $i' = j\circ i$.
Alors : $i = (j'\circ j)\circ i$ et $i' = (j\circ j')\circ i'$.
(ii) impose qu'il existe un unique $f:\Lambda E\to\Lambda E$ tel que $i = f\circ i$ et un unique $g:\Lambda E'\to\Lambda E'$ tel que $i' = g\circ i'$: donc $f = Id$ et $g = Id$.
Donc $j'\circ j = Id$ et $j\circ j' = Id$.
j est donc un isomorphisme.

Existence : Soit $n=\dim E$. Soit $(e_1,\dots,e_n)$ une base de E.
En tant qu'espace vectoriel, ΛE sera de dimension 2^n : soit $(e_I)_I$ une base de E indexée par des éléments $I\in\mathcal{P}([\![1,n]\!])$.
Définissons la multiplication dans ΛE ainsi :
pour $I,J\in\mathcal{P}([\![1,n]\!])$,

$$e_Ie_J = \left|\begin{array}{ll} 0 & \text{si } I\cap J\neq\emptyset\\ \varepsilon_{I,J}\,e_{I\cup J} & \text{si } I\cap J=\emptyset\end{array}\right.$$

où $\varepsilon_{IJ} = (-1)^{\mathrm{Card}\{(i,j)\in I\times J \,/\, i>j\}}$.

On pose : $i: E\to\Lambda E$, $e_i\mapsto e_{\{i\}}$.

Il est alors aisé de vérifier que $(\Lambda E, i)$ répond à la question. □

11.1.4. On admet pour le moment le lemme ci-dessous.

• Soit q un projecteur d'image F.
Soit $p = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} g\circ q\circ g^{-1}$.
$\forall g_0\in G$,

$$g_0\circ p = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} g_0\circ g\circ q\circ g^{-1} = \frac{1}{|G|}\left(\sum_{g\in G}(g_0\circ g)\circ q\circ(g_0\circ g)^{-1}\right)\circ g_0$$

$$= \frac{1}{|G|}\left(\sum_{g\in G} g\circ q\circ g^{-1}\right)\circ g_0 = p\circ g_0.$$

Donc p commute aux éléments de G.

• D'après le lemme ci-dessous, il ne reste plus qu'à prouver que p est un projecteur d'image F.
$\forall x\in F$, $g\circ q\circ g^{-1}(x) = g(g^{-1}(x)) = x$.
$p(x) = x$.
De plus, si $x\in E$, $p(x)\in F$ car $g\circ q\circ g^{-1}(x)\in F$ pour $g\in G$.
Donc $p(p(x)) = p(x)$, et p est bien un projecteur d'image F.

Lemme : Soit p un projecteur.
Alors p commute à G ssi $\mathrm{Ker}\,p$ et $\mathrm{Im}\,p$ sont stables par G.

Dém. : facile. □

11.2.1.

- Montrons que g_3 est injective.

Soit $x \in \operatorname{Ker} g_3$.

Alors $g_4(f_3(x)) = h_3(g_3(x)) = 0$.

Par injectivité de g_4, $f_3(x) = 0$.

Donc $x \in \operatorname{Ker} f_3 = \operatorname{Im} f_2$.

Soit $y \in A_2$ tel que $f_2(y) = x$.

Alors: $h_2(g_2(y)) = g_3(f_2(y)) = g_3(x) = 0$.

Donc $g_2(y) \in \operatorname{Ker} h_2 = \operatorname{Im} h_1$.

Soit $z \in B_1$ tel que $h_1(z) = g_2(y)$.

g_1 étant surjective, soit $w \in A_1$ tel que $g_1(w) = z$.

$g_2(f_1(w)) = h_1(g_1(w)) = g_2(y)$.

Par injectivité de g_2, $f_1(w) = y$.

Donc $x = f_2(y) = f_2(f_1(w)) = 0$.

Donc g_3 est injective.

- Montrons que g_3 est surjective.

Soit $x \in B_3$.

Par surjectivité de g_4, il existe $y \in A_4$ tel que $g_4(y) = h_3(x)$.

$g_5(f_4(y)) = h_4(g_4(y)) = h_4(h_3(x)) = 0$.

Donc par injectivité de g_5, $f_4(y) = 0$.

Donc $y \in \operatorname{Ker} f_4 = \operatorname{Im} f_3$.

Soit $z \in A_3$ tel que $f_3(z) = y$.

$g_4(f_3(z)) = h_3(g_3(z)) = g_4(y) = h_3(x)$.

Donc $x - g_3(z) \in \operatorname{Ker} h_3 = \operatorname{Im} h_2$.

Soit $w \in B_2$ tel que $x - g_3(z) = h_2(w)$.

Par surjectivité de g_2, soit $t \in A_2$ tel que $g_2(t) = w$.

$g_3(f_2(t)) = h_2(g_2(t)) = h_2(w) = x - g_3(z)$

donc $g_3(f_2(t) + z) = x$.

Donc g_3 est surjective. $\square$

11.2.2

- $A \mapsto \det A$ est polynômiale donc continue en les coefficients de A.

De plus, S étant fermé borné dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, S est compact.

On en déduit que α est fini et atteint.

- Soit $A \in S$ tel que $\alpha = \det A$. Montrons que A peut être choisie à coefficients dans $\{\pm 1\}$.

Fixons $(i_0, j_0) \in [\![1, n]\!]^2$. Il existe des fonctions polynômiales U et V des coefficients $m_{k\ell}$ pour $(k,\ell) \neq (i_0, j_0)$ telles que $\det M = U(M)\, m_{i_0 j_0} + V(M)$ pour $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Si $U(M) = 0$, on peut remplacer $a_{i_0 j_0}$ par 1, le déterminant ne sera pas modifié.

Sinon on a nécessairement $a_{i_0 j_0} \in \{\pm 1\}$.

On peut donc supposer que: $\forall i,j$, $|a_{ij}| = 1$.

Donc $\alpha \in \mathbb{Z}$.

On écrit $A = \begin{pmatrix} C_1 & \cdots & C_n \end{pmatrix}$ (les C_i sont les colonnes).

Alors: $\det A = \det\begin{pmatrix} C_1 & C_2 + C_1 & C_3 + C_1 & \cdots & C_n + C_1 \end{pmatrix}$: comme les $n-1$ dernières colonnes sont multiples de 2,

$2^{n-1} \mid \det A = \alpha$. $\square$

11.2.3. Soit $\mathcal{D}_n$ l'ensemble des dérangements.

On note $\Delta_n = \#$dérangements pairs $- \#$dérangements impairs.

Alors: $\Delta_n = \sum_{\sigma \in \mathcal{D}_n} \varepsilon(\sigma)$.

Soit: $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

On a: $\det A = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) a_{1\sigma(1)} \cdots a_{n\sigma(n)} = \sum_{\sigma \in \mathcal{D}_n} \varepsilon(\sigma) = \Delta_n$.

$$\det A = \begin{vmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 & n-1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 & \vdots \\ 1 & \cdots & \cdots & 1 & n-1 \end{vmatrix} \quad (C_n \leftarrow C_1 + \cdots + C_n).$$

$$= (n-1) \begin{vmatrix} -1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & & \ddots & -1 & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad (C_i \leftarrow C_i - C_n,\ 1 \leq i \leq n-1).$$

$$= (n-1)(-1)^{n-1}.$$

Il y a plus de dérangements pairs si n est impair.

11.2.4. - Posons $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $V_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix}$.

Alors $V_{n+1} = C V_n$.

$\operatorname{Tr}(C^0) = 3$, $\operatorname{Tr}(C^1) = 0$, $\operatorname{Tr}(C^2) = 2$.

$C^3 = C + I_3$, donc $\operatorname{Tr}(C^{n+3}) = \operatorname{Tr}(C^{n+1}) + \operatorname{Tr}(C^n)$.

Donc: $\forall n$, $\operatorname{Tr}(C^n) = u_n$.

- Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$.

$\operatorname{Tr}((A+B)^p) = \sum_{(A_1, \dots, A_p) \in \{A,B\}^p} \operatorname{Tr}(A_1 \cdots A_p)$.

Si $\sigma = (1, \dots, p) \in \mathfrak{S}_p$, on sait que:

$\operatorname{Tr}(A_{\sigma(1)} \cdots A_{\sigma(p)}) = \operatorname{Tr}(A_1 \cdots A_p)$.

Donc: $\forall k \in [\![0, p-1]\!]$, $\operatorname{Tr}(A_{\sigma^k(1)} \cdots A_{\sigma^k(p)}) = \operatorname{Tr}(A_1 \cdots A_p)$.

Donc $p \mid \operatorname{Tr}((A+B)^p) - (\operatorname{Tr}(A^p) + \operatorname{Tr}(B^p))$.

- Soit $\mathcal{E} = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z}) \,/\, \operatorname{Tr}(A^p) \equiv \operatorname{Tr}(A) \bmod p\}$.

$\mathcal{E}$ est stable par addition et passage à l'opposé.

$\forall i,j$, $E_{ij} \in \mathcal{E}$.

Donc $\mathcal{E} = \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$. Donc: $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$, $\operatorname{Tr}(A^p) \equiv \operatorname{Tr}(A) \ (p)$.

- Donc:

$u_p = \operatorname{Tr}(C^p) \equiv \operatorname{Tr}(C) \equiv 0 \bmod p$. $\square$

11.3.1.

• Calculons $|GL_n(\mathbb{F}_q)|$.
Il s'agit de compter le nombre de bases $(e_1,\dots,e_n)$ de $\mathbb{F}_q^n$.
On a q^n-1 choix pour e_1, puis q^n-q choix pour e_2 (tous les vecteurs non colinéaires à e_1), puis q^n-q^2 pour e_3...
Donc:

$$|GL_n(\mathbb{F}_q)| = (q^n-1)(q^n-q)\dots(q^n-q^{n-1})$$

• On considère l'application:

$$\varphi : GL_n(\mathbb{F}_q) \longrightarrow SL_n(\mathbb{F}_q), \quad M = (C_1 \dots C_n) \longmapsto \left(C_1 \dots C_{n-1} \ \frac{C_n}{\det M}\right).$$

Elle est surjective et chaque élément de $SL_n(\mathbb{R})$ a $q-1$ éléments.
Donc:

$$|SL_n(\mathbb{F}_q)| = q^{n-1}(q^n-1)\dots(q^n-q^{n-2}). \ \square$$

11.3.2.

• Soit $S \in M_n(\mathbb{R})$ symétrique $\neq 0$.
Alors $Tr(S^2) = Tr({}^tS S) > 0$.
Donc nécessairement, si Sym est le ss-espace des matrices symétriques de $M_n(\mathbb{R})$, $V \cap Sym = \{0\}$.
Comme $\dim Sym = \frac{n(n+1)}{2}$, on déduit que $\dim V \leq \frac{n(n-1)}{2}$.
• Si V est le sous-espace des matrices triangulaires supérieures de diagonale nulle, V vérifie la propriété de l'énoncé et $\dim V = \frac{n(n-1)}{2}$.
La dimension recherchée est donc $\frac{n(n-1)}{2}$. $\square$

11.3.3.

Nous allons faire appel à la notion de résultant (ou déterminant d'Euler-Sylvester).
$\forall (x,y) \in \mathbb{C}^2$,

$$\begin{aligned}(x,y)\in\Gamma &\iff \exists t\in\mathbb{C},\ P(t)=x \text{ et } Q(t)=y \\ &\iff F-x \text{ et } G-y \text{ ont une racine commune} \\ &\iff Res(F-x, G-y)=0.\end{aligned}$$

On choisit donc:

$$R(X,Y) = \begin{vmatrix} a_0-X & 0 & \cdots & 0 & b_0-Y & 0 & \cdots & 0 \\ a_1 & a_0-X & \ddots & \vdots & b_1 & b_0-Y & \ddots & \vdots \\ \vdots & a_1 & \ddots & 0 & \vdots & b_1 & \ddots & 0 \\ a_n & \vdots & \ddots & a_0-X & b_m & \vdots & \ddots & b_0-Y \\ 0 & a_n & & a_1 & 0 & b_m & & b_1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_n & 0 & \cdots & 0 & b_m \end{vmatrix}$$

où $P = \sum_0^n a_k X^k$, $Q = \sum_0^m b_k X^k$.
Alors $R \in \mathbb{C}[X,Y]$, et : $\forall (x,y)\in\mathbb{C}^2,\ (x,y)\in\Gamma \iff R(x,y)=0$. $\square$

11.3.4.

• On dit qu'une matrice est de type (B) si elle est de la forme:

$$\begin{pmatrix} 0 & b_{12} & 0 & \cdots & b_{1,2k-2} & 0 \\ b_{21} & 0 & b_{23} & \cdots & 0 & b_{2,2k-1} \\ 0 & b_{32} & 0 & \cdots & b_{3,2k-2} & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ b_{2k-2,1} & 0 & b_{2k-2,3} & \cdots & 0 & b_{2k-2,2k-1} \\ 0 & b_{2k-1,2} & 0 & \cdots & b_{2k-1,2k-2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Le déterminant d'une telle matrice est nul.
• On dit qu'une matrice est de type (C') si elle est de la forme:

$$C' = \begin{pmatrix} 0 & c_{11} & 0 & c_{12} & \cdots & 0 & c_{1,k} \\ c_{11} & 0 & c_{12} & 0 & \cdots & c_{1,k} & 0 \\ 0 & c_{21} & 0 & c_{22} & \cdots & 0 & c_{2,k} \\ c_{21} & 0 & c_{22} & 0 & \cdots & c_{2,k} & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & c_{k,1} & 0 & c_{k,2} & \cdots & 0 & c_{k,k} \\ c_{k,1} & 0 & c_{k,2} & 0 & \cdots & c_{k,k} & 0 \end{pmatrix}.$$

En permutant lignes et colonnes, $|\det C'| = \left|\det\begin{pmatrix} C & 0 \\ 0 & C\end{pmatrix}\right| = |\det C|^2$.
Donc le déterminant d'une matrice de type (C') est un carré parfait en valeur absolue.
• Soit X' la matrice obtenue à partir de A en remplaçant la 1ère ligne par $(1\ 0 \cdots 0)$ et Y' celle en remplaçant a_{11} par 0.
Alors $\det A = \det X' + \det Y$.
On écrit:

$$X' = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline * & X \end{array}\right).$$

Donc $\det A = \det X + \det Y$.
Si n est pair, X est de type (B) et Y de type (C), donc $|\det A| = |\det C|$ est un carré.
Si n est impair, X est de type (C) et Y de type (B), donc $|\det A| = |\det B|$ est un carré.
Dans tous les cas, $|\det A|$ est un carré. $\square$

11.4.1.

- $\mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & n+1 & 2n+1 & \cdots & n^2-n+1 \\ 2 & n+2 & 2n+2 & \cdots & n^2-n+2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ n & 2n & 3n & \cdots & n^2 \end{pmatrix}$

$= \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & n & 2n & \cdots & n^2-n \\ 2 & n & 2n & \cdots & n^2-n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ n & n & 2n & \cdots & n^2-n \end{pmatrix} \quad (C_i \leftarrow C_i - C_1)$

$= \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 2 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ n & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$

$= \begin{cases} 1 & \text{si } n=1 \\ 2 & \text{si } n>1. \end{cases}$

- Soit A une matrice comme ds l'énoncé. Clairement $\mathrm{rg}\, A \geqslant 1$. Supposons $n \geqslant 2$. Quitte à permuter des lignes et colonnes, on peut supposer que $1 = a_{11} < a_{21} < \cdots < a_{n1}$ et $a_{11} < a_{12} < \cdots < a_{1n}$.
Alors $a_{n1} \geqslant n$, $a_{1n} \geqslant n$.
Donc $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{n1} \\ a_{1n} & a_{nn} \end{vmatrix} \leqslant 1 \cdot n^2 - n \cdot n = 0$.
S'il y avait égalité, alors $a_{n1} = a_{1n} = n$: absurde !
Donc $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{n1} \\ a_{1n} & a_{nn} \end{vmatrix} < 0$.
Donc $\mathrm{rg}\, A \geqslant 2$.
- Considérons B une matrice comme dans l'énoncé telle que :
$\begin{cases} \forall i, \ b_{ii} \text{ impair} \\ \forall i,j, \ i<j \Rightarrow b_{ij} \text{ pair}. \end{cases}$
Alors $\det B$ est impair.
Donc $\mathrm{rg}\, B = n$.
- Le rang minimal est donc 1 si $n=1$, 2 sinon, et le rang maximal n. $\square$

11.4.2. Notons $x_1, \ldots, x_{2n+1}$ les masses des cailloux. Soit i fixé. Soient A_i, B_i deux sous-ensembles de $[\![1, 2n+1]\!] \setminus \{i\}$ de cardinal n tels que :

$$\sum_{k \in A_i} x_k = \sum_{k \in B_i} x_k.$$

Si on pose $a_{ii} = 0$, $a_{ij} = 1$ si $j \in A_i$ et $a_{ij} = -1$ si $j \in B_i$, alors

$$\sum_{j=1}^{2n+1} a_{ij} x_j = 0.$$

Cela fournit une matrice A telle que $AX = 0$ où $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{2n+1} \end{pmatrix}$.
Soit $U = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$. Alors $U \in \mathrm{Ker}\, A$.

Regardons le mineur principal de taille $2n \times 2n$ de A. Notons-le M.
En passant modulo 2 :

$$\overline{M} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}).$$

On calcule :

$$\det \overline{M} = (-1)^{2n-1}(2n-1) = 1 \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}.$$

Donc $\det M \in 2\mathbb{Z}+1$, donc $\det M \neq 0$.
On en déduit que $\mathrm{rg}\, A \geqslant n-1$.
Donc $\mathrm{rg}\, A = 1$ et $\mathrm{Ker}\, A = \mathrm{Vect}(U)$.
Les cailloux ont bien tous même masse. $\square$

11.4.3. Rappelons que $n = \sum_{d|n} \varphi(d)$.
On a :

$$a_{ij} = i \wedge j = \sum_{d | i \wedge j} \varphi(d) = \sum_{d|i, d|j} \varphi(d) = \sum_{d=1}^{n} \varphi(d) b_{di} b_{dj},$$

avec $b_{kl} = 1$ si $k | l$, 0 sinon.
Posons $B = (b_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
On a alors : $A = {}^t B \begin{pmatrix} \varphi(1) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \varphi(n) \end{pmatrix} B$.
B est triangulaire avec des 1 sur la diagonale, donc $\det B = 1$.
Donc $\det A = \varphi(1) \cdots \varphi(n)$. $\square$

12.1.1.

Par une récurrence immédiate, on a :
$$B^k = \begin{pmatrix} A^k & 0 \\ kCA^{k-1} & A^k \end{pmatrix}.$$
Donc pour $P \in \mathbb{C}[X]$, on a :
$$P(B) = \begin{pmatrix} P(A) & 0 \\ CP'(A) & P(A) \end{pmatrix}. \quad (*)$$

Pour M matrice, on note μ_M son polynôme minimal.

$(*)$ impose que $\mu_B(A)=0$ donc $\mu_A | \mu_B$.

- Si B est diagonalisable, alors μ_B est scindé à racines simples, donc μ_A aussi et donc A est diagonalisable. De plus, $\mu_B \wedge \mu_B' = 1$: on peut donc trouver U, V tels que $\mu_B U + \mu_B' V = 1$. On en déduit que $V(A)\mu_B'(A) = I_n$. Donc $\mu_B'(A)$ est inversible, et $C\mu_B'(A)=0$. Donc $C=0$.
- Réciproquement, supposons A diagonalisable et $C=0$. Alors $\mu_A(B)=0$, et μ_A est scindé à racines simples, donc B est diagonalisable.

La condition cherchée est donc :
A diagonalisable et $C=0$. $\square$

12.1.2.

Soit $V = \mathrm{Vect}(A, B, C)$.
Soit $W = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right)$.

Si $\dim V < 3$, alors la famille A, B, C est liée, et l'exercice est trivial.

Sinon, $\dim V = 3$. Or $\dim W = 2$. Donc $\dim V + \dim W = 5 > 4$, donc $V \cap W \neq \{0\}$.

Or tous les éléments de W ont une valeur propre double.
Il existe donc (a,b,c) non tous nuls tels que $aA+bB+cC$ admet une valeur propre double. $\square$

12.1.3.

(ii)$\Rightarrow$(i) : • Soit μ le polynôme minimal de u.
On écrit $\mu = P_1 \dots P_r$, où P_i irréductibles unitaires, 2 à 2 distincts. Soit V un sous-espace stable et $u_V : V \to V$ induit par u. $\mu(u_V)=0$, donc le théorème des noyaux impose :
$$V = \bigoplus_{i=1}^{r} \mathrm{Ker}\, P_i(u_V) = \mathrm{Ker}\, \mu(u_V).$$
Notons $V_i = \mathrm{Ker}\, P_i(u_V) = \mathrm{Ker}\, P_i(u) \cap V$.
Il suffit de construire W_i un supplémentaire de V_i dans $\mathrm{Ker}(P_i(u))$, stable par u. Faisons-le pour $i=1$.

- Si $V_1 = \mathrm{Ker}\, P_1(u)$, on prend $W_1 = 0$.
- Sinon, soit $x_1 \in \mathrm{Ker}\, P_1(u) \setminus V_1$, et : $E_{x_1} = \mathrm{Vect}(u^k(x_1))_{k\in\mathbb{N}}$.
E_{x_1} est un ss-espace de $\mathrm{Ker}\, P_1(u)$ non nul.
$P_1(u)(x_1) = 0$ donc $\dim E_{x_1} \leq d^\circ P_1$. Soit $u_1 : E_{x_1} \to E_{x_1}$ induit par u. Alors $\mu_{u_1} | P_1$ car $P_1(u_1)=0$.
P_1 étant irréductible, $\mu_{u_1} = P_1$.
Donc $\dim E_{x_1} = d^\circ P_1$ (par Cayley-Hamilton).
- Soit $y \in E_{x_1} \cap V_1$. Si $y \neq 0$, alors comme avant on montre que $\dim E_y = \deg P_1$ et donc $E_y = E_{x_1}$, absurde car $x_1 \notin V_1$. Donc $E_{x_1} \cap V_1 = \{0\}$.
Donc E_{x_1} et V_1 sont en somme directe.
- Si $E_{x_1} \cap V_1 = \mathrm{Ker}\, P_1(u)$, c'est fini : on prend E_{x_1}.
Sinon, on réitère la procédure en prenant x_2 dans $\mathrm{Ker}\, P_1(u) \setminus (E_{x_1} \oplus V_1)$, puis $x_3 \dots$
Le processus s'arrête puisque $\dim \mathrm{Ker}(P_1(u)) < \infty$, et alors, on trouve $x_1, \dots, x_q \in \mathrm{Ker}\, P_1(u)$ tels que :
$$\mathrm{Ker}\, P_1(u) = F_1 \oplus \underbrace{E_{x_1} \oplus \dots \oplus E_{x_q}}_{\text{stable par } u}.$$
On a donc montré (i).

(i)$\Rightarrow$(ii) : On écrit $\mu_u = P_1^{\alpha_1} \dots P_r^{\alpha_r}$, P_i unitaires irréductibles 2 à 2 distincts, $\alpha_i \in \mathbb{N}^*$. Supposons $\alpha_1 > 1$.
Soit $F = \mathrm{Ker}\, P_1(u) \oplus \left(\bigoplus_{i=2}^{r} \mathrm{Ker}\, P_i^{\alpha_i}(u)\right)$.
F est stable par u. Soit G un supplémentaire stable. Soit $u_G : G \to G$ induit par u.
$\mu_u(u_G)=0$, donc par le lemme des noyaux :
$$G = \bigoplus_{i=1}^{r} \mathrm{Ker}\, P_i^{\alpha_i}(u_G) = G \cap \bigoplus_{i=1}^{r} \mathrm{Ker}\, P_i^{\alpha_i}(u)$$
$$= G \cap \mathrm{Ker}\, P_1^{\alpha_1}(u) \quad \text{car } G \cap F = \{0\}.$$
Donc $G \subseteq \mathrm{Ker}\, P_1^{\alpha_1}(u)$, c'est un supplémentaire de $\mathrm{Ker}\, P_1(u)$ dans $\mathrm{Ker}\, P_1^{\alpha_1}(u)$.
$P_1(u_G)^{\alpha_1} = P_1^{\alpha_1}(u_G) = 0$, donc $P_1(u_G)$ n'est pas injectif.
Donc $\mathrm{Ker}\, P_1(u_G) = \mathrm{Ker}(P_1(u)) \cap G \neq \{0\}$: absurde !
Donc $\alpha_1 = 1$, et de même $\alpha_2 = \dots = \alpha_r = 0$.

Donc (i)$\Leftrightarrow$(ii). $\square$

12.2.1

A est diagonalisable et ses valeurs propres sont de module ≤ 1.
Donc la suite $(A^k)_{k\in\mathbb{N}}$ est bornée.
Or $A^k \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ pour $k\in\mathbb{N}$.
Donc il existe $k_1 < k_2$ tels que :

$$A^{k_1} = A^{k_2}.$$

Donc $A^{k_2-k_1} = I_n$, et les valeurs propres de A sont des racines de l'unité. □

12.2.2. Soit $f : G \to GL_n(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$
$M \mapsto M \bmod p$.

- f est un morphisme de groupes.
Soit $M \in \operatorname{Ker} f$. Alors $M = I_n \bmod p$.
On écrit $M = I_n + pA$, $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$.
G étant fini, soit q tel que $M^q = I_n$.
Soit $P = (1+pX)^q - 1$. On a $P(A) = 0$.
Les racines de P sont les $z_k = \dfrac{e^{2i\pi k/q} - 1}{p}$ pour $k \in [\![0, q-1]\!]$. P est donc scindé à racines simples sur $\mathbb{C}$. De plus : $\forall k, |z_k| < 1$.
A est donc diagonalisable et ses valeurs propres sont de module <1.
Donc $A^k \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$. Or $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$.
On en déduit que A est nilpotente. Diagonalisable et nilpotente, A est nulle.
On en déduit que $M = I_n$, et donc f est injective.

- $GL_n(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ est fini.
Les sous-groupes finis de $GL_n(\mathbb{Z})$ ont donc un cardinal majoré par $|GL_n(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})|$.
À isomorphisme près, il existe un nombre fini de groupes de cardinal donné (fini).
$GL_n(\mathbb{Z})$ a donc un nbre fini de s-groupes finis (à isomorphisme près). □

Rq : $|GL_n(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})|$ se calcule : voir l'exercice 11.3.1.

12.2.3. Soit p l'indice de nilpotence de A.
On a : $B^p = 0$, donc B nilpotente.
De plus, comme X^p est le polynôme minimal de A et $X^p \nmid X^{p-1}P(X)^{p-1}$, on a : $B^{p-1} = A^{p-1}P(A)^{p-1} \neq 0$.
L'indice de nilpotence de B est p.
Donc $\dim \mathbb{R}[B] = \dim \mathbb{R}[A] = p$.
Or $\mathbb{R}[B] \subseteq \mathbb{R}[A]$, donc $\mathbb{R}[B] = \mathbb{R}[A]$.
De même, $\dim \operatorname{Vect}(B^2,\dots,B^{p-1}) = \dim\operatorname{Vect}(A^2,\dots,A^{p-1})$ et $\operatorname{Vect}(B^2,\dots,B^{p-1}) \subseteq \operatorname{Vect}(A^2,\dots,A^{p-1})$, donc $\operatorname{Vect}(B^2,\dots,B^{p-1}) = \operatorname{Vect}(A^2,\dots,A^{p-1})$.
Par hypothèse, $B - A = A(P(A) - I_n) \in \operatorname{Vect}(A^2,\dots,A^{p-1})$.
Donc $A - B \in \operatorname{Vect}(B^2,\dots,B^{p-1})$, d'où le résultat. □

12.2.4. Notons $\lambda_1,\dots,\lambda_k$ les valeurs propres de M, de multiplicités $m_1,\dots,m_k$.

1er cas : $m_1 = \dots = m_k = 1$ et
$\forall (a,b,a',b'),\ (a,b)\neq(a',b') \Rightarrow \lambda_a+\lambda_b \neq \lambda_{a'}+\lambda_{b'}$.
Fixons $r,s \in [\![1,k]\!]$, et $v_r, v_s \in \mathbb{C}^n$ tels que $Mv_r = \lambda_r v_r$, $Mv_s = \lambda_s v_s$.
Avec $X = v_r({}^t v_s)$, on a : $MX = (\lambda_r+\lambda_s)X$, donc $v_r({}^t v_s)$ est un vecteur propre de Φ de valeur propre $\lambda_r+\lambda_s$.
Si $\lambda_r \neq \lambda_s$, alors v_r et v_s sont indépendants, donc $v_r({}^t v_s)$ et $v_s({}^t v_r)$ sont indépendantes.
La valeur propre $\lambda_r+\lambda_s$ est donc double si $r\neq s$.
Donc, pour Φ :

valeur propre	base de l'espace propre
$\lambda_r+\lambda_s,\ r\neq s$	$v_r({}^t v_s),\ v_s({}^t v_r)$
$2\lambda_r$	$v_r({}^t v_r)$

2e cas : Cas général.
On écrit $M = \lim_{k\to\infty} M_k$, où pour tout k, M_k vérifie les conditions du 1er cas.
Donc $\chi_M = \lim_{k\to\infty} \chi_{M_k}$.
On laisse en exercice de voir que cela implique grâce au 1er cas la classification suivante :

valeur propre	multiplicité
$\lambda_r+\lambda_s,\ r\neq s$	$2m_r m_s$
$2\lambda_r$	m_r^2

□

12.3.1.

Soit $P = X^2+2X+5$.
P admet deux racines complexes conjuguées, λ et $\bar\lambda$, non réelles.

- Soit A tel que $P(A)=0$. ($A\in\mathcal{M}_n(K)$).
Alors A est diagonalisable dans $\mathbb{C}$.
Si $K=\mathbb{Q}$ ou $\mathbb{R}$, alors $\chi_A \in \mathbb{R}[X]$, et donc la multiplicité de λ et celle de $\bar\lambda$ sont égales, donc n est pair.
Si $K=\mathbb{C}$, alors en prenant $A=(\lambda)\in\mathcal{M}_1(\mathbb{C})$, on voit que n peut être impair.
- Supposons n pair. Soit $A_0=\begin{pmatrix}-1&2\\-2&-1\end{pmatrix}$.
Soit: $A=\begin{pmatrix}A_0 & & & 0\\ & A_0 & & \\ & & A_0 & \\ 0 & & & \ddots\ A_0\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_n(K)$.

Alors $A^2+2A+5=0$.

Conclusion:

L'implication $\Rightarrow$ est fausse pour $K=\mathbb{C}$, vraie pour $K=\mathbb{Q}$ ou $\mathbb{R}$.
L'implication $\Leftarrow$ est toujours vraie. □

12.3.2

- Cherchons d'abord les valeurs propres et les espaces propres de T.
Soit $\lambda\in\mathbb{C}$ et soit $(u_n)\in B\setminus\{0\}$ tels que $T(u_n)=\lambda(u_n)$.
Alors: $\forall n,\ u_{n+1}=\lambda u_n$.
Donc: $\forall n,\ u_n=\lambda^n u_0$.
Donc $|\lambda|=1$ (sinon (u_n) non bornée).
Les valeurs propres sont donc les éléments de $U=\{z\in\mathbb{C}\mid |z|=1\}$, et, pour $\lambda\in U$, l'espace propre est:
$$E_\lambda=\mathrm{Vect}((\lambda^n)_{n\in\mathbb{Z}}).$$
- Soit F un sous-espace stable de dimension finie. Soit $T_F: F\to F$ induit par T. Notons $\mu=P_1^{s_1}\dots P_r^{s_r}$ le polynôme minimal de T_F, les P_i étant irréductibles unitaires, 2 à 2 distincts, $s_i>0$.
On note $P_i=X-\lambda_i$, $\lambda_i\in U$.
Soit $(u_n)\in \mathrm{Ker}\, P_i^2(T_F)$.
Alors $\forall n,\ u_{n+2}-2\lambda_i u_{n+1}+\lambda_i^2u_n=0$.
Donc $\exists\alpha,\beta,\ \forall n,\ u_n=(\alpha n+\beta)\lambda_i^n$.

Comme (u_n) est bornée, $\alpha=0$.
Donc $\mathrm{Ker}(P_i^2(T_F))=\mathrm{Ker}(P_i(T_F))$.
Le lemme des noyaux donne alors:
$F=\bigoplus \mathrm{Ker}(P_i^{s_i}(T_F))=\bigoplus\mathrm{Ker}(P_i(T_F))$
Donc $s_1=\dots=s_r=1$. Les sous-espaces recherchés sont donc ceux de la forme:
$E_{\lambda_1}\oplus\dots\oplus E_{\lambda_m}$, λ_i 2 à 2 distincts. □

12.3.3

La réponse est oui.
Soit $M\in\mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ telle qu'il existe $m\in\mathbb{N}^*$ vérifiant $M^m=I_n$.
Le polynôme X^m-1 annule M, donc M est diagonalisable et ses valeurs propres sont des racines de l'unité. Soit χ son polynôme caractéristique. On sait que $\chi\in\mathbb{Z}[X]$ et que ses racines sont des racines de l'unité. Or l'ensemble E des polynômes de $\mathbb{Z}[X]$ de degré n dont les racines sont des racines de l'unité est fini (puisque les coefficients de tels polynômes s'expriment en fonction des racines et sont donc bornés).
Soit r le ppcm des ordres des racines des polynômes de E.
On a alors $M^r=I_n$, et le choix de r est indépendant de M. □

12.3.4

1er cas: $A=I_n+N$, avec N nilpotente, d'indice p.
On écrit le développement limité en 0:
$\sqrt{1+x}=1+a_1x+\dots+a_{p-1}x^{p-1}+o(x^{p-1})$.
On note $S=1+\sum_{i=1}^{p-1}a_iX^i$. Au voisinage de 0:
$1+x=\sqrt{1+x}^2=S^2(x)+o(x^{p-1})$
On en déduit que $S^2\equiv 1+X \bmod X^p$.
Donc $S(N)^2=I_n+N=A$.
Si $P=S(X-1)$, $A=P(A)^2$.

2e cas: $A=\lambda I_n+N$, N nilpotente, $\lambda\in\mathbb{C}^*$.
Soit $B=\frac{1}{\lambda}A$. Soit $Q\in\mathbb{C}[X]$ tel que $Q(B)^2=B$.
Si $\mu\in\mathbb{C}^*$ est tel que $\mu^2=\lambda$, alors $A=P(A)^2$ où $P=\mu Q(\frac{X}{\lambda})$.

3e cas: Cas général.
Soit $\mu=\prod_{k=1}^m(X-\lambda_k)^{\beta_k}$ le polynôme minimal de A, où les λ_k sont 2 à 2 distincts et non nuls.
Le lemme des noyaux impose:
$$\mathbb{C}^n=\bigoplus \mathrm{Ker}(A-\lambda_kI_n)^{\beta_k}.$$
On note $E_k=\mathrm{Ker}(A-\lambda_kI_n)^{\beta_k}$.
Si u est l'endomorphisme associé à A, u_{E_k} s'écrit sous la forme $\lambda_k\,\mathrm{id}_{E_k}+n_k$, où n_k est nilpotent.
A est donc semblable à une matrice diagonale par blocs $\mathrm{diag}(D_1,\dots,D_m)$, et chaque D_i s'écrit $D_i=\lambda_i\mathrm{Id}+N_i$, où N_i est nilpotente. On trouve donc $P_i\in\mathbb{C}[X]$ tel que $P_i(D_i)^2=D_i$.
Notons $\mu_i=(X-\lambda_i)^{\beta_i}$: μ_i annule D_i.
Avec le théorème chinois, on trouve P tel que: $\forall i,\ P\equiv P_i \bmod \mu_i$.
On a alors $A=P(A)^2$. □

12.1.4. Le lemme suivant est un critère très utile qu'il est bon de connaître.

1) Lemme : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $Tr(A^k) = 0$. Alors A est nilpotente.

Dém. : Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ les valeurs propres non nulles de A, de multiplicités $n_1, \dots, n_r$.
$\mathbb{C}$ étant algébriquement clos, A est trigonalisable, et $Tr(A^k) = \sum_{i=1}^{r} n_i \lambda_i^k$.
$\begin{pmatrix} n_1 \\ \vdots \\ n_r \end{pmatrix}$ est donc solution de : $\underbrace{\begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_r \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \cdots & \lambda_r^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^r & \lambda_2^r & \cdots & \lambda_r^r \end{pmatrix}}_{V} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_r \end{pmatrix} = 0$.

Or $\det V = \lambda_1 \dots \lambda_r \prod_{1 \le i < j \le r} (\lambda_j - \lambda_i) \neq 0$, donc $n_1 = \dots = n_r = 0$.
Donc
A est bien nilpotente. □

Par linéarité, $\forall M \in Vect(G)$, $Tr(AM) = Tr(BM)$, d'où :
$\forall M \in G$, $Tr(AM) = Tr(BM)$.

On a : $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $Tr((AB^{-1})^k) = Tr(AB^{-1}(AB^{-1})^{k-1}) = Tr(BB^{-1}(AB^{-1})^{k-1}) = Tr($
Donc : $\forall k \in \mathbb{N}$, $Tr((AB^{-1})^k) = Tr(I_n) = n$.
Avec Newton : $Tr((AB^{-1} - I_n)^k) = Tr\left(\sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} (-1)^j (AB^{-1})^{k-j}\right)$
$= n \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} (-1)^j = 0$, donc $AB^{-1} - I_n$ est nilpotente. □

2) Soit G un s-groupe d'exposant fini N.
$\forall A \in G$, $A^N = I_n$, donc les éléments de G sont diagonalisables.

Pour $A, B \in G$, si $f(A) = f(B)$, alors $AB^{-1} - I_n$ est nilpotente et diagonalisable donc nulle, donc $A = B$: f est injective.
Soit $X = \{ tr A \mid A \in G \}$.
Alors $Im f \subseteq X^m$.
Or X est fini puisque les valeurs propres des éléments de G sont des racines N-ièmes de l'unité.
Donc G est fini. □

13.1.1.

• $f : t \mapsto e^{-a^2t^2-b^2t^{-2}}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et se prolonge par continuité en 0 avec $f(0)=0$.

$\forall t,\ 0 \le f(t) \le e^{-a^2t^2} = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$

Donc par TCPFP, f est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.

• Avec $u = at$:

$$\int_0^\infty f(t)dt = \frac{1}{a}\int_0^\infty e^{-u^2-a^2b^2u^{-2}}du.$$

Pour $\lambda \ge 0$, soit $I(\lambda) = \int_0^\infty e^{-u^2-\lambda u^{-2}}du$

Notons : $F : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$
$(\lambda, u) \longmapsto e^{-u^2-\lambda u^{-2}}$

• On a :

1) $u \mapsto F(\lambda,u)$ est continue par morceaux intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$, $\forall \lambda \ge 0$

2) $\lambda \mapsto F(\lambda,u)$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ pour tout $u>0$.

3) $\forall (\lambda, u) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+^*$,
$|F(\lambda,u)| \le e^{-u^2}$ et $u \mapsto e^{-u^2}$ intégrable

Donc, par théo. de continuité sous $\int$, I est continue sur $\mathbb{R}_+$.

• Soit $\lambda_0 > 0$. On a :

1) $u \mapsto F(\lambda,u)$ est continue par morceaux intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$, $\forall \lambda \ge \lambda_0$.

2) $\frac{\partial F}{\partial \lambda}(\lambda,u)$ existe pour $\lambda \ge \lambda_0$, $u>0$:

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda}(\lambda,u) = -\frac{e^{-u^2-\lambda u^{-2}}}{u^2}.$$

3) $u \mapsto \frac{\partial F}{\partial \lambda}(\lambda,u)$ est continue par morceaux $\forall \lambda \ge \lambda_0$

4) $\lambda \mapsto \frac{\partial F}{\partial \lambda}(\lambda,u)$ est continue sur $[\lambda_0,+\infty[$ $\forall u>0$.

5) $\forall (\lambda,u) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+^*$
$$\left|\frac{\partial F}{\partial \lambda}(\lambda,u)\right| \le \frac{e^{-u^2-\lambda_0 u^{-2}}}{u^2}.$$
et $u \mapsto \frac{e^{-u^2-\lambda_0 u^{-2}}}{u^2}$ est intégrable.

Par le théo. de dérivation sous $\int$, I est C^1 sur $[\lambda_0,+\infty[$ et donc sur $]0,+\infty[$, et $\forall \lambda>0$:

$$I'(\lambda) = -\int_0^{+\infty} \frac{e^{-u^2-\lambda u^{-2}}}{u^2}du.$$
$$= \int_{+\infty}^0 e^{-v^{-2}-\lambda v^2}dv \quad \left(v = \frac{1}{u}\right).$$
$$= -\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\int_0^{+\infty} e^{-\lambda z^{-2}-z^2}dz \quad (z=\sqrt{\lambda}v)$$
$$= -\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\ I(\lambda).$$

• $\exists K, \forall \lambda>0,\ I(\lambda) = Ke^{-2\sqrt{\lambda}}$.

Par continuité, $K = I(0) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

$\forall \lambda>0,\ I(\lambda) = Ke^{-2\sqrt{\lambda}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-2\sqrt{\lambda}}$.

$$\int_0^{+\infty} e^{-a^2t^2-b^2t^{-2}}dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2a}e^{2ab}. \quad \square$$

13.1.2.

• $(\Rightarrow)$ $\left|\int_I |f_n| - \int_I |f|\right| \le \int_I \big||f_n|-|f|\big| \le \int_I |f_n-f| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$

• $(\Leftarrow)$

1^{er} cas : $f \ge 0$, $f_n \ge 0$.

Posons : $g_n = |f_n-f| + f - f_n = 2\max(0, f-f_n)$.

$f_n \ge 0$, donc $0 \le g_n \le 2f$, et f intégrable.

De plus, $g_n \xrightarrow[n\to\infty]{cvs} 0$.

Donc, par TCD, $\int_I g_n \longrightarrow 0$.

Donc, comme $\int_I f_n \to \int_I f$, $\int_I |f_n-f| \to 0$.

2^e cas : cas général.

Avec le 1^{er} cas, $\int_I \big||f_n|-|f|\big| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

Soit $h_n = |f_n-f| - \big||f_n|-|f|\big|$.

$0 \le h_n \le 2|f|$, et $h_n \xrightarrow[n\to\infty]{cvs} 0$.

Donc par TCD, $\int_I h_n \to 0$

Donc $\int_I |f_n-f| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

On a montré l'équivalence. $\square$

13.1.3.

1^{er} cas : $f = \chi_{[0,A]}$, $A>0$. (f f° caractéristique)

Pour $x \ge A$, l'inégalité est triviale.

Pour $x < A$, on veut montrer :
$$A - x \le \left(\frac{a}{(1+a)x}\right)^a \frac{A^{a+1}}{a+1}.$$

ie $(1-t)t^a \le \frac{a^a}{(1+a)^{1+a}}$ avec $t = x/A \in]0,1[$.

Une étude de fonctions permet de conclure.

2^e cas : f décroissante en escalier sur $[0,A]$, nulle sur $]A,+\infty[$.

Par linéarité, l'inégalité est encore vérifiée.

3^e cas : f quelconque.

$t \mapsto t^\alpha f(t)$ est intégrable, donc $f(t) \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

On trouve donc (f_n) fonctions vérifiant les conditions du 2^e cas tq $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{cvs} f$ et $f_n \le f$.

L'inégalité est donc vérifiée par f_n.

Le théorème de convergence dominée permet de conclure. $\square$

13.2.1.

$f : t \mapsto \frac{\ln t}{1+t^2}$ est continue sur $]0,1]$.

De plus, $f(t) \underset{t\to 0}{\sim} \ln t \leq 0$.

Par TCPFP, f est intégrable sur $]0,1]$.

On a :

$$\int_0^1 f = \int_0^1 \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (\ln t) t^{2k} dt.$$

On a :

$$\int_0^1 \ln t \, t^{2k} dt = \left[\frac{(\ln t) t^{2n+1}}{2n+1}\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{t^{2k}}{2k+1} dt = -\frac{1}{(2k+1)^2}$$

par intégration par parties.

Donc :

$$\sum_{k=0}^{\infty} \int_0^1 |\ln(t) t^{2k}| dt = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} < \infty.$$

D'après le théorème de Lebesgue :

$$\int_0^1 f = \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^1 (-1)^k (\ln t) t^{2k} dt = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(2k+1)^2}.$$ □

13.2.2.

Soient $A_0 = \begin{pmatrix} a \\ \vdots \\ a \end{pmatrix}, \dots, A_n = \begin{pmatrix} a \\ \vdots \\ a \end{pmatrix}$ les points.

1er cas : $\overrightarrow{A_0A_1}, \dots, \overrightarrow{A_0A_n}$ sont liés.

Alors $A_0, \dots, A_n$ sont dans un hyperplan affine et $\mathrm{vol}(\mathcal{L}) = 0$.

2ème cas : $\overrightarrow{A_0A_1}, \dots, \overrightarrow{A_0A_n}$ forment une base.

Soit $A = (a_{ij} - a_{0j})$.

Par la formule de changement de variable :

$$\mathrm{vol}(\mathcal{L}) = |\det A| \cdot \mathrm{vol}(T)$$

où T est le "tétraèdre" de sommets $0, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Alors :

$$\mathrm{vol}(T) = \int_{x_1 + \dots + x_n \leq 1, \, 0 \leq x_1, \dots, 0 \leq x_n} dx_1 \dots dx_n = \int du_1 \dots du_n = \mathrm{vol}(T_{Id})$$

où $T_{Id} = \{(u_1, \dots, u_n) \mid 0 \leq u_1 \leq \dots \leq u_n \leq 1\}$.

Pour $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, soit $T_\sigma = \{(u_1, \dots, u_n) \mid 0 \leq u_{\sigma(1)} \leq \dots \leq u_{\sigma(n)} \leq 1\}$.

Les tétraèdres $(T_\sigma)_{\sigma \in \mathfrak{S}_n}$ ont tous le même volume V, recouvrent $[0,1]^n$.

On a :

$$\sum_\sigma \mathrm{vol}(\mathring{T}_\sigma) \leq \mathrm{vol}([0,1]^n) \leq \sum_\sigma \mathrm{vol}(T_\sigma).$$

$$n! V \leq 1 \leq n! V.$$

Donc $V = n!$, et $\mathrm{vol}(\mathcal{L}) = \frac{|\det A|}{n!}$. □

13.2.3.

Cf. 10.2.2.

13.2.4

Cf. 9.2.2.

13.1.4

- Soit R un rectangle.

On choisit un repère d'axes parallèles aux côtés de R. Soient a, b, c, d tels que :

$$R = \{(x,y) \mid a \leq x \leq b, \quad c \leq y \leq d\}.$$

On a : $\iint_R e^{2i\pi(x+y)} dx dy = -\frac{1}{4\pi^2}(e^{2i\pi b} - e^{2i\pi a})(e^{2i\pi d} - e^{2i\pi c})$

Donc

$$\iint_R e^{2i\pi(x+y)} dx dy = 0 \iff R \text{ est semi-entier}.$$

- Soit R_i un recouvrement de R par des rectangles semi-entiers.

Alors :

$$\iint_R e^{2i\pi(x+y)} dx dy = \sum_i \iint_{R_i} e^{2i\pi(x+y)} dx dy = 0.$$

Donc R est semi-entier. □

13.3.1

• Posons $J_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \int_n^\infty \left(1+\frac{t}{n}\right)^{n} e^{-t} dt$,

$K_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \int_{-n}^{n} \left(1+\frac{t}{n}\right) e^{-t} dt$.

On a :
$$J_n = \sqrt{n} \int_{[1,\infty[} \left((1+u)e^{-u}\right)^n du$$
avec $u = \frac{t}{n}$.

$u \mapsto (1+u)e^{-u}$ est intégrable décroissante sur $\mathbb{R}_+$.

Donc :
$$0 \le J_n \le \sqrt{n} \int_1^\infty \left(\frac{2}{e}\right)^{n-1} (1+u) e^{-u} du$$
$$\le \sqrt{n} \left(\frac{2}{e}\right)^{n-1} \int_1^\infty (1+u) e^{-u} du \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Donc $J_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

• On a :
$$K_n = \int_{-\sqrt{n}}^{\sqrt{n}} \left(1+\frac{v}{\sqrt{n}}\right)^n e^{-v\sqrt{n}} dv$$
avec $v = \frac{t}{\sqrt{n}}$.

Posons $f_n(v) = \left(1+\frac{v}{\sqrt{n}}\right)^n e^{-v\sqrt{n}} 1\!\!1_{]-\sqrt{n},\sqrt{n}[}$

où $1\!\!1_{]-\sqrt{n},\sqrt{n}[}$ est la f$^{\text{on}}$ caractéristique de $]-\sqrt{n},\sqrt{n}[$.

* Pour tout n, f_n est continue par morceaux intégrable.
* Pour tout v,
$$f_n(v) \xrightarrow[n\to\infty]{} e^{-v^2/2}.$$
* $\forall x > -1$, $\ln(1+x) \le x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$.

$\forall v \in]-\sqrt{n}, \sqrt{n}[$,
$$n \ln\left(1+\frac{v}{\sqrt{n}}\right) - v\sqrt{n} \le -\frac{v^2}{2} + \frac{v^3}{3\sqrt{n}}$$
$$\le -\frac{v^2}{2} + \frac{v^3}{3} \le -\frac{v^2}{6}.$$

Donc $0 \le f_n(v) \le e^{-v^2/6}$ et $v \mapsto e^{-v^2/6}$ est intégrable.

Donc, par TCD,
$$K_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_{\mathbb{R}} e^{-v^2/2} dv = \sqrt{2\pi}.$$

• $$J_n + K_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \int_{-n}^\infty \left(1+\frac{t}{n}\right) e^{-t} dt$$
$$= \frac{1}{\sqrt{n}} \int_0^\infty \left(\frac{u}{n}\right)^n e^n e^{-u} du$$
$$= \frac{1}{\sqrt{n}} \left(\frac{e}{n}\right)^n n! \xrightarrow[n\to\infty]{} \sqrt{2\pi}.$$

D'où la formule de Stirling. □

13.3.2. On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ de la norme triple $|||.|||$.

Pour $r > |||A|||$,
$$(re^{it} - A)^{-1} = \sum_{p=1}^\infty r^{-p} e^{-ipt} A^{p-1}.$$

$$I_k(r) = \int_0^{2\pi} \sum_{p=1}^\infty r^{k-p} e^{-i(k-p)t} A^{p-1} dt.$$

La convergence de la série est normale, donc :
$$I_k(r) = \sum_{p=1}^\infty r^{k-p} \int_0^{2\pi} e^{-i(k-p)t} dt \, A^{p-1}$$
$$= 2\pi A^{k-1}.$$

• Posons $\chi_A = a_0 + a_1 X + \dots + a_n X^n$. Pour r assez grand,
$$\chi_A(A) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \chi_A(re^{it}) re^{it} (re^{it} I_n - A)^{-1} dt.$$

On a : ${}^t\mathrm{Com}(x I_n - A)(x I_n - A) = \chi_A(x) I_n$.
$${}^t\mathrm{Com}(re^{it} I_n - A)(re^{it} I_n - A) = \chi_A(re^{it}) I_n.$$
$$\chi_A(A) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} re^{it} \, {}^t\mathrm{Com}(re^{it} - A).$$
$$= 0. \quad □$$

13.3.3. On vérifie que f est définie pour $x > 0$.

Soit $x_0 > 0$. Soit $F(x,t) = \frac{e^{-xt} \sin t}{t}$

1) $\forall x \ge x_0$, $t \mapsto F(x,t)$ est continue intégrable.

2) $\forall x \ge x_0$, $\forall t > 0$, $\frac{\partial F}{\partial x}(x,t)$ existe.
$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,t) = -e^{-xt} \sin t.$$

3) $\forall x \ge x_0$, $t \mapsto \frac{\partial F}{\partial x}(x,t)$ est continue intégrable.

4) $\forall t > 0$, $x \mapsto \frac{\partial F}{\partial x}(x,t)$ est continue.

5) $\forall t > 0$, $\forall x \ge x_0$,
$$\left|\frac{\partial F}{\partial x}(x,t)\right| \le e^{-x_0 t} \sin t$$
et $t \mapsto e^{-x_0 t} \sin t$ est intégrable.

Donc f est C^1 sur $[x_0, +\infty[$ donc sur $]0, +\infty[$, et :

$\forall x > 0$
$$f'(x) = -\int_0^\infty e^{-xt} \sin t \, dt.$$
$$= -\mathrm{Im} \int_0^\infty e^{t(i-x)} dt.$$
$$= -\mathrm{Im} \frac{1}{x-i} = \frac{-1}{x^2+1}.$$
$$f(x) = \text{c}^{\text{te}} - \mathrm{Arctan}\, x.$$

$\forall x > 0$,
$$|f(x)| \le \int_0^\infty e^{-xt} dt \xrightarrow[x\to\infty]{} 0.$$

Donc $f(x) \xrightarrow[x\to\infty]{} 0$. Donc $\text{c}^{\text{te}} = \frac{\pi}{2}$.

Donc $\forall x > 0$, $f(x) = \frac{\pi}{2} - \mathrm{Arctan}\, x$. □

13.3.4. Cf. 10.1.4.

13.1.1.

Soit $\|.\|$ une telle norme.
Alors: $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \forall P \in GL_n(\mathbb{R})$,
$$\|PA\| = \|AP\|$$
Par densité de $GL_n(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et par continuité de la norme, on a:
$\forall (A,B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$, $\|AB\| = \|BA\|$.
Or $E_{1n}E_{nn} \neq 0$ et $E_{nn}E_{1n} = 0$ si $n \geq 2$
Cela est impossible.
Donc si $n \geq 2$, une telle norme n'existe pas.
Pour $n=1$, la valeur absolue convient. □

13.1.2.

K est borné: soit $r>0$ tel que $K \subseteq B(0,r)$.
$E \setminus B(0,r)$ est connexe par arcs.
Soit $x \in B(0,r) \setminus K$. Il suffit de montrer que l'on peut relier x à un point de $E \setminus B(0,r)$. Montrons qu'on peut le faire par un segment.
Sinon, l'application
$$\varphi : \begin{array}{l} K \longrightarrow S = \text{sphère unité} \\ y \longmapsto \frac{x-y}{\|x-y\|} \end{array}$$
serait surjective. Donc, K étant compact et φ continue, S serait compacte. Mais le théorème de Riesz empêche que S soit compacte. Absurde!
Donc $E \setminus K$ est connexe par arcs. □

13.1.3.

Soit $f : \mathbb{R} \to GL_n(\mathbb{C})$ un morphisme de groupes continu.

- Soit: $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$.

F est C^1 sur $\mathbb{R}$
On sait que $F'(0) = f(0) = I_n$.
Donc $\frac{1}{t}F(t) \xrightarrow[t \to 0^+]{} I_n$, et comme $GL_n(\mathbb{C})$ est ouvert, on en déduit que $F(t) \in GL_n(\mathbb{C})$ pour t assez petit. Soit donc $a>0$ tel que $F(a) \in GL_n(\mathbb{C})$.
$\forall (x,u) \in \mathbb{R}^2$, $f(x+u) = f(x)f(u)$.
Donc:
$$\int_0^a f(x+u)\,du = f(x)\int_0^a f(u)\,du = f(x)F(a)$$
Or $x \mapsto \int_0^a f(x+u)\,du = \int_x^{x+a} f(t)\,dt$ est dérivable.
Donc f est dérivable.

- On a: $\forall x, u$, $f'(x+u) = f(x)f'(u)$.
$$f'(x) = f(x)f'(0).$$

Soit $A = f'(0)$, et soit $g : \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \\ s \mapsto f(s)e^{-sA} \end{array}$

$\forall s \in \mathbb{R}$, $g'(s) = 0$.
g est donc constante, et $g(0) = I_n$.
Donc $g(s) = f(s)e^{-sA} = I_n$ $\forall s$.
D'où $f(s) = e^{sA}$ $\forall s \in \mathbb{R}$.
Cela définit bien un morphisme de groupes continu. □

13.1.4.

13.2.1.

1) Soit $x_0 \in C$.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on pose :

$f_n : C \to C$
$x \mapsto \frac{1}{n}x_0 + \frac{n-1}{n} f(x)$

f_n est $(1-\frac{1}{n})$-lipschitzienne.

C est compact métrique, donc complet.

Le théorème du point fixe montre l'existence de $x_n \in C$ tel que $f(x_n) = x_n$.

C étant complet, on trouve $\varphi : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ strict. croissante telle que $x_{\varphi(n)}$ converge.

Soit y la limite.

Alors : $\frac{1}{n}x_0 + \frac{n-1}{n} f(x_n) = x_n$.

En passant à la limite,

$\underline{f(y) = y}$. □

2) Quitte à translater, je peux supposer que $0 \in A$.

A est non borné.

Soit donc $v_p \in A$ tel que $\|v_p\| \geq p$, pour $p \in \mathbb{N}$.

Notons $u_p = \frac{v_p}{\|v_p\|}$.

La sphère unité étant compacte, soit $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strict. croissante telle que $u_{\varphi(p)}$ converge.

Soit U la limite.

Soit $\lambda \in \mathbb{R}_+$.

Soit p_0 tel que :

$\forall p \geq p_0, \|v_{\varphi(p)}\| \geq \lambda$.

Alors : $\lambda \frac{u_{\varphi(p)}}{\|u_{\varphi(p)}\|} \in A$

par convexité.

A étant fermé, on déduit que :

$\lambda \frac{U}{\|U\|} = \lambda U \in A$.

Donc $\underline{\mathbb{R}_+ U \subseteq A}$ □

13.2.2

• Supposons A diagonalisable.

Soit $(A_p)_{p\geq 0}$ une suite de $S(A)$ qui converge. Soit B la limite.

$\forall p, \chi_{A_p} = \chi_A$.

Par continuité de $X \mapsto \chi_X$,

On a : $\chi_{A_p} \xrightarrow[p\to\infty]{} \chi_B$.

Donc $\chi_B = \chi_A$.

A étant diagonalisable, μ_A est à racines simples.

A et A_p étant semblables, $\forall p, \mu_A(A_p) = 0$.

Donc $\mu_A(B) = 0$.

B est donc diagonalisable.

Avec $\chi_B = \chi_A$, il est immédiat que $B \in S(A)$.

Donc $\underline{S(A) \text{ est fermée}}$.

• Supposons $S(A)$ fermée.

On peut supposer A triangulaire supérieure car $\mathbb{C}$ est algébriquement clos.

Soit $(e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{C}^n$. Soit A_p la matrice de l'endomorphisme associé à A dans la base $(\frac{e_1}{p}, \frac{e_2}{p^2}, \dots, \frac{e_n}{p^n})$.

$\forall p \in \mathbb{N}^*, \quad A_p \in S(A)$.

De plus, $A_p \xrightarrow[p\to\infty]{} \begin{pmatrix} a_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_{nn} \end{pmatrix}$.

Donc $\begin{pmatrix} a_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_{nn} \end{pmatrix} \in S(A)$.

$\underline{\text{Donc A est diagonalisable}}$. □

13.2.3.

Soit $a \in X$. On considère la suite définie par : $x_0 = a$, $x_{n+1} = f(x_n)$.

Par compacité, on extrait $(x_{\varphi(n)})$ convergente. Alors :

$\|x_{\varphi(n+1)-\varphi(n)} - x_0\| \leq \|x_{\varphi(n+1)} - x_{\varphi(n)}\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

On peut supposer que $\psi(n) = \varphi(n+1) - \varphi(n)$ est strict. croissante. Alors $a = \lim_{n\to\infty} x_{\psi(n)}$.

• Soit $b \in X$. Posons $y_0 = b$, $y_{n+1} = f(y_n)$.

Comme avant, on peut trouver $\psi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strict. croissante telle que $\begin{cases} x_{\psi(n)} \to a \\ y_{\psi(n)} \to b \end{cases}$

$\forall n, \|x_{\psi(n)} - y_{\psi(n)}\| \geq \|f(a) - f(b)\|$

donc $\|a - b\| \geq \|f(a) - f(b)\|$.

donc $\|a - b\| = \|f(a) - f(b)\|$.

$\underline{f \text{ est une isométrie}}$.

• f est donc injective et continue.

On a vu que $\overline{f(X)} = X$.

Mais X étant compact, $f(X)$ l'est aussi, donc $f(X)$ est fermé et $f(X) = \overline{f(X)} = X$.

$\underline{f \text{ est bien bijective}}$. □

13.2.4.

• $\exp(\mathcal{M}_n(\mathbb{C})) \subseteq GL_n(\mathbb{C})$.

• Soit $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ nilpotente.

Soit p l'indice de nilpotence.

Soit $M = \sum_{k=1}^{p} (-1)^{k-1} \frac{N^k}{k} = P(N)$, où

$P = \sum_{k=1}^{p} (-1)^{k-1} \frac{X^k}{k}$.

On pose $Q = \sum_{k=1}^{p} \frac{X^k}{k!}$.

On a les développements au voisinage de 0 :

$e^x - 1 = Q(x) + o(x^p)$.

$\ln(x+1) = P(x) + o(x^p)$.

Donc :

$x = e^{\ln(x+1)} - 1 = Q(P(x)) + o(x^p)$.

Donc $X^p \mid Q \circ P - X$.

Donc $Q(P(N)) - N = 0$.

Or $Q(P(N)) = \exp(P(N)) - I_n$.

Donc $\exp(P(N)) = I_n + N$.

• Soit $B \in GL_n(\mathbb{C})$.

On écrit le polynôme minimal :

$\mu_B = (X - \lambda_1)^{\alpha_1} \cdots (X - \lambda_r)^{\alpha_r}$

avec $\lambda_i \in \mathbb{C}^*$ 2 à 2 distincts.

Le lemme des noyaux donne :

$\mathbb{C}^n = \mathrm{Ker}\, \mu_B(b) = \bigoplus \mathrm{Ker}(b - \lambda_k I_n)^{\alpha_k}$.

Notons b l'endomorphisme associé à B.

Notons $F_k = \mathrm{Ker}(B - \lambda_k I_n)^{\alpha_k}$.

Alors il existe n_k nilpotent tel que :

$b|_{F_k} = \lambda_k \mathrm{id}_{F_k} + n_k$.

Matriciellement, B est semblable à une matrice diagonale par blocs $\mathrm{Diag}(D_1, \dots, D_r)$, où $D_k = \lambda_k Id + N_k$ et N_k nilpotente.

On a : $\frac{1}{\lambda_k} D_k = \exp\left(P\left(\frac{N_k}{\lambda_k}\right)\right)$.

Soit $\mu_k \in \mathbb{C}$ tel que $\lambda_k^{-1} = \exp(\mu_k)$.

Alors $D_k = \exp\left(\mu_k P\left(\frac{N_k}{\lambda_k}\right)\right)$.

Soit $G \in GL_n(\mathbb{C})$ tel que

$B = G^{-1} \mathrm{Diag}(D_1, \dots, D_r) G$.

Alors :

$B = G^{-1} \exp\left(\mathrm{Diag}\left(\mu_1 P\left(\frac{N_1}{\lambda_1}\right), \dots, \mu_r P\left(\frac{N_r}{\lambda_r}\right)\right)\right) G$

$= \exp\left(G^{-1} \mathrm{Diag}\left(\mu_1 P\left(\frac{N_1}{\lambda_1}\right), \dots, \mu_r P\left(\frac{N_r}{\lambda_r}\right)\right) G\right)$

Donc :

$\underline{\exp(\mathcal{M}_n(\mathbb{C})) = GL_n(\mathbb{C})}$. □

13.3.1

- X est clairement connexe par arcs puisque tout point de X peut être relié à O.
- Supposons $p=1$.
Soit $x=(1,1,0,0,\dots,0)\in X$ et $y=(-1,1,0,0,\dots,0)\in X$.
Soit $\gamma : [0,1]\to X\setminus\{0\}$ continue tel que $\gamma(0)=x$, $\gamma(1)=y$.
Par le théorème des valeurs intermédiaires, soit $t_0\in[0,1]$ tel que $p_1(\gamma(t_0))=0$ où p_i est la projection sur la i^e coordonnée.
Alors $\gamma(t_0)=0\notin X\setminus\{0\}$: absurde !
Donc $X\setminus\{0\}$ n'est pas connexe par arcs. □
- On a le même résultat si $q=1$.
- Supposons $p\geq 2$, $q\geq 2$.
Montrons que $X\setminus\{0\}$ est connexe par arcs.
Soient $M=(a_1,\dots,a_p,b_1,\dots,b_q)$ et $N=(c_1,\dots,c_p,d_1,\dots,d_q)$ dans $X\setminus\{0\}$.
Soit $M'=\lambda M$ où $\lambda=\sqrt{\dfrac{c_1^2+\dots+c_p^2}{a_1^2+\dots+a_p^2}}$.
Alors $M'\in X\setminus\{0\}$ et $[M,M']\subseteq X\setminus\{0\}$.
Il suffit donc de trouver un chemin de $M'=(\alpha_1,\dots,\alpha_p,\beta_1,\dots,\beta_q)$ vers N.
On a : $\sum \alpha_i^2=\sum c_i^2$ et $\sum d_i^2=\sum\beta_i^2$.
Comme $p\geq 2$ et $q\geq 2$, les sphères de $\mathbb{R}^p$ et de $\mathbb{R}^q$ sont connexes par arcs.
On trouve donc deux chemins γ_1 et γ_2 continus :

$$\begin{cases}\gamma_1 : [0,1]\to\mathbb{R}^p\\ \gamma_2 : [0,1]\to\mathbb{R}^q.\\ \gamma_1(0)=(\alpha_1,\dots,\alpha_p),\ \gamma_1(1)=(c_1,\dots,c_p)\\ \gamma_2(0)=(\beta_1,\dots,\beta_p),\ \gamma_2(1)=(d_1,\dots,d_p)\\ \forall t,\ \ \|\gamma_1(t)\|_2=\alpha_1^2+\dots+\alpha_p^2.\\ \qquad\ \|\gamma_2(t)\|_2=\beta_1^2+\dots+\beta_p^2\end{cases}$$

Alors $t\mapsto(\gamma_1(t),\gamma_2(t))$ est un chemin continu dans $X\setminus\{0\}$ reliant M' et N.
Donc $X\setminus\{0\}$ est connexe par arcs. □

13.3.2.

- Soit $X_n=\left\{f\in E\ \middle|\ \begin{array}{l}\forall k\in[\![0,n-1]\!],\ f \text{ affine sur } [\frac{k}{n},\frac{k+1}{n}]\,;\\ f(0)\in\{0,\frac1n,\dots,\frac{n-1}{n},1\},\ \forall k\in[\![0,n-1]\!],\ \dots\end{array}\right\}$

Soit $g\in E$.
Soit $f\in X_n$ telle que : $\forall k\in[\![0,n]\!]$, $|f(\frac{k}{n})-g(\frac{k}{n})|\leq\frac{1}{n}$.
Soit $x\in[0,1]$ et $k\in[\![0,n]\!]$ tel que $|x-\frac{k}{n}|\leq\frac{1}{2n}$.
Alors : $|g(x)-f(x)|\leq|g(x)-g(\frac{k}{n})|+|g(\frac{k}{n})-f(\frac{k}{n})|+|f(\frac{k}{n})-f(x)|$.
$\leq\frac{2}{n}$.
Donc $N(\frac{2}{n})\leq\mathrm{Card}(X_n)\leq(n+1)\cdot 3^n$.
- $\forall f,g\in X_n$, $f\neq g\Rightarrow\|f-g\|_\infty\geq\frac{1}{n}$.
Donc $N(\frac{1}{2n})\geq\mathrm{Card}(X_n)\geq 2^n$.

Donc : $\forall n\in\mathbb{N}$,
$$2^n\leq N\left(\frac{1}{2n}\right)\leq(4n+1)3^{4n}.$$
Soit $\varepsilon\in\left]0,\frac12\right[$. Soit $n\in\mathbb{N}^*$ tel que $\frac{1}{2(n+1)}\leq\varepsilon\leq\frac{1}{2n}$.
Alors : $2^n\leq N(\varepsilon)\leq(4n+5)3^{4n+4}$ par décroissance de N.
$2^{\frac{1}{2\varepsilon}-1}\leq N(\varepsilon)\leq\left(\frac{2}{\varepsilon}+5\right)3^{\frac{2}{\varepsilon}+4}$.
Donc $\ln\ln N(\varepsilon)\underset{\varepsilon\to0^+}{\sim}-\ln\varepsilon$. □

13.3.3.

1)