Calcul fonctionnel mesurable

Diego IZQUIERDO

10 novembre 2011

Table des matières

1 Rappel : isomorphisme de Gelfand

Théorème 1.1. ***Isomorphisme de Gelfand***
Soit A une C^*-algèbre abélienne unifère. Alors $Sp(A)$ est compact pour la topologie de la convergence simple et l'application $G : A \to \mathcal{C}(Sp(A)), a \mapsto (\chi \mapsto \chi(a))$ est un isomorphisme de C^*-algèbres.

Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert. Soit $B(\mathcal{H})$ la C^*-algèbre des opérateurs linéaires continus sur $\mathcal{H}$. On prend pour A une sous-*-algèbre abélienne unifère uniformément fermée de $B(\mathcal{H})$. Pour $f \in \mathcal{C}(Sp(A))$, on notera T_f l'unique élément de A tel que $G(T_f) = f$. On appelle $f \mapsto T_f$ l'**isomorphisme de Gelfand**.

2 Mesures spectrales

Fixons $x, y \in \mathcal{H}$. On définit une application linéaire continue $f \mapsto (T_f x|y)$. Soit donc $\nu_{x,y}$ l'unique mesure signée sur $Sp(A)$ telle que $\forall f \in C(Sp(A)), \nu_{x,y}(f) = (T_f x|y)$. Les $\nu_{x,y}$ sont dites **mesures spectrales**. On a :

Proposition 2.1. ***Propriétés des mesures spectrales***
(i) $\| \nu_{x,y} \| \leq \| x \| \| y \|$.
(ii) $\nu_{\lambda x+\mu y} = \lambda\nu_x + \mu\nu_y$.
(iii) $\nu_{y,x} = \overline{\nu_{x,y}}$.
(iv) $\nu_{x,x} \geq 0$.
(v) $4\nu_{x,y} = \nu_{x+y,x+y} - \nu_{x-y,x-y} + i\nu_{x+iy,x+iy} - i\nu_{x-iy,x-iy}$.
(vi) La réunion des supports des $\nu_{x,x}$ *est dense dans* $Sp(A)$.

Démonstration. Facile. □

3 Mesures basiques

Définition 3.1. *Une mesure positive* ν *sur* $Sp(A)$ *est dite* ***basique*** *si la propriété suivante est vérifiée : une partie* S *de* $Sp(A)$ *est* ν*-négligeable si, et seulement si, elle est* $\nu_{x,x}$*-négligeable pour tout* $x \in \mathcal{H}$.

Remarque 3.2. *(i) Deux mesures spectrales sont équivalentes.*
(ii) Supposons l'existence d'une mesure basique ν*. Pour tous,* $x, y \in \mathcal{H}$*,* $\nu_{x,y} \ll \nu$*. On note donc* $h_{x,y} = \frac{d\nu_{x,y}}{d\nu}$.
(iii) Le support d'une mesure spectrale ν *est* $Sp(A)$*. On en déduit que* $C(Sp(A)) \hookrightarrow L^\infty(Sp(A), \nu)$.

Théorème 3.3. *On munit* $L^\infty(Sp(A), \nu)$*, dual de* $L^1(Sp(A))$*, de la topologie faible-*, et* $B(\mathcal{H})$ *de la topologie faible. Il existe un unique morphisme d'$*$-algèbres de* $L^\infty(Sp(A), \nu)$ *dans* $B(\mathcal{H})$ *continu pour les topologies précédentes et qui prolonge l'isomorphisme de Gelfand : on le note* $f \mapsto T_f$*. Cet isomorphisme est isométrique, et son image est l'adhérence faible de* A*. De plus, pour tous* $f \in L^\infty(Sp(A))$ *et* $x, y \in \mathcal{H}$*, on a* $(T_f x|y) = \int f d\nu_{x,y}$ *(*).*

Dans un espace vectoriel topologique localement convexe E, on dit qu'une partie B de B est bornée si pour tout voisinage V de 0, il existe λ tel que $B \subseteq \lambda V$. Avant de prouver le théorème, commençons par le lemme suivant :

Lemme 3.4. *Soient* E *un espace vectoriel topologique localement convexe et* M *un sous-espace de* E*. Soit* F *un espace vectoriel topologique localement convexe dans lequel toute partie fermée bornée est complète. On suppose de plus que tout* *point de E est adhérent à une partie bornée de M. On se donne $f : M \to F$ linéaire continue. Alors f se prolonge de manière unique en une application linéaire continue $E \to F$.*

Démonstration. (Sketch)
On voit que f se prolonge en $\widehat{f} : E \to \widehat{F}$, où $\widehat{F}$ est le complété de F. Pour $x \in E$, il existe B borné dans M tel que $x \in \overline{B}$, et donc $f(x) \in \overline{f(B)} \subseteq F$. Donc l'image de $\widehat{f}$ est incluse dans F. □

Démonstration. (du théorème)
Montrons que les hypothèses du lemme sont vérifiées :
(1) Pour $f \in C(Sp(A))$, $(T_f x|y) = \int f h_{x,y} d\nu$. On en déduit que l'isomorphisme de Gelfand $C(Sp(A)) \to A, f \mapsto T_f$ est continu pour les topologies du théorème.
(2) Tout point de $L^\infty(Sp(A), \nu)$ est faiblement adhérent à une partie bornée de $C(Sp(A))$.
(3) La boule unité fermée de $B(\mathcal{H})$ est complète.
Par le lemme, on en déduit que l'isomorphisme de Gelfand $C(Sp(A)) \to A, f \mapsto T_f$ se prolonge de manière unique en une application linéaire continue $L^\infty(Sp(A), \nu) \to B(\mathcal{H})$, que nous notons toujours $f \mapsto T_f$. Son image est contenue dans l'adhérence faible de A et, par continuité, on a pour $f, g \in L^\infty(Sp(A), \nu)$, $x, y \in \mathcal{H}$:

$$(T_f x|y) = \int f d\nu_{x,y}, T_f^* = T_{\overline{f}}, T_{fg} = T_f T_g.$$

Donc $f \mapsto T_f$ est bien un morphisme de C^*-algèbres.
Montrons qu'il est isométrique. Soit $f \in L^\infty(Sp(A), \nu)$ positive. Comme $f \mapsto T_f$ est un morphisme de C^*-algèbres, $\|T_f\| \leq \|f\|$. Par (*), si $0 \leq g \leq h$, alors $0 \leq T_f \leq T_g$. Soit $\mu \geq 0$ tel que $\mu \leq f$ sur un ensemble de mesure non nulle, B. Alors $0 \leq \mu 1_B \leq f$, et donc $\mu T_{1_B} = T_{\mu 1_B} \leq T_f$. Or T_{1_B} est un projecteur orthogonal. Comme B n'est pas de mesure nulle, il existe $x \in \mathcal{H}$ tel que $\nu_{x,x}(B) > 0$, et donc $(T_{1_B} x|x) = \nu_{x,x}(B) > 0$. On en déduit que $T_{1_B} \neq 0$, et donc que $\|T_f\| \geq \mu$. Finalement $\|T_f\| = \|f\|$.
On ne suppose plus f positive. Alors $\|T_{f\overline{f}}\| = \|f\overline{f}\| = \|f\|^2 = \|T_f T_f^*\| = \|T_f\|^2$. Donc $f \mapsto T_f$ est isométrique.
Soit I l'image de notre prolongement. On sait que I contient A et est contenu dans l'adhérence faible de A. Il nous suffit donc de montrer que I est faiblement fermé. Par le théorème de Banach-Alaoglu, la boule unité de $L^\infty(Sp(A), \nu)$ est faiblement compacte. Son image par $f \mapsto T_f$ est la boule unité de I. Donc la boule unité de I est faiblement compacte, et par conséquent faiblement fermée. Une quantification simple montre alors que I lui-même est faiblement fermé. □

4 Totalisateur et séparateur

Définition 4.1. ***Totalisateur et séparateur*** *Soit M une partie de $\mathcal{H}$.*

(i) On note X_M^A le sous-espace vectoriel fermé de $\mathcal{H}$ engendré par les Tx pour $T \in A$ et $x \in M$. On note aussi E_M^A le projecteur orthogonal sur X_M^A.

*(ii) On dit que M est **totalisateur** pour A si $X_M^A = \mathcal{H}$.*

*(iii) On dit que M est **séparateur** pour A si : $\forall T \in A, T(M) = 0 \Rightarrow T = 0$.*

Proposition 4.2. ***Critère de stabilité***

Soit X un sous-espace vectoriel fermé de A. Notons P_X le projecteur orthogonal sur X. Alors X est stable par A si, et seulement si, $P_X \in A'$.

Démonstration. Si $P_X \in A'$, alors, pour tout $T \in A$ et $x \in X$, $Tx = TP_Xx = P_XTx$, donc $Tx \in X$. Réciproquement, si X est stable par A, alors pour $T \in A$,

$$TP_X(\mathcal{H}) \subset X,$$

d'où

$$P_XTP_X = TP_X.$$

On en déduit

$$P_XT = (T^*P_X)^* = (P_XT^*P_X)^* = P_XTP_X = TP_X.$$

□

Proposition 4.3. ***Caractérisation de X_M^A***

Soit M une partie de $\mathcal{H}$. Alors X_M^A est le plus petit sous-espace vectoriel fermé X de $\mathcal{H}$ contenant M tel que $P_X \in A'$.

Démonstration. Exercice. □

Proposition 4.4. ***Relation entre séparateur et totalisateur***

Soit M une partie de $\mathcal{H}$.

(i) L'ensemble M est totalisateur pour A si, et seulement si, M est séparateur pour A'.

(ii) Supposons de plus que A est une algèbre de von Neumann. Alors M est séparateur pour A si, et seulement si, M est totalisateur pour A'.

Démonstration. (i) Supposons M séparateur pour A'. Comme $(Id - E_M^A)(M) = 0$, on a $E_M^A = Id$, d'où $X_M^A = \mathcal{H}$.

Réciproquement, supposons $X_M^A = \mathcal{H}$. Soit $T' \in A'$ tel que $T'(M) = 0$. Alors pour tout $T \in A$, $T'T(M) = 0$, donc $T'(X_M^A) = 0$, d'où $T' = 0$.

(ii) Il suffit d'échanger A et A' dans (i).

□

Soit A une algèbre de von Neumann, de centre Z.

Définition 4.5. ***Support et support central***
*(i) Soit $T \in B(\mathcal{H})$. Soit X l'orthogonal du sous-espace fermé des $x \in \mathcal{H}$ tels que $Tx = 0$. Le projecteur P_X est appelé **support** de T.*
*(ii) Soit $T \in A$. On appelle **support central** de T le plus petit projecteur orthogonal de Z majorant le support de T.*

Proposition 4.6. *Soit $M \subseteq \mathcal{H}$, et $N = X_M^A$. Alors $X_N^{A'} = X_M^{Z'}$.*

Démonstration. L'inclusion $X_N^{A'} \subseteq X_M^{Z'}$ est triviale. Il suffit de montrer que $E_N^{A'} \in Z$, c'est à dire que $X_N^{A'}$ est stable par A et par A'. Par A', c'est évident. Pour $x \in N, T' \in A', T \in A$, on a $TT'x \in T'(N)$, donc $T(X_N^{A'}) \subseteq X_N^{A'}$. □

Corollaire 4.7. *Soit N un sous-espace vectoriel fermé de $\mathcal{H}$ tel que $P_N \in A$. Alors E_N^A est le support central de P_N.*

Démonstration. Comme $N = X_N^{A'}$, on a $X_N^{A'} = X_N^{Z'}$. □

5 Algèbres de von Neumann induites et réduites

Définition 5.1. *Soit P_X le projecteur orthogonal sur X de $\mathcal{H}$ et $T \in B(\mathcal{H})$. On note T_X la restriction à X de $P_X T$ à X. C'est un élément de $B(X)$. Pour $M \subseteq B(\mathcal{H})$, on note M_X l'ensemble des T_X pour $T \in M$.*

Dans cet exposé, on admettra la proposition suivante, qui sera (probablement) traitée dans un exposé à venir :

Proposition 5.2. ***Algèbres de von Neumann induites et réduites***
Soit A une algèbre de von Neumann et $E = P_X$ un projecteur dans A. Alors A_E et $(A')_E$ sont des algèbres de von Neumann, et $(A')_E = (A_E)'$.

Définition 5.3. ***Algèbres de von Neumann induites et réduites***
*Les algèbres de von Neumann A'_E et A_E sont appelées respectivement **algèbre de von Neumann induite par A' dans X** et **algèbre de von Neumann réduite de** A. L'homomorphisme de C^*-algèbres $T' \mapsto T'_E$ de A' dans A'_E est appelé **induction de A' sur A'_E**.*

Proposition 5.4. ***Induction et isomorphisme***
Soient A une algèbre de von Neumann, E un projecteur orthogonal de A, F son support central. L'induction est un isomorphisme si, et seulement si, $F = Id$.

Démonstration. Le sens direct découle immédiatement de $(Id-F)_E = 0$. Réciproquement, supposons $F = Id$. Notons $X = E(\mathcal{H})$. Les $T(X)$ pour $T \in A$ engendrent $\mathcal{H}$. Pour $T' \in A'$ tel que $T'_E = 0$, $T'(X) = 0$, donc $T'T(X) = 0$ si $T \in A$, d'où $T' = 0$. □

Définition 5.5. *Soit A une algèbre de von Neumann. On dit qu'elle est de* ***genre dénombrable*** *si toute famille de projecteurs orthogonaux deux à deux orthogonaux dans A est dénombrable.*

Théorème 5.6. *Une algèbre de von Neumann A abélienne de genre dénombrable possède un élément séparateur.*

Démonstration. Soit $(x_i)_{i\in I}$ une famille maximale d'éléments non nuls de $\mathcal{H}$ telle que les $E_i = E^{A'}_{x_i}$ sont deux à deux orthogonaux et les $E'_i = E^A_{x_i}$ sont deux à deux orthogonaux. Comme A est de genre dénombrable, la famille est dénombrable. On peut supposer que $\sum_{i\in I} \|x_i\|^2 < +\infty$, et on pose alors $x = \sum_{i\in I} x_i$. Soient $E = \sum_{i\in I} E_i \in A$, $E' = \sum_{i\in I} E'_i \in A'$, $F = Id - E$, $F' = Id - E'$.
On note F_1 et F'_1 les supports centraux de F et de F'. Par maximalité de la famille (x_i), $F(\mathcal{H}) \cap F'(\mathcal{H}) = 0$, et donc $F'F = 0$. On en déduit que $(F')_F = 0$. D'après la proposition précédente, $(F')_{F_1} = 0$ et donc $F_1F' = 0$.
Comme $F_1F' = 0$, on a $E = Id - F \geq Id - F_1$ et $E' = Id - F' \geq F_1$. Comme $x_i = E_ix = E'_ix$, on a $E^A_x \geq E'_i$ et $E^{A'}_x \geq E_i$, donc $E^A_x \geq E'$ et $E^{A'}_x \geq E$.
On a donc que $Id - F_1$ est majoré par $E^{A'}_x$ et F_1 par E^A_x et donc par $E^{A'}_x$. Donc $E^{A'}_x = Id$ et x est séparateur pour A.

□

6 Existence de mesures basiques

Proposition 6.1. *Si $x \in \mathcal{H}$ est totalisateur pour A', alors $\nu_{x,x}$ est une mesure basique sur $Sp(A)$.*

Démonstration. Soit $y \in \mathcal{H}$. Il faut montrer que $\nu_{y,y} \ll \nu_{x,x}$. Supposons d'abord qu'il existe $T' \in A'$ tel que $y = T'x$. Alors, pour f positive continue sur $Sp(A)$, on a :

$$\nu_{y,y}(f) = (T_fT'x|T'x) = \|T'T_{\sqrt{f}}x\|^2 \leq \|T'\|(T_fx|x) = \|T'\|^2\nu_{x,x}(f)$$

donc $\nu_{y,y} \ll \nu_{xx}$.
On ne suppose plus rien sur y. Soit $\lambda > 0$, et fixons $\epsilon > 0$. Comme x est totalisateur, il existe $y' \in A'x$ tel que :

$$\lambda\|y\|\|y - y'\| \ll \frac{\epsilon}{4},\ \|y'\| \leq \|y\|.$$

Alors, pour toute f continue positive majorée par λ, on a :

$$| \int f d\nu_{y,y} - \int f d\nu_{y',y'} | \leq |(T_f y|y) - (T_f y|y')| + |(T_f y|y') - (T_f y'|y')|$$

$$| \int f d\nu_{y,y} - \int f d\nu_{y',y'} | \leq \|T_f\| \|y\| \|y - y'\| + \|T_f\| \|y'\| \|y - y'\|$$

$$| \int f d\nu_{y,y} - \int f d\nu_{y',y'} | \leq \lambda \|y\| \|y - y'\| \leq \varepsilon/2$$

Or il existe $\delta > 0$ tel que, si $\int f d\nu_{x,x} \leq \delta$, alors $\int f d\nu_{y',y'} \leq \epsilon/2$. Donc pour f continue positive majorée par λ, si $\int f d\nu_{x,x} \leq \delta$, alors $\int f d\nu_{y,y} \leq \epsilon$, d'où $\nu_{y,y} \ll \nu_{x,x}$. □

Proposition 6.2. *Il existe une mesure basique bornée sur $Sp(A)$ si, et seulement si, il existe un élément totalisateur pour A'.*

Proposition 6.3. *Soit B une algèbre de von Neumann abélienne dans $\mathcal{H}$. On suppose que $\mathcal{H}$ est à base dénombrable. Pour toute sous-C^*-algèbre unifère A de B fermée uniformément, $Sp(A)$ porte une mesure basique bornée.*

Démonstration. Il existe un élément totalisateur pour B'. Alors $A' \supseteq B'$, donc x totalisateur pour A'. □

7 Structure des algèbres de von Neumann abéliennes et applications

Le théorème et la proposition qui suivent découlent immédiatement des parties 3 et 6.

Théorème 7.1. *Soit A une algèbre de von Neumann abélienne dans $\mathcal{H}$, supposé à base dénombrable. Il existe un espace compact X, une mesure positive ν sur X de support X et un isomorphisme isométrique de C^*-algèbres entre A et $L^\infty(X, \nu)$.*

Proposition 7.2. ***Cas particulier d'une algèbre de von Neumann engendrée par un élément***
Soit $T \in B(\mathcal{H})$ normal. Soit $A = C^*(T, T^*)''$ l'algèbre de von Neumann engendrée par T. Soit $Y = C^*(T, T^*)$ la C^*-algèbre unifère engendrée par T. Notons $X = Sp(T) \subseteq \mathcal{C}$. Il existe une mesure positive ν sur X telle qu'il existe un isomorphisme $L^\infty(X, \nu) \to A$ qui prolonge l'isomorphisme $C(X) \to Y$. On note $f \to f(T)$.

Et en voici une application immédiate :

Corollaire 7.3. ***Projecteurs orthogonaux***
Une algèbre de von Neumann A est engendrée par ses projecteurs orthogonaux.

Démonstration. Soit B l'algèbre de von Neumann engendrée par les projecteurs orthogonaux de A.
Soit $T \in A$. Posons $S_1 = \frac{T+T^*}{2}$ et $S_2 = \frac{i(T^*-T)}{2}$. Les endomorphismes S_1 et S_2 sont normaux et dans A. Pour U mesurable dans $Sp(S_1)$ (resp. $Sp(S_2)$), $1_U(S_1)$ (resp. $1_U(S_2)$) est un projecteur orthogonal. En approchant $z \mapsto z$ par des fonctions étagées, on voit bien que S_1 et S_2 sont dans B, et donc T aussi. Donc $A = B$. $\square$

8 Bibliographie

Les Algèbres d'opérateurs dans l'espace hilbertien (Algèbres de von Neumann) - Jacques Dixmier - 1957 : I.1.4, I.2.1, I.7, Annexe I, Annexe III.

Espaces vectoriels topologiques - Bourbaki : III.2.