Groupe de travail : Théorie algébrique des formes quadratiques

Diego Izquierdo

Premier semestre 2017-2018

Rappels d'algèbre 1 :

- -existence de bases orthogonales.
- -plan hyperbolique, espaces hyperboliques.
- -classification des formes quadratiques sur \mathbb{C} , \mathbb{R} et les corps finis.

Le programme qui suit pourra bien sûr être modifié en fonction de la vitesse d'avancement.

I Classification des formes quadratiques via des invariants.

Exposé 1 : Anneau de Witt et premiers invariants de formes quadratiques.

Référence: [4].

- -Théorèmes de décomposition et d'annulation de Witt : Th. I.4.1 et I.4.2.
- -Produit de Kronecker : paragraphe I.6.
- -Anneau de Witt et idéal fondamental : paragraphe II.1.
- -Les deux premiers invariants, dimension et discriminant : paragraphe II.2.
- -Quelques exemples (corps algébriquement clos, corps quadratiquement clos, \mathbb{R} , corps finis) : paragraphe II.3.

Exposé 2 : Algèbres de quaternions et invariant de Hasse.

 $R\'{e}f\'{e}rences: [1], [4].$

- -Théorème d'équivalence par chaînes de Witt : paragraphe I.5 de [4].
- -Algèbres simples centrales et groupes de Brauer : paragraphe IV.1 de [4]. On pourra aussi regarder le chapitre 2 de [1].
- -Algèbres de quaternions : paragraphes III.1 et III.2 de [4]. On pourra aussi regarder le chapitre 1 de [1].
- -Invariant de Hasse : définition V.3.17, proposition V.3.18, paragraphe V.3 à partir du théorème V.3.21 de [4].

Exposé 3 : Algèbres simples centrales graduées et algèbres de Clifford.

Références: [3] et [4].

- -Algèbres simples centrales graduées et groupes de Brauer-Wall : paragraphes IV.2, IV.3, IV.4, et pages 116 et 117 de [4]. On pourra aussi regarder le paragraphe 6.3 de [3].
- -Algèbres de Clifford : paragraphes V.1 et V.2 de [4]. On pourra aussi regarder le paragraphe 6.2 de [3].

Exposé 4 : Invariants de Clifford et de Witt. Premiers pas vers les conjectures de Milnor.

Référence: [4].

- -Invariants de Clifford et de Witt : paragraphe V.3.
- -Premiers pas vers les conjectures de Milnor et le théorème de Merkurjev-Suslin : paragraphe V.6.
- -En admettant le théorème V.6.11, montrer le théorème de classification XII.3.1 dans le cas $I^3F=0$.

Exposé 5 : Le cas du corps des nombres rationnels.

R'ef'erences: [4].

- -Théorème de Springer et classification des formes quadratiques sur \mathbb{Q}_p pour $p \neq 2$: spécifier les paragraphes VI.1 et VI.2 au cas de \mathbb{Q}_p pour $p \neq 2$.
- -A titre culturel, énoncer la situation sur \mathbb{Q}_2 : énoncer le corollaire VI.2.24 (sans (3)).
- -Anneau de Witt de \mathbb{Q} : paragraphe VI.4.
- -Classification des formes quadratiques sur $\mathbb Q$: corollaire VI.3.3 dans le cas de
- $\mathbb Q.$ En déduire le corollaire VI.3.10 pour $\mathbb Q,$ puis le théorème 6.11 dans ce cas.
- -A titre culturel, décrire brièvement la situation sur un corps de nombres quelconque, et mentionner le théorème de Hasse-Minkowski.

II Formes de Pfister et corps de fonctions.

Exposé 6: Formes quadratiques et extensions de corps.

Référence: [4].

- -Formes quadratiques et extensions algébriques (théorème de Springer pour les extensions de degré impair, cas des extensions quadratiques) : théorèmes VII.2.7, VII.3.1 et VII.3.2 et corollaire VII.3.3.
- -Formes quadratiques et extensions transcendantes (théorème de Cassels-Pfister, principe de substitution, théorèmes de représentation) : paragraphes IX.1 et IX.2.

Exposé 7 : Formes multiplicatives et formes de Pfister.

 $R\'{e}f\'{e}rence: [4].$

- -Multiplicativité des formes de Pfister : paragraphe X.1 jusqu'au corollaire X.1.9.
- -Formes multiplicatives : paragraphe X.2 jusqu'au théorème X.2.9.

Exposé 8 : Description des formes quadratiques dans I^nF et conjectures de Milnor.

Références: [4] et [7].

- -Formes quadratiques et corps de fonctions : théorèmes X.4.1, X.4.5 et X.4.14 de [4].
- -Hauptsatz : paragraphe X.5 jusqu'au théorème X.5.6 de [4].
- -A titre culturel, on pourra citer le théorème de Vishik : théorème X.5.20 de [4].
- -Conjectures de Milnor : paragraphe X.6 de [4]. On se contentera de présenter les conjectures de manière culturelle. Comme application de l'exposé 7 et du Hauptsatz, on établira le lemme 2.16 de [7].

III Corps formellement réels, réel-clos et Pythagoriciens.

Exposé 9 : Corps formellement réels et 17ème problème de Hilbert.

 $R\'{e}f\'{e}rences: [4], [5].$

- -Corps formellement réels : paragraphe VIII.1 de [4] ou 6.1 de [5].
- -Corps réel-clos : paragraphe VIII.2 ou 6.1 de [5].
- -17ème problème de Hilbert : paragraphe 6.2 de [5].

Exposé 10 : Quelques propriétés structurelles de l'anneau de Witt.

R'ef'erence: [4].

- -Principe local-global de Pfister : paragraphe VIII.3. En combinant ce principe avec les conjectures de Milnor (admises), démontrer le théorème de classification XII.3.1.
- -Corps Pythagoriciens : théorème VIII.4.1.
- -Spectre de l'anneau de Witt : paragraphe VIII.7.
- -Quelques propriétés structurelles de l'anneau de Witt : paragraphe VIII.8.

IV Invariants des corps associés aux formes quadratiques.

Exposé 11 : Niveau, nombre de Pythagore et u-invariant.

 $R\acute{e}f\acute{e}rences: [2], [4] et [6].$

- -Niveau d'un corps : paragraphe XI.2 de [4].
- -u-invariant : paragraphe XI.6 de [4].
- -Corps C_n et théorie de Tsen-Lang : [2].
- -Théorème de Pfister pour $\mathbb{R}(X_1,...,X_n)$: théorème XI.4.10 de [4]. Voir aussi le paragraphe 7 de [6].
- -Nombre de Pythagore : paragraphe XI.5 de [4].

Exposé 12 : Invariants d'anneaux et liens avec la topologie algébrique.

Références: [4] et [5].

Paragraphes XIII.4 et XIII.5 de [4]. On pourra aussi regarder les chapitres 3, 7 et 10 de [5].

Références

- [1] Gille, P. et Szamuely, T. Central Simple Algebras and Galois Cohomology, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 101, Cambridge University Press, Cambridge, 2006.
- [2] Greenberg, M. J. Lectures on Forms in Many Variables, W. A. Benjamin, Inc., New York-Amsterdam, 1969.
- [3] Kahn, B. Formes quadratiques sur un corps, de Cours Spécialisés, vol. 15, Société Mathématique de France, Paris, 2008.
- [4] Lam, T. Y. Introduction to quadratic forms over fields, Graduate Studies in Mathematics, vol. 67, American Mathematical Society, Providence, RI, 2005.
- [5] Pfister, A. Quadratic forms with applications to algebraic geometry and topology, London Mathematical Society Lecture Note Series, vol. 217, Cambridge University Press, Cambridge, 1995.
- [6] Parimala, R. Some aspects of the algebraic theory of quadratic forms, Arizona Winter School 2009. Disponible sur http://swc.math.arizona.edu/aws/2009/index.html.
- [7] Quéguiner-Mathieu, A. Galois cohomology, quadratic forms and Milnor K-theory. Disponible sur https://www.math.univ-paris13.fr/~queguin/publi.htm.