

Dualité de Taniyama - Tate pour les corps de fonctions

de courbes sur des corps locaux

I) Corps de nombres

K corps de nombres, $\Omega_K = \{\text{places de } K\}$.

Pour $v \in \Omega_K$, $K_v = \text{complète de } K \text{ en } v$.

Soit A une variété abélienne sur K .

Soit A^t la variété abélienne duale.

Rappels: • Barzotti - Weil: A^t représente $\underline{\text{Ext}}^1(A, G_m)$.

• $\underline{\text{Hom}}(A, G_m) = 0$.

Dualité locale: Fixons $v \in \Omega_K$ fixe.

$$A^t \cong \underline{\text{Ext}}^1(A, G_m), \quad \underline{\text{Hom}}(A, G_m) = 0$$

$$\Rightarrow \text{Morphisme } A^t \rightarrow \underline{\text{RHom}}(A, G_m(\mathbb{J}))$$

$$\Rightarrow \text{Morphisme } A \otimes^{\mathbb{Q}} A^t \rightarrow G_m(\mathbb{J})$$

$$\Rightarrow \text{Accouplement: } H^r(K_v, A) \times H^{1-r}(K_v, A^t) \rightarrow \text{Br } K_v \cong \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \text{ (inv.)}$$

Th. (Tate 57/58):

Soit $v \in \Omega_K$ fixe. L'accouplement précédent induit:

1) un iso de gres profinis: $A^*(K_v) \cong H^1(K_v, \hat{A})^D$.

2) un iso de gres de torsion de type cofini:

$$H^1(K_v, A) \cong (A^t(K_v))^D$$

3) $H^r(K_v, A) = 0 \quad \forall r \geq 2$.

Rq: 1. B gpe abélien profini ou discret de torsion.

$$B^D = \text{Hom}_{\text{cont}}(B, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$$

$\rightarrow$ Généralisation de la dualité de Pontryagin.

- ①
- B gpe abélien est de torsion de type cofini si il est de torsion et la n -torsion de B est finie $\forall n \geq 1$.
 - $H^r(K_v, A) = 0 : r \geq 3 : \dim \text{coho de } K_v = 2$.
 $r = 2$: preuve non triviale.
 - Th. de structure de Mordell-Weil: $A(K_v)$ contient un sous-groupe ouvert d'indice fini isomorphe à $(\mathcal{O}_{K_v})^{\dim A}$.

Dualité globale:

Th. (Cassels-Tate 62-64):

$$\mathbb{H}^2(K, A) := \text{Ker} (H^2(K, A) \rightarrow \prod_{v \in S_K} H^2(K_v, A)).$$

Il existe un accouplement parfait de groupes finis:

$$\mathbb{H}^2(K, A) \setminus \{0\} \times \mathbb{H}^2(K, A^\vee) \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}_\ell$$

pour chaque premier ℓ . De plus, $\mathbb{H}^2(K, A)$ et $\mathbb{H}^2(K, A^\vee)$ sont de torsion de type cofini.

Applications:

X/K variété quasi-projective lisse.

Image local-global	Approximation faible
$\prod_v X(K_v) \neq \emptyset \Rightarrow X(K) \neq \emptyset$	$\text{Supp. } X(K) \neq \emptyset$. $X(K)$ dense ds $\prod_v X(K_v)$
• Quadriques: Th. de Hasse-Mink. (1890-1921)	• Th. d'Artin - Whaples (1945) $X = A^2$.
• Surf. de Châtelet (C.T., Serre, S.-D., 87)	• Surf. de Châtelet (C.T., Serre, S.-D. 87)
$3x^3 + 4y^3 + 5z^3 = 0$ (Selmer 51)	$x_1^2 + x_2^2 - (4x_3 - 1)(x_3^2 - 2) = 0$ (S.-D. 62)

Obstruction de Brauer-Mann:

Aceouplement: $H_{\text{ét}}^2(X, \mathbb{G}_m)$

$$\text{BM} : X(A_K) \times \text{Br } X \rightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$$

$$((p_v)_v, \alpha) \mapsto \sum_v \text{inv}_v(\alpha(p_v))$$

Pour $\alpha \in \text{Br } K$:

$$\begin{array}{ccccccc} X(K) & \hookrightarrow & X(A_K) & & & & \\ \alpha \downarrow & & \downarrow \alpha & \searrow \text{BM}(-, \alpha) & & & \\ 0 \rightarrow \text{Br } K & \rightarrow & \bigoplus_v \text{Br } K_v & \xrightarrow{\sum \text{inv}_v} & \mathbb{Q}/\mathbb{Z} & \rightarrow & 0 \end{array}$$

$$\Rightarrow X(K) \subseteq \overline{X(A_K)^{\text{Br}}}$$

Orthogonal des $\text{Br } X$.

$$\Rightarrow \overline{X(K)} \subseteq \overline{X(A_K)^{\text{Br}}}$$

On dit que'il y a:

- obstruction de BM au ppe loc. glob. si $X(A_K) \neq \emptyset$
 $X(A_K)^{\text{Br}} = \emptyset$.
- ~~obstruction~~ obstruction de BM à l'AF si $\overline{X(K)} = \overline{X(A_K)^{\text{Br}}} = \prod_{v \in \Lambda_K} X(K_v)$

Torseurs: G/K gpe alg.

X/K toreurs si G (ou EPH $\hookrightarrow G$): $G \times X \rightarrow X$ action tq
 l'action de $G(K^s)$ sur $X(K^s)$ est libre et transitive.

Faits: 1) Un EPH est trivial si il possède des K -points.
 2) Les EPH sont classifiés par l'ensemble pointé
 $H^1(K, G)$. L'élément distingué est l'EPH trivial.

Th. (Mann 71): Supposons que $H_{\text{ét}}^2(K, A)$ est fini. La seule
 obstruction au ppe de Hens pour les toreurs $\hookrightarrow A$ est
 l'obstruction de BM.

Dém.: X torseur sur A tq $\prod X(K_v) \neq \emptyset$.

$$[x] \in \mathcal{H}^1(K, A).$$

$$B(x) := \text{Ker}(BrX \rightarrow Br\bar{X}) \cap \text{Ker}(BrX \rightarrow \prod_v BrX_v / BrK_v)$$

$$\text{où } \bar{X} = X \times K^s \text{ et } X_v = X \times K_v.$$

Pour $\beta \in B(x)$, la fonction $BM(-, \beta)$ est constante, d'où un morphisme $\sigma: B(x) \rightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$.

On construit alors $\iota: \mathcal{H}^1(K, A^G) \rightarrow B(x)$ tq:

$$\alpha \in \mathcal{H}^1(K, A^G), \quad CT([x], \alpha) = \pm \sigma(\iota(\alpha)).$$

$$\text{où } CT: \mathcal{H}^1(K, A) \times \mathcal{H}^1(K, A^G) \rightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}.$$

Si $X(A_K)^{Br} \neq \emptyset$, alors $\sigma \equiv 0$, et donc, comme CT est non dégénéré, $C(x) = 0$, ie $X(K) \neq \emptyset$.

Th. Suite exacte duale de Cassels-Tate

Supp. $\mathcal{H}^1(K, A)$ fini. On a une suite exacte:

$$0 \rightarrow \overline{A(K)} \rightarrow \prod_{v \in K} A(K_v) \rightarrow H^1(K, A^G) \xrightarrow{D} \mathcal{H}^1(K, A) \rightarrow 0.$$

Cor. (Wang, 96): Supp. $\mathcal{H}^1(K, A)$ fini et $\overline{A(K)}$ ouvert de $\prod_{v \in K} A(K_v)$. Alors la seule obstruction à l'AF pour A est l'obstruction de BM.

Finitude de $\mathcal{H}^1(K, A)$ et conjecture de BSD:

- On conjecture que $\mathcal{H}^1(K, A)$ est toujours fini (début des années 60, due à Cassels?, Tate?, Shafarevich?).
- La célèbre conjecture de BSD repose sur la finitude de $\mathcal{H}^1(K, A)$.
- Th. (Cassels 65, Tate 66): Soient A et B deux variétés abél. isogènes sur K . Si A vérifie BSD, alors B aussi.

II) Surval historique sur d'autres corps

⑤

Classiquement: - corps de fibres (Caneh, Tate).

- corps de f^{ans} d'une courbe sur un corps fini (Moline).

Plus récemment: autres corps de f^{ans} de ches:

$K = k(X)$, $\left| \begin{array}{l} \text{le corps local} \\ X \text{ ches proj. l'ine geo. int. / } k \end{array} \right.$

2 approches possibles:

a) Tenir compte de toutes les places de k

$\Rightarrow$ Méthode du patching (Harbater, Harknham, Kraschen, 2003 + C.T., Panin, Suresh).

b) Tenir uniquement compte des places de k associées à un pt fermé de X .

$\Rightarrow$ Méthodes cohomologiques (Harari, Szamuely + C.T. + Izquierdo. 2013)

Tous ces travaux portent sur les gres linéaires. Les seuls résultats pour les variétés abél. sont dus à Ogg en 1962, dans le cas $k = \mathbb{C}$.

Ici: variétés abéliennes avec $k = \mathbb{C}(t)$ ou le p -adique méthodes cohomologiques.

III) Variétés abéliennes sur $\mathbb{C}(t)(u)$

1) Dualité locale

$\rightarrow \text{cd } k = 2$

Soit $k = \mathbb{C}(t_0)(t_1)$. Soit A une variété abél. sur k .

On note $k_0 = \mathbb{C}(t_0)$ et $k_{-1} = \mathbb{C}$.

Th. (Module fini): Soit M un G_k -module fini. On a une dualité parfaite de groupes finis:

$$H^r(k, M) \times H^{2-r}(k, \text{Hom}(M, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))) \rightarrow H^2(k, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) \cong \mathbb{Q}/\mathbb{Z}.$$

où $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2) = \varinjlim_n \mu_n^{\otimes 2}$. De plus, $\chi(M) = 1$.

Barrothi-Weil $\Rightarrow$ accouplement:

$$H^r(k, A) \times H^{2-r}(k, A^\vee) \rightarrow H^2(k, G_m) \cong \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \quad (*)$$

Comme ${}_n A^\vee = \underline{\text{Hom}}({}_n A, G_m)$, la suite exacte de Kummer

$0 \rightarrow {}_n A \rightarrow A \rightarrow A \rightarrow 0$ induit un diagramme commutatif à lignes exactes:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & H^0(k, A)/n & \rightarrow & H^2(k, {}_n A) & \rightarrow & {}_n H^2(k, A) \rightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow \cong & & \downarrow \\ 0 & \rightarrow & ({}_n H^2(k, A^\vee))^D & \rightarrow & H^2(k, {}_n A^\vee)^D & \rightarrow & (H^0(k, A)/n)^D \rightarrow 0 \end{array}$$

En passant à la limite inductive, $(*)$ induit un morphisme surjectif:

$$H^2(k, A) \rightarrow (H^0(k, A^\vee)^D)^\wedge \quad \text{où } -^\wedge = \varprojlim_n -/n.$$

Quel est le noyau de ce morphisme? Quand est-il nul?

Rappels: Notons $g: \text{Spec } k \hookrightarrow \text{Spec } \mathbb{Q}_\ell$. Il existe un schéma en groupes $\check{C}t/\mathbb{Q}_\ell$, appelé module de Néron de A , qui étend A et qui représente le faisceau $g_* A$. Soit A_0 la fibre spéciale de $\check{C}t$. Alors il existe une filtration de A_0 :

$$0 \rightarrow \underbrace{A_0^\circ}_{\text{comp. conn. du nombre}} \rightarrow A_0 \rightarrow \underbrace{F_0}_{\text{fini}} \rightarrow 0$$

$$0 \rightarrow \underbrace{U \times T_0}_{\text{unipotent}} \rightarrow \underbrace{A_0^\circ}_{\text{fore}} \rightarrow \underbrace{A_0}_{\text{var. abél.}} \rightarrow 0.$$

$A(k)$

De plus, on a un morphisme de réduction surjectif $\check{C}t(\mathbb{Q}_\ell) \rightarrow A_0(k_0)$

dont le noyau est uniquement divisible.

⑦

Recommençons avec B_0 : • A_0 mod. de Néron de B_0 .

• A_1 fibre spéciale.

• $A_1^0, E_1, U_1, T_1, B_1$ composantes de A_1 .

Th.: On a une suite exacte :

$$0 \rightarrow (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^{m(A)} \rightarrow H^1(k, A) \rightarrow (H^0(k, A^t))^D \rightarrow 0$$

avec $m(A) = 2 \dim T_1 + 4 \dim B_1$.

Dém.:
$$\frac{|{}_n A(k)|}{|A(k)/{}_n|} = \frac{|{}_n A_0(E_0)|}{|A_0(E_0)/{}_n|} = \frac{|{}_n A_0^0(k_0)|}{|A_0^0(k_0)/{}_n|} = \frac{|{}_n T_0(k_0)|}{|T_0(k_0)/{}_n|} \frac{|{}_n B_0(E_0)|}{|B_0(E_0)/{}_n|}$$

$\underbrace{\quad}_{=1}$

$$= \frac{|{}_n T_1(k_1)|}{|T_1(k_1)/{}_n|} \frac{|{}_n B_1(E_1)|}{|B_1(E_1)/{}_n|} = n^{\dim T_1 + 2 \dim B_1}$$

$\underbrace{\quad}_{n^{\dim T_1}} \quad \underbrace{\quad}_{n^{2 \dim B_1}}$

$$= \frac{|{}_n A^t(k)|}{|A^t(k)/{}_n|} \text{ car } A \text{ et } A^t \text{ sont isogènes}$$

$$\begin{aligned} 1 = \chi({}_n A) &= \frac{|H^0({}_n A)|}{|H^1({}_n A)|} = \frac{|H^0({}_n A)|}{|H^0({}_n A)/{}_n|} \frac{|H^1({}_n A)|}{|{}_n H^1(A)|} \\ &= n^{\dim T_1 + 2 \dim B_1} \cdot \frac{|H^0(A^t)|}{|{}_n H^1(A)|} \quad (\text{dualité}). \\ &= n^{m(A)/2} \cdot \frac{|H^0(A^t)/{}_n|}{|{}_n H^1(A)|} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow |\text{Ker}(H^1(A) \rightarrow (H^0(A^t))^D)| = n^{m(A)}.$$

Or $\text{Ker}(H^1(A) \rightarrow (H^0(A^t))^D)$ est de torsion de type cofini,

$$dc \cong (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^{m(A)}.$$

Cor.: 1) $H^4(k, A) \cong (H^0(k, A^*))^D$ ⑧

2) $H^4(k, A) \cong (H^0(k, A^*))^D \Leftrightarrow \dim T_1 = \dim B_1 = 0.$

On dit alors que B_0 a très mauvaise réduction.

Comment décrire l'image de $(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^{m(A)}$ dans $H^4(k, A)$?

Contient-elle $H_{\text{tors}}^4(k, A) := H^4(\mathbb{O}_k, A) = H^4(k^{\text{ur}}/k, A(k^{\text{ur}})) \subseteq H^4(k, A)$?

~~Fixons~~ Fixons l un mbe premier.

HYPO. ~~Set~~ $l \nmid |F|$.

Prop. (i) $A(k^{\text{ur}})$ et $A^*(k^{\text{ur}})$ sont l -divisibles.

(ii) Il existe un morphisme fonctionnel injectif:

$$\begin{array}{ccc} \left(\varprojlim_{\leftarrow} H^4(\mathbb{O}_k, A^*) \right)^D & \hookrightarrow & \left(\varprojlim_{\leftarrow} H^4(k^{\text{ur}}/k, {}_e A^*(k^{\text{ur}})) \right)^D \\ \downarrow \text{modèle de Néron de } A^* & & \downarrow \\ \varprojlim_{\leftarrow} {}_e A^* & & H_{\text{tors}}^4(k, A) \end{array}$$

$T_0 = \varprojlim_{\leftarrow} {}_e A^*$

Dém. (i) Théorie du modèle de Néron.

(ii) Avec (i), $H^4(k^{\text{ur}}/k, {}_e A^*(k^{\text{ur}})) \rightarrow {}_e H^4(\mathbb{O}_k, A^*)$.

Il suffit de prendre $\varprojlim_{\leftarrow}$ puis de dualiser.

Def. $H_{\text{tors}}^4(k, A, l) := (c_p \circ \text{Res})^{-1} \left(\left(\varprojlim_{\leftarrow} H^4(\mathbb{O}_k, A^*) \right)^D \right) \subseteq H^4(k, A) \otimes \mathbb{Q}_l$

où: $\text{Res}: H^4(k, A) \rightarrow H^4(k^{\text{ur}}/k, H^4(k^{\text{ur}}, A))$

$c_p: H^4(k^{\text{ur}}/k, H^4(k^{\text{ur}}, A)) \otimes \mathbb{Q}_l$

$\xrightarrow{\sim} \varprojlim_{\leftarrow} H^4(k^{\text{ur}}/k, {}_e H^4(k^{\text{ur}}, A))$

$\xleftarrow{\sim} \varprojlim_{\leftarrow} H^4(k^{\text{ur}}/k, H^4(k^{\text{ur}}, {}_e A))$

car $A(k^{\text{ur}})$ est l -divisible.

$\xrightarrow{\sim} \varprojlim_{\leftarrow} H^4(k^{\text{ur}}/k, H^4(k^{\text{ur}}, {}_e A^*)^D)$

dualité sur $\mathbb{Z}$.

$\rightarrow \left(\varprojlim_{\leftarrow} H^4(k^{\text{ur}}/k, {}_e A^*(k^{\text{ur}})) \right)^D$

dualité sur $\mathbb{Z}$.

$\Rightarrow$ suite exacte:

$$0 \rightarrow H_{\text{nr}}^1(k, A) \xrightarrow[\substack{\parallel 2 \\ (\mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell)^{\text{mult}(A)/2}}]{} H_{\text{nr}}^2(k, A, \ell) \rightarrow \bigoplus_{\substack{\parallel 2 \\ (\mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell)^{\text{mult}(A)/2}}} (T_\ell H_{\text{nr}}^2(k, A^\vee))^\vee \rightarrow 0 \quad (9)$$

Th.: $\text{Ker} (H^1(k, A) \rightarrow (H^0(k, A^\vee)^\vee)^\vee) \{e\} = H_{\text{nr}}^2(k, A, \ell) \supseteq H_{\text{nr}}^1(k, A) \{e\}.$

Notation: $H_{\text{nr}}^1(k, A) = \bigoplus_{\ell \nmid |A|} H_{\text{nr}}^1(k, A, \ell).$

2) Dualité globale

$k = \mathbb{C}(t)$, X courbe proj. lme géo. int. sur k , $K = k(X)$.
Soit A une var. abél. sur K .

- $v \in X^{(1)}$:
- K_v complété de K en v , $\mathcal{O}_v$ anneau des entiers.
 - $\mathcal{A}_v$ module de $\mathcal{A}$ sur $\mathcal{O}_v$.
 - $\mathcal{F}_v$ gr. alg fini des composantes conn. de la fibre spéciale de $\mathcal{A}_v$.
 - B_v var. abél. qui apparaît comme composante dans la fibre spéciale de $\mathcal{A}_v$.

Soit U l'ouvert de bonne réduction de A . Soit $\mathcal{A}$ le module de Néron de A sur U : c'est un schéma abélien. Fixons ℓ premier.

HYP.: $\forall v \in X \setminus U$, $\ell \nmid |F_v|$ ou B_v a très mauvaise réduction.

~~Posons, pour $V \subset U$:~~

~~$$D^1(V, \mathcal{A}) = \text{Ker} (H^2(V, \mathcal{A}) \rightarrow \bigoplus_{v \in X \setminus U} H^2(K_v, A)).$$~~

~~$$D_{\text{nr}}^1(V, \mathcal{A}^\vee) = \text{Ker} (H^2(V, \mathcal{A}^\vee) \rightarrow \bigoplus_{v \in X \setminus U} H^1(K_v, A^\vee) \oplus \bigoplus_{v \in X \setminus (U \cup Z)} H^1(K_v, A^\vee) / H_{\text{nr}}^1(K_v, A^\vee)).$$~~

de sorte que:

~~$$\bigcap_{V \subset U} D^1(V, \mathcal{A}) = H^2(K, A) := \text{Ker} (H^1(K, A) \rightarrow \bigoplus_{v \in X^{(1)}} H^1(K_v, A)).$$~~

~~donc~~

$V \otimes U$

Lemme: $H^2(V, A) = \text{Ker} \left(H^1(K, A) \rightarrow \prod_{v \in V^{(1)}} H^1(K_v, A) / H_{\text{nr}}^1(K_v, A) \right)$. (6)

On pose alors:

$$\begin{aligned} \text{III}_{\text{nr}}^1(V, A) &= \text{Ker} \left(H^1(K, A) \rightarrow \prod_{v \in V^{(1)}} H^1(K_v, A) \times \prod_{v \in V^{(1)}} H^1(K_v, A) / H_{\text{nr}}^1(K_v, A) \right) \\ &= \text{Ker} \left(H^1(V, A) \rightarrow \bigoplus_{v \in V^{(1)}} H^1(K_v, A) \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{III}_{\text{ns}}^1(V, A^t) &= \text{Ker} \left[H^1(K, A) \rightarrow \prod_{v \in V^{(1)}} H^1(K_v, A^t) \times \prod_{v \in V^{(1)}} H^1(K_v, A^t) / H_{\text{nr}}^1(K_v, A^t) \right. \\ &\quad \left. \times \prod_{v \in V^{(1)}} H^1(K_v, A^t) / H_{\text{nr}}^1(K_v, A^t) \right] \\ &= \text{Ker} \left[H^1(V, A^t) \rightarrow \bigoplus_{v \in V^{(1)}} H^1(K_v, A^t) \oplus \bigoplus_{v \in V^{(1)}} H^1(K_v, A^t) / H_{\text{nr}}^1(K_v, A^t) \right] \end{aligned}$$

de sorte que:

$$\bigwedge_{v \in V} \text{III}_{\text{nr}}^1(V, A) = \text{III}^2(K, A) = \text{Ker} \left[H^1(K, A) \rightarrow \prod_{v \in V^{(1)}} H^1(K_v, A) \right].$$

$$\bigcup_{v \in V} \text{III}_{\text{ns}}^1(V, A) = \text{III}_{\text{ns}}^1(K, A) = \text{Ker} \left[H^1(K, A^t) \rightarrow \prod_{v \in V^{(1)}} H^1(K_v, A^t) \times \prod_{v \in V^{(1)}} H^1(K_v, A^t) / H_{\text{nr}}^1(K_v, A^t) \right].$$

Th. (Dualité d'Artin-Vershyn): ~~Il existe un~~

Le morphisme naturel $(H^1(V, A^t) \{e\} \rightarrow H_c^1(V, A^t)^{(e)})^D$ est injectif à noyau divisible.

Diagramme commutatif à lignes exactes:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 \rightarrow \text{III}_{\text{nr}}^1(V, A^t) \{e\} & \rightarrow & H^1(V, A^t) \{e\} & \rightarrow & \bigoplus_{v \in V^{(1)}} H^1(K_v, A^t) \{e\} \oplus \bigoplus_{v \in V^{(1)}} H^1(K_v, A^t) / H_{\text{nr}}^1(K_v, A^t) \{e\} \\ & \downarrow & & & \downarrow & & \downarrow \cong \\ 0 \rightarrow (\text{III}_{\text{nr}}^1(V, A^t)^{(e)})^D & \rightarrow & (H_c^1(V, A^t)^{(e)})^D & \rightarrow & \bigoplus_{v \in V^{(1)}} (H^1(K_v, A^t)^{(e)})^D \end{array}$$

$$\Rightarrow \overline{\text{III}_{\text{nr}}^1(V, A^t) \{e\}} = \overline{\text{III}_{\text{nr}}^1(V, A^t)^{(e)} \{e\}}^D.$$

Passage à la limite:

Th.: Accouplement parfait de groupes finis:

$$\text{III}_{\text{nr}}^1(A^t) \{e\} \times \text{III}^2(A) \{e\} \rightarrow 0/\mathbb{Z}.$$

Cor.: $\tilde{\alpha}: \mathbb{A}^1(A) \subset \mathbb{A}_{\text{ms}}^1(A)$, $i^t: \mathbb{A}^1(A) \subset \mathbb{A}_{\text{ms}}^1(A^t)$.

$\Rightarrow$ Accouplement parfait de gres finis:

$$\mathbb{A}^1(A^t) \{e\} \times \mathbb{A}^1(A) \{e\} / i^t(\mathbb{A}^1(A) \{e\}) \times \mathbb{A}^1(A) \{e\} / i^t(\mathbb{A}^1(A) \{e\}) \rightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}.$$

Dem.:
$$\begin{array}{ccc} \mathbb{A}_{\text{ms}}^1(A^t) \{e\} & \times & \mathbb{A}^1(A) \{e\} \rightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \\ \uparrow i^t & & \downarrow i \quad \cap \quad \parallel \\ \mathbb{A}^1(A^t) \{e\} & \times & \mathbb{A}_{\text{ms}}^1(A) \{e\} \rightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}. \end{array}$$

Ex.: • Bonne réduction partout.

• $K = (\mathbb{A}^1(t))(\mathbb{A})$, $A: y^2 = x^3 + u$.

IV) Variétés abéliennes sur $\mathbb{Q}_p(\mathbb{A})$

a) Dualité locale

$k = k_1(\mathbb{A}^1)$, k_1 corps p -adique, p fixé. k_0 = corps rés. de k_1 .

cd $k=3$ $\triangle \Rightarrow$ Difficultés supplémentaires.

A var abél / k .

$\mathcal{A} / \mathbb{O}_k$ modèle de Néron

$\hookrightarrow A_1, A_1^0, F_1, U_1, T_1, B_1$ / k_1 .

$\hookrightarrow \mathcal{A}_1$ modèle de Néron de B_1 .

$\hookrightarrow A_0, A_0^0, F_0, U_0, T_0, B_0$ / k_0 .

$$\tilde{A} := \varprojlim_n A^t \otimes \mu_n.$$

Th.: (i) On a un morphisme injectif:

$$H^2(k, \tilde{A}) \rightarrow (H^1(k, A^t))^{\oplus}.$$

$\tilde{A}$ noyau de type copri divisible.

(ii) Si T_0 est anisotrope, le noyau est nul de torsion

(iii) Si $B_1=0$, le noyau est nul.

(iv) Si l est un nombre premier ne divisant pas $|F_2|$,
 on peut construire un gpe $H_{\text{ins}}^2(k, \tilde{A}, l)$ comme en III
 qui coïncide avec la partie l -primaire du noyau.
 De plus, si $l \neq p$, alors $H_{\text{ins}}^2(k, \tilde{A}, l) = H_{\text{ins}}^2(k, \tilde{A})\{e\}$
 $\quad \quad \quad := H^4(\mathcal{O}_k, \tilde{A})\{e\}$
 où $\tilde{A} = \varinjlim_u A^{*u} \otimes \mu_n$ et A^{*u} est le module de
 Néron de A^{*u} .

b) Dualité globale

$k = p$ -adique, $K = k(x)$, avec X/k une proj. lme géo. sur.
 l premier, U ouvert de bonne réduction de A .

HYPO: ~~si $l \neq p$, $K \in \text{XIV}$, $l \nmid |F_2|$~~

~~$\forall v \in \text{XIV}$, $l \nmid |F_v|$ ou $B_v = 0$.~~

$$Z = \{v \in \text{XIV} \mid B_v = 0\}.$$

$$\mathbb{U}_{\text{ins}}^2(\tilde{A}) := \text{Ker} \left(H^2(K, \tilde{A}) \rightarrow \prod_Z H^2(K_v, \tilde{A}) \times \prod_{X \setminus Z} H^4(\mathcal{O}_{K_v}, \tilde{A}) / H_{\text{ins}}^2(K_v, \tilde{A}) \right)$$

$$\text{Th.}: \mathbb{U}_{\text{ins}}^2(\tilde{A})\{e\} \times \mathbb{U}^2(A)\{e\} \rightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}.$$

~~XXXXXXXXXX~~

IV) Finitude de $\mathbb{U}^2(A)$

$k = \mathbb{C}(\text{ut})$ ou $\mathbb{Q}_p$, $K = k(x)$.

C une proj lme / k tq $C(k) \neq \emptyset$.

J_C jacobienne de C .

$\hookrightarrow k = \mathbb{C}(\text{ut})$. J_C n'a pas bte mauvaise réduction

$$\Rightarrow \mathbb{U}^2(K, (J_C)_K)_{\text{div}} \neq 0.$$

Réciproque vraie si X de genre 0.

$\hookrightarrow k = \mathbb{Q}_p$: si $J_C \neq 0$ et X de genre 0, $\mathbb{U}^2(J_C)_{\text{non-div}} \neq 0$ mais $\mathbb{U}^1(C/k)_p \neq 0$