Le théorème de Poitou-Tate à partir du théorème d'Artin-Verdier

Diego IZQUIERDO
Sous la direction de David HARARI

Septembre 2013

Table des matières

1 Quelques rappels et mises au point

1.1 Introduction

Le théorème de Poitou-Tate a été énoncé pour la première fois par John Tate en 1962 lors du Congrès International de Mathématiques ([Tat63]). Il s'agit d'un théorème qui permet de mettre en évidence des liens profonds entre la cohomologie des corps globaux et la cohomologie des corps locaux. Plus précisément :

Théorème 1.1.1. ***(Théorème de Poitou-Tate)***
Soit K un corps global. Soit S un ensemble non vide de places de K contenant les places archimédiennes. Notons K_S l'extension maximale de K non ramifiée en dehors de S. Soit M un $Gal(K_S/K)$-module discret fini. Dans le cas où K est un corps de nombres, on suppose que les places de K divisant $|M|$ sont toutes contenues dans S. Dans le cas où K est un corps de fonctions, on suppose que la caractéristique de K ne divise pas $|M|$. On pose $M^D = Hom_{\mathbb{Z}}(M, K^{s\times})$. Alors les groupes $Ker(H^1(Gal(K_S/K), M) \rightarrow \bigoplus_{v\in S} H^1(K_v, M))$ et $Ker(H^2(Gal(K_S/K), M^D) \rightarrow \bigoplus_{v\in S} H^2(K_v, M^D))$ sont finis et duaux pour la dualité de Pontryagin.

Le théorème a été prouvé de manière indépendante par Tate dans une lettre à Springer en 1966 et par Poitou dans [Poi67] en 1967 dans le cas où S contient toutes les places de K. Lorsque S est quelconque, on peut trouver des généralisations de ces preuves dans [Hab78] et dans [Mil06] (section I.4). Toutes ces démonstrations ont l'avantage de n'utiliser que la cohomologie galoisienne, mais elles sont peu naturelles, difficiles à appréhender et à généraliser, et les définitions des morphismes et des accouplements qui entrent en jeu sont très obscures. L'objectif de ce mémoire est alors de donner une preuve plus naturelle, ou du moins dans laquelle les définitions des accouplements sont moins mystérieuses, du théorème de Poitou-Tate. Pour ce faire, le bon cadre est celui de la cohomologie étale, qui généralise la cohomologie galoisienne en prenant en compte aussi bien des aspects arithmétiques que géométriques. Ainsi, l'outil fondamental auquel nous ferons appel pour prouver le théorème de Poitou-Tate est un théorème de dualité dû à Artin et Verdier concernant la cohomologie des faisceaux constructibles sur le spectre de l'anneau des entiers d'un corps de nombres ou sur une courbe projective lisse sur un corps fini :

Théorème 1.1.2. ***(Théorème d'Artin-Verdier)***
Soit K un corps global. Si K est un corps de nombres, soit X le spectre de l'anneau des entiers de K. Si K est un corps de fonctions, soit X une courbe projective lisse sur un corps fini dont le corps des fonctions est K. Considérons un ouvert non vide U de X et un faisceau constructible F sur U. Alors pour tout $r \in \mathbb{Z}$, les groupes $Ext^r_U(F, \mathbb{G}_m)$ et $H^{3-r}_c(U, F)$ sont finis et duaux pour la dualité de Pontryagin.

Ce théorème a été énoncé pour la première fois par Artin et Verdier en 1964 lors du séminaire sur la cohomologie étale des corps de nombres au cours de l'école d'été à Woods Hole organisée par l'AMS et on peut trouver une preuve complète dans la section II.3 du livre [Mil06] de Milne. Dans ce même livre, dans la section II.4, Milne met en évidence les liens entre le théorème d'Artin-Verdier et les théorèmes de cohomologie galoisienne. Cependant, il utilise le théorème d'Artin-Verdier pour prouver uniquement une version affaiblie du théorème de Poitou-Tate où il suppose que l'ensemble de places S est fini. Dans ce mémoire, nous allons prouver le théorème de Poitou-Tate en toute généralité à l'aide du théorème d'Artin-Verdier.

1.2 Remerciements

Je voudrais ici remercier chaleureusement David Harari, pour m'avoir fait découvrir un domaine passionnant des mathématiques, ainsi que pour sa disponibilité, son soutien constant, son aide précieuse, ses encouragements, sa gentillesse et sa générosité.

1.3 Conventions et définitions

Nous tenons ici à préciser quelques définitions et conventions que nous utiliserons dans la suite.

Cohomologie galoisienne

Pour G un groupe profini, M un G-module discret et $r \geq 0$, on note $H^r(G,M)$ le r-ième groupe de cohomologie. Pour $r < 0$, on pose $H^r(G,M) = 0$ par convention. Pour $K = \mathbb{R}$ ou $K = \mathbb{C}$, si M est un $\mathrm{Gal}(K^s/K)$-module discret, on note $H^r(K,M)$ le r-ième groupe de cohomologie modifiée de Tate. Ainsi, $H^0(\mathrm{Gal}(\mathbb{C}/\mathbb{R}), \mathbb{C}^\times) = \mathbb{R}^\times$ alors que $H^0(\mathbb{R}, \mathbb{C}^\times) = \mathbb{R}^\times/\mathbb{R}_+^\times \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Cohomologie étale

Soit X un schéma. Le **site étale** sur X est défini par :
- Catégorie : schémas étales sur X.
- Recouvrements : familles $\{\varphi_i : U_i \to U\}$ constituées de morphismes étales tels que $\bigcup_i \varphi_i(U_i) = U$.

Le **site étale restreint** sur X est défini par :
- Catégorie : schémas étales de type fini sur X.
- Recouvrements : familles $\{\varphi_i : U_i \to U\}$ constituées de morphismes étales tels que $\bigcup_i \varphi_i(U_i) = U$.

Pour F un faisceau de groupes abéliens sur le site étale sur X, on note $H^r(X,F)$ le r-ième groupe de cohomologie. On note aussi :

- $\mathrm{Hom}_X(F,-)$ le foncteur qui à un faisceau G sur le site étale de X associe le groupe des morphismes de F vers G.
- $\mathrm{Ext}^r_X(F,-)$ les foncteurs dérivés de $\mathrm{Hom}_X(F,-)$.
- $\underline{\mathrm{Hom}}_X(F,-)$ le foncteur qui à un faisceau G sur le site étale de X associe le faisceau sur le site étale de X défini par $U \mapsto \mathrm{Hom}_U(F|_U, G|_U)$.
- $\underline{\mathrm{Ext}}^r_X(F,-)$ les foncteurs dérivés de $\underline{\mathrm{Hom}}_X(F,-)$.

Dans ce mémoire, tous les schémas considérés auront de bonnes propriétés :
- ils seront **quasi-compacts**, c'est-à-dire que de tout recouvrement ouvert il est possible d'extraire un recouvrement fini.
- ils seront **quasi-séparés**, c'est-à-dire que le morphisme diagonal $X \to X \times_{\mathbb{Z}} X$ est quasi-compact.

Pour de tels schémas, on sait d'après la section II.1.5 de [Tam94] que le site étale restreint est noethérien et que les catégories de faisceaux sur le site étale et sur le site étale restreint sont équivalentes : cela implique en particulier que la cohomologie des faisceaux sur le site étale commute avec les limites inductives (théorème 3.11.1 de [Tam94]) et que les groupes de cohomologie étale d'un faisceau de torsion, c'est-à-dire d'un faisceau dont toutes les tiges sont de torsion, sont de torsion (proposition 9.1.2 de [Tam94]).
Dans la suite, nous allons surtout nous intéresser à des faisceaux particuliers, dits constructibles :
- On dit qu'un faisceau F sur X est **localement constant** s'il existe un recouvrement $\{X_i \to X\}$ tel que $F|_{X_i}$ est constant pour tout i. Un faisceau F est localement constant à tiges finies si, et seulement si, il existe un morphisme étale fini $X' \to X$ tel que $F|_{X'}$ est constant à tiges finies.
- On dit qu'un faisceau F sur X est **constructible** si, pour tout sous-schéma fermé irréductible Z de X, il existe un sous-schéma ouvert non vide U de Z tel que, si l'on note $f : U \to X$, alors f^*F est localement constant à tiges finies. Ainsi, si X est un schéma normal connexe de dimension 1, un faisceau F est constructible si, et seulement si, il existe un sous-schéma ouvert non vide U et un morphisme fini étale $U' \to U$ tels que $F|_{U'}$ est constant et les tiges de F sont finies.

Dualité de Pontryagin

Pour chaque groupe abélien séparé localement compact A, on appelle **dual de Pontryagin de** A le groupe $\mathrm{Hom}_c(A, \mathbb{R}/\mathbb{Z})$ muni de la topologie compacte-ouverte. D'après le théorème 1.1.11 de [NSW08], le foncteur $A \mapsto \mathrm{Hom}_c(A, \mathbb{R}/\mathbb{Z})$ est un autofoncteur involutif de la catégorie des groupes abéliens séparés localement compacts. De plus, lorsque A est discret de torsion ou profini, on a $\mathrm{Hom}_c(A, \mathbb{R}/\mathbb{Z}) = \mathrm{Hom}_c(A, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$, et le foncteur $A \mapsto \mathrm{Hom}_c(A, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ induit une anti-équivalence de catégories entre les groupes abéliens discrets de torsion et les groupes profinis abéliens. Dans la suite, on notera $A^* = \mathrm{Hom}_c(A, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ pour chaque groupe abélien séparé localement compact A. Ainsi, A^* coïncide avec le dual de Pontryagin de A lorsque A est abélien profini ou abélien discret de torsion.

1.4 Mise au point sur la cohomologie galoisienne des corps locaux

Dans ce mémoire, nous utiliserons souvent les propriétés usuelles de la cohomologie galoisienne des corps locaux. Dans la littérature, ces propriétés sont souvent formulées et démontrées pour les extensions finies de $\mathbb{Q}_p$ ou pour les corps locaux complets. Nous voulons ici rappeler (sans preuves) quelles sont les propriétés qui subsistent pour les corps locaux non complets. Pour plus de détails, le lecteur est invité à lire le paragraphe I.2 et l'appendice A de la partie I de [Mil06]. Commençons par définir ce que nous entendrons par corps local dans la suite :

Définition 1.4.1. ***(Corps locaux)***
On dit qu'un corps K est ***local*** *s'il est le corps des fractions d'un anneau de valuation discrète hensélien dont le corps résiduel est fini. On dit qu'un corps local K est* ***excellent*** *si la complétion de K est séparable sur K.*

Remarque 1.4.2. Un corps local de caractéristique 0 est toujours excellent.

Fixons maintenant un corps local K et notons $\mathcal{O}_K$ son anneau des entiers et k le corps résiduel. Les propriétés suivantes demeurent vraies dans ce cadre :

Théorème 1.4.3. ***(Invariant local et dimension cohomologique)***
(i) Le corps K^{nr} est de dimension cohomologique au plus 1.
(ii) Le morphisme $H^2(Gal(K^{nr}/K), K^{nr\times}) \to H^2(Gal(K^{nr}/K), \mathbb{Z})$ induit par la valuation est un isomorphisme.
(iii) Il existe un isomorphisme canonique $inv_K : Br(K) \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ appelé invariant local.
(iv) Le corps K est de dimension cohomologique 2.

Théorème 1.4.4. ***(Théorème de Tate-Nakayama)***
(i) Le couple $(Gal(K^s/K), K^{s\times})$, muni des invariants locaux, constitue une formation de classes.
(ii) Il existe un morphisme continu $\omega_K : K^\times \to Gal(K^{ab}/K)$ induisant un isomorphisme $K^\times/N_{L/K}L^\times \to Gal(L/K)$ pour chaque extension finie abélienne L de K.

En revanche, le théorème d'existence, affirmant que les sous-groupes de normes de K sont les sous-groupes ouverts d'indice fini de K, est faux dans ce contexte. Il faut en fait supposer que K est excellent pour que ce théorème subsiste :

Théorème 1.4.5. ***(Théorèmes d'existence et de dualité)***
Supposons K excellent. Soit M un $Gal(K^s/K)$-module discret fini de cardinal premier à la caractéristique de K.
(i) Les sous-groupes de normes de K sont les sous-groupes ouverts d'indice fini de K.
(ii) L'accouplement des Ext induit un isomorphisme de groupes finis $Ext^r_{Gal(K^s/K)}(M, K^{s\times}) \to H^{2-r}(Gal(K^s/K), M)^*$ pour tout r.
(iii) Le cup-produit induit un isomorphisme de groupes finis $H^r(Gal(K^s/K), M^D) \to H^{2-r}(Gal(K^s/K), M)^*$ pour tout r, où M^D désigne $Hom_{\mathbb{Z}}(M, K^{s\times})$.

1.5 Mise au point sur la cohomologie galoisienne des corps globaux

Dans ce mémoire, nous allons prouver le théorème de Poitou-Tate à partir du théorème d'Artin-Verdier pour la cohomologie étale. Pour ce faire, nous aurons besoin du résultat suivant sur la cohomologie des corps globaux :

Proposition 1.5.1. *Soit K un corps global (c'est-à-dire un corps de nombres ou un corps de fonctions). Soit S un ensemble non vide de places de K contenant les places archimédiennes, et soit M un $Gal(K_S/K)$-module discret fini, K_S désignant la plus grande extension de K non ramifiée en dehors de S. On suppose que les places de K divisant l'ordre de M sont toutes dans S. Alors, pour $r \geq 4$, les morphismes naturels $H^r(Gal(K_S/K), M) \to \bigoplus_{v\in\Omega_K^\infty} H^r(K_v, M)$ sont des isomorphismes. De plus, pour $r = 3$, le morphisme $H^r(Gal(K_S/K), M) \to \bigoplus_{v\in\Omega_K^\infty} H^r(K_v, M)$ est surjectif, et il est bijectif si K n'a pas de places réelles.*

Cela pose a priori un problème logique, puisque cette proposition est une partie du théorème de Poitou-Tate, ou en tous cas, dans [Mil06], Milne prouve cette proposition en même temps que le théorème de Poitou-Tate (voir théorème I.4.10). Nous voulons ici en donner une preuve indépendante du théorème de Poitou-Tate. Pour ce faire, nous utiliserons certaines propriétés de [NSW08], mais on remarquera qu'elles sont toutes prouvées dans [NSW08] bien avant le théorème de Poitou-Tate.

Démonstration. (Pour un corps de fonctions)
La proposition découle immédiatement du théorème 8.3.17 de [NSW08]. □

Démonstration. (Pour un corps de nombres)
- En vertu de la proposition 8.3.18 de [NSW08], la proposition est vraie lorsque K est totalement imaginaire ou lorsque la partie 2-primaire de M est nulle. Il suffit donc de prouver le théorème lorsque K a des places réelles et M est de torsion 2-primaire. Nous faisons ces hypothèses dans la suite de la preuve.

- Montrons que, pour $M = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, le morphisme $H^r(\mathrm{Gal}(K_S/K), M) \to \bigoplus_{v \in \Omega_K^\infty} H^r(K_v, M)$ est un isomorphisme pour tout $r \geq 3$.
Le corollaire 8.3.12(iii) de [NSW08] impose que la proposition est vraie pour $r = 3$ et $M = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Soient $L = K(i)$ et $G = \mathrm{Gal}(L/K)$. On dispose alors d'une suite exacte de G-modules :
$$0 \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to \mathrm{Ind}_G(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to 0.$$
En écrivant la suite exacte longue de cohomologie et en utilisant le lemme de Shapiro, on obtient un diagramme commutatif :
$$\begin{tikzcd} H^r(G_{K,S}, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \arrow[r, "\cong"] \arrow[d] & H^{r+1}(G_{K,S}, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \arrow[d] \\ \bigoplus_{v \in \Omega_K^\infty} H^r(K_v, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \arrow[r, "\cong"] & \bigoplus_{v \in \Omega_K^\infty} H^{r+1}(K_v, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \end{tikzcd}$$
Une récurrence simple montre alors que le morphisme
$$H^r(\mathrm{Gal}(K_S/K), \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \to \bigoplus_{v \in \Omega_K^\infty} H^r(K_v, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$$
est un isomorphisme pour $r \geq 3$.
- Soit K_1 une extension finie galoisienne de K contenue dans K_S telle que $\mathrm{Gal}(K_S/K_1)$ agit trivialement sur M. Montrons que l'on peut supposer que $\mathrm{Gal}(K_1/K)$ est un 2-groupe. Soit U_2 un sous-groupe ouvert de $G_{K,S}$ contenant $\mathrm{Gal}(K_S/K_1)$, d'indice impair et tel que $U_2/\mathrm{Gal}(K_S/K_1)$ est un 2-Sylow de $\mathrm{Gal}(K_1/K)$. Notons K_2 le corps fixe de U_2. On dispose alors de deux diagrammes commutatifs :
$$\begin{tikzcd} H^r(G_{K,S}, M) \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{Res}"] & \bigoplus_{v \in \Omega_K^\infty} H^r(K_v, M) \arrow[d, "\mathrm{Res}"] \\ H^r(U_2, M) \arrow[r] & \bigoplus_{v \in \Omega_{K_2}^\infty} H^r(K_{2,v}, M) \end{tikzcd}$$
$$\begin{tikzcd} H^r(G_{K,S}, M) \arrow[r] & \bigoplus_{v \in \Omega_K^\infty} H^r(K_v, M) \\ H^r(U_2, M) \arrow[r] \arrow[u, "\mathrm{Cores}"] & \bigoplus_{v \in \Omega_{K_2}^\infty} H^r(K_{2,v}, M) \arrow[u, "\mathrm{Cores}"'] \end{tikzcd}$$
Mais $\mathrm{Cores} \circ \mathrm{Res} = [K_2 : K] \cdot \mathrm{Id}$ est un isomorphisme. Donc, dans les diagrammes précédents, les restrictions étaient injectives et les corestrictions surjectives. On en déduit que, si $H^r(U_2, M) \to \bigoplus_{v \in \Omega_{K_2}^\infty} H^r(K_{2,v}, M)$ est un isomorphisme, alors $H^r(G_{K,S}, M) \to \bigoplus_{v \in \Omega_K^\infty} H^r(K_v, M)$ l'est aussi. Quitte à remplacer K par K_2, on peut donc supposer dans la suite que $\mathrm{Gal}(K_1/K)$ est un 2-groupe.

- Nous allons maintenant procéder par dévissage. Considérons une suite exacte de $\mathrm{Gal}(K_1/K)$-modules :
$$0 \to M_1 \to M \to M_2 \to 0.$$
Supposons que, pour $i \in \{1,2\}$, le morphisme
$$H^r(\mathrm{Gal}(K_S/K), M_i) \to \bigoplus_{v \in \Omega_K^\infty} H^r(K_v, M_i)$$
est surjectif sur $r = 3$ et bijectif si $r > 3$. On dispose alors de deux diagrammes commutatifs à lignes exactes :
$$\begin{tikzcd}
H^3(\mathrm{Gal}(K_S/K), M_1) \arrow[r] \arrow[d] & H^3(\mathrm{Gal}(K_S/K), M) \arrow[r] \arrow[d] & H^3(\mathrm{Gal}(K_S/K), M_2) \arrow[r] \arrow[d] & H^4(\mathrm{Gal}(K_S/K), M_1) \arrow[d, "\cong"] \\
\bigoplus_{v \in \Omega_K^\infty} H^3(K_v, M_1) \arrow[r] & \bigoplus_{v \in \Omega_K^\infty} H^3(K_v, M) \arrow[r] & \bigoplus_{v \in \Omega_K^\infty} H^3(K_v, M_2) \arrow[r] & \bigoplus_{v \in \Omega_K^\infty} H^4(K_v, M_1)
\end{tikzcd}$$
$$\begin{tikzcd}
H^{r-1}(\mathrm{Gal}(K_S/K), M_2) \arrow[r] \arrow[d] & H^r(\mathrm{Gal}(K_S/K), M_1) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & H^r(\mathrm{Gal}(K_S/K), M) \arrow[r] \arrow[d] & H^r(\mathrm{Gal}(K_S/K), M_2) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & H^{r+1}(\mathrm{Gal}(K_S/K), M_1) \arrow[d, "\cong"] \\
\bigoplus_{v \in \Omega_K^\infty} H^{r-1}(K_v, M_2) \arrow[r] & \bigoplus_{v \in \Omega_K^\infty} H^r(K_v, M_1) \arrow[r] & \bigoplus_{v \in \Omega_K^\infty} H^r(K_v, M) \arrow[r] & \bigoplus_{v \in \Omega_K^\infty} H^r(K_v, M_2) \arrow[r] & \bigoplus_{v \in \Omega_K^\infty} H^{r+1}(K_v, M_1)
\end{tikzcd}$$
pour $r > 3$. Le lemme des cinq entraîne alors que $H^r(G_{K,S}, M) \to \bigoplus_{v \in \Omega_K^\infty} H^r(K_v, M))$ est surjectif pour $r = 3$ et bijectif pour $r > 3$. Par conséquent, il suffit de montrer la proposition lorsque M est un $\mathrm{Gal}(K_1/K)$-module simple de 2-torsion. Comme $\mathrm{Gal}(K_1/K)$ est un 2-groupe, le seul $\mathrm{Gal}(K_1/K)$-module simple de 2-torsion est $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Mais nous avons déjà prouvé la proposition pour $M = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

□

Remarque 1.5.2. Il se trouve que le morphisme $H^3(\mathrm{Gal}(K_S/K), M) \to \bigoplus_{v \in \Omega_K^\infty} H^3(K_v, M)$ est toujours un isomorphisme, mais la preuve précédente ne permet pas d'établir l'injectivité de ce morphisme : même si nous avons vu que $H^3(\mathrm{Gal}(K_S/K), \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \to \bigoplus_{v \in \Omega_K^\infty} H^3(K_v, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ est un isomorphisme, cette propriété est perdue lorsqu'on fait le dévissage. En fait, pour prouver ce résultat (que nous n'utiliserons pas dans la suite), nous avons besoin du théorème de Poitou-Tate.

Nous aurons aussi besoin d'une version de la proposition précédente pour les tores :

Proposition 1.5.3. *Soit K un corps global.*
(i) Le groupe $H^3(K, K^{s\times})$ est nul.
(ii) Si K n'a pas de places réelles, alors $H^r(K, K^{s\times}) = 0$ pour $r > 3$.

Démonstration.

(i) La proposition 8.1.20 de [NSW08] impose que la suite :
$$0 \to H^2(K, K^{s\times}) \to H^2(K, I) \to H^2(K, C) \to 0,$$
est exacte, les notations étant les mêmes que [NSW08]. De plus, $H^3(K, I) = 0$. On en déduit que $H^3(K, K^{s\times}) = 0$.

(ii) Les propositions 8.3.17 et 8.3.18 de [NSW08] imposent que $\mathrm{cd}(K) \leq 2$. On en déduit que $\mathrm{scd}(K) \leq 3$, d'où le résultat. $\square$

Remarque 1.5.4. Encore une fois, on peut obtenir des résultats plus fins à l'aide du théorème de Poitou-Tate.

2 Le théorème d'Artin-Verdier pour les corps de nombres

Soient K un corps de nombres et $\mathcal{O}_K$ son anneau des entiers. Notons Ω_K l'ensemble des places de K et Ω_K^∞ l'ensemble des places archimédiennes de K. Pour $v \in \Omega_K$ non archimédienne, K_v désigne le corps des fractions de l'hensélisation $\mathcal{O}_v$ de $\mathcal{O}_K$ en v ; pour $v \in \Omega_K^\infty$, K_v désigne la complétion de K par rapport à v. Pour les places non archimédiennes v, on fera attention à ne pas confondre K_v et le complété de K par rapport à la valuation v : afin de faire clairement la distinction, nous noterons $\widehat{K_v}$ ce complété et $\widehat{\mathcal{O}_v}$ son anneau des entiers. Ainsi, K_v est hensélien et est contenu dans la clôture séparable K^s de K mais il n'est pas complet.
Soit maintenant $X = \mathrm{Spec}\ \mathcal{O}_K$, et posons $\eta = \mathrm{Spec}\ K$ et $\overline{\eta} = \mathrm{Spec}\ \overline{K}$. Soit $g : \eta \to X$. Fixons un ouvert U de X non vide, ainsi qu'un faisceau constructible F sur U. Dans cette section, nous allons établir le théorème d'Artin-Verdier, qui fournira ensuite une dualité entre la cohomologie de F et celle de $\underline{\mathrm{Hom}}_U(F, \mathbb{G}_m)$:

Théorème 2.0.5. ***(Théorème d'Artin-Verdier)***
Pour tout $r \geq 0$, les groupes $\mathrm{Ext}_U^r(F, \mathbb{G}_m)$ et $H_c^{3-r}(U, F)$ sont finis et duaux pour la dualité de Pontryagin.

Ici, $H_c^{3-r}(U, F)$ désigne la cohomologie à support compact, que nous définirons dans la section suivante. La preuve de ce théorème étant assez longue et délicate, nous la divisons en plusieurs étapes. Afin d'aider le lecteur à avoir une vision d'ensemble de la preuve, nous indiquons sur le schéma ci-dessous comment les différentes étapes s'assemblent (les étapes 0 et 1 ne sont pas indiquées parce qu'elles donnent les définitions fondamentales qui sont utilisées constamment dans toute la preuve) :

$$\begin{tikzcd}
& 3 \arrow[dd] & & 2 \arrow[ll] \arrow[dd] & \\
4 \arrow[dr] & & 6 \arrow[dl] \arrow[dr] & & 7 \arrow[dl] \\
& 8 \arrow[dr] & & 9 \arrow[dl] & \\
& & 11 & & \\
& 5 \arrow[ur] & & 10 \arrow[ul] &
\end{tikzcd}$$

Notation : Dans la suite et jusqu'à la fin de la preuve, F désigne un faisceau fixé sur U vérifiant les hypothèses précédentes (que nous ne rappelons pas à chaque fois). Lorsque nous considérerons des faisceaux vérifiant d'autres hypothèses, nous les noterons avec des lettres calligraphiques (par exemple, $\mathcal{F}$).

2.1 Étape 0 : Définition et propriétés de base de la cohomologie à support compact

Avant de définir l'accouplement, il nous faut introduire la cohomologie à support compact. Pour ce faire, classiquement on pose $H^r_c(U, \mathcal{F}) = H^r(X, j_{U!}\mathcal{F})$ où $j_U : U \hookrightarrow X$ est l'immersion ouverte. Cependant, cette construction ne prend pas en compte les places archimédiennes de K. D'où la définition suivante :

Définition 2.1.1. ***(Cohomologie à support compact)***

(A) Soit $\mathcal{F}^\bullet = ... \to \mathcal{F}^{-1} \to \mathcal{F}^0 \to \mathcal{F}^1 \to ...$ un complexe borné de faisceaux sur Spec $\mathbb{Z}$. Notons $\delta^r : \mathcal{F}^r \to \mathcal{F}^{r+1}$ les différentielles. Considérons le morphisme $a :$ Spec $\mathbb{C} \to$ Spec $\mathbb{Z}$. Pour chaque $r \in \mathbb{Z}$, la conjugaison complexe $\sigma \in Gal(\mathbb{C}/\mathbb{R})$ induit un morphisme $a^*\mathcal{F}^r \to a^*\mathcal{F}^r$, et donc aussi un morphisme $a_*a^*\mathcal{F}^r \to a_*a^*\mathcal{F}^r$, que l'on note encore σ. Pour chaque $r \in \mathbb{Z}$, on note $\widehat{\mathcal{F}^r}$ le complexe de faisceaux sur $\mathbb{Z}$ défini par :

(i) pour $s \neq 0$, $\widehat{\mathcal{F}^r}^s = a_*a^*\mathcal{F}^r$.

(ii) $\widehat{\mathcal{F}^r}^0 = a_*a^*\mathcal{F}^r \oplus \mathcal{F}^r$.

(iii) pour $s \neq 0$ pair, $d^s : \widehat{\mathcal{F}^r}^s \to \widehat{\mathcal{F}^r}^{s+1}$ est égal à $\sigma + 1$.

(iv) pour $s \neq -1$ impair, $d^s : \widehat{\mathcal{F}^r}^s \to \widehat{\mathcal{F}^r}^{s+1}$ est égal à $\sigma - 1$.

(v) $d^0 : \widehat{\mathcal{F}^r}^0 \to \widehat{\mathcal{F}^r}^1$ est donné par $(x, y) \mapsto (\sigma + 1)(x) + ad(y)$, où $ad : \mathcal{F}^r \to a_*a^*\mathcal{F}^r$ est le morphisme d'adjonction.

(vi) $d^{-1} : \widehat{\mathcal{F}^r}^{-1} \to \widehat{\mathcal{F}^r}^{0}$ *est donné par* $x \mapsto ((\sigma - 1)(x), 0)$.

On note alors $\widehat{\mathcal{F}^\bullet}$ *le complexe de faisceaux sur* $\mathrm{Spec}\,\mathbb{Z}$ *défini par :*

(i) pour $p \in \mathbb{Z}$, $\widehat{\mathcal{F}}^t = \bigoplus_{r+s=p} \widehat{\mathcal{F}^r}^s$.

(ii) les différentielles $\widehat{\mathcal{F}}^p \to \widehat{\mathcal{F}}^{p+1}$ *sont induites par les* $\delta^r + (-1)^r d^s$ *pour* $r + s = p$.

Le foncteur $\mathcal{F}^\bullet \to \widehat{\mathcal{F}^\bullet}$ *s'étend en un endomorphisme de la catégorie dérivée de la catégorie des faisceaux sur* $\mathrm{Spec}\,\mathbb{Z}$*, que l'on note toujours* $\widehat{\ }$.

(B) Soit maintenant $\mathcal{F}^\bullet$ *un complexe borné de faisceaux sur* U*. Notons* $f : U \to \mathrm{Spec}\,\mathbb{Z}$*. La* ***cohomologie à support compact*** *est définie par :*

$$H^p_c(U, \mathcal{F}^\bullet) = \mathbb{H}^p(\mathrm{Spec}\,\mathbb{Z}, \widehat{Rf_!\mathcal{F}^\bullet}),$$

où $\mathbb{H}^p(\mathrm{Spec}\,\mathbb{Z}, -)$ *désigne l'hypercohomologie du foncteur qui à un faisceau sur* $\mathrm{Spec}\,\mathbb{Z}$ *associe ses sections globales.*

Remarque 2.1.2. (i) Dans notre situation, $f = f_X \circ j_X$ où $j_X : U \hookrightarrow X$ est l'immersion ouverte et $f_X : X \to \mathrm{Spec}\,\mathbb{Z}$ est fini. On en déduit que $Rf_! = f_{X*}j_{X!}$ et donc que $H^p_c(U, \mathcal{F}^\bullet) = \mathbb{H}^p(\mathrm{Spec}\,\mathbb{Z}, \widehat{f_{X*}j_{X!}\mathcal{F}^\bullet})$.

(ii) On remarque que $\widehat{Rf_!\mathcal{F}}$ est le cône de l'application de complexes suivante :

$$\begin{tikzcd}
\ldots \arrow[r] & a_*a^*Rf_!\mathcal{F} \arrow[r, "\sigma-1"] & a_*a^*Rf_!\mathcal{F} \arrow[r, "\sigma+1"] & a_*a^*Rf_!\mathcal{F} \arrow[r, "\sigma-1"] & a_*a^*Rf_!\mathcal{F} \arrow[r] & \ldots \\
\ldots \arrow[r] & 0 \arrow[r] \arrow[u] & 0 \arrow[r] \arrow[u] & Rf_!\mathcal{F} \arrow[r] \arrow[u, "\mathrm{ad}"] & 0 \arrow[r] \arrow[u] & \ldots
\end{tikzcd}$$

On note $(Rf_!\mathcal{F})_\sigma$ le complexe du haut, celui du bas étant $Rf_!\mathcal{F}[-1]$. On dispose donc d'un triangle distingué :

$$Rf_!\mathcal{F}[-1] \to (Rf_!\mathcal{F})_\sigma \to \widehat{Rf_!\mathcal{F}} \to Rf_!\mathcal{F}.$$

(iii) On remarque que tous les faisceaux du complexe $(Rf_!\mathcal{F})_\sigma$ sont flasques, et donc on a :

$$\mathbb{H}^r(\mathrm{Spec}\,\mathbb{Z}, (Rf_!\mathcal{F})_\sigma) = H^r((Rf_!\mathcal{F})_\sigma(\mathrm{Spec}\,\mathbb{Z})).$$

De plus :

$$a_*a^*Rf_!\mathcal{F}(\mathrm{Spec}\,\mathbb{Z}) = a^*Rf_!\mathcal{F}(\mathrm{Spec}\,\mathbb{C}) = (f_{X*}j_{X!}\mathcal{F})_{\overline{(0)}} = \mathcal{F}_{\overline{\eta}}^{\{\tau : K \hookrightarrow \mathbb{C}\}}.$$

On en déduit que le complexe $(Rf_!\mathcal{F})_\sigma(\mathrm{Spec}\,\mathbb{Z})$ s'identifie au produit des complexes :

$$C_v = \ldots \xrightarrow{\sigma-1} \mathcal{F}_{\overline{\eta}} \xrightarrow{\sigma+1} \mathcal{F}_{\overline{\eta}} \xrightarrow{\sigma-1} \mathcal{F}_{\overline{\eta}} \xrightarrow{\sigma+1} \mathcal{F}_{\overline{\eta}} \xrightarrow{\sigma-1} \ldots$$

où v décrit les places archimédiennes de K et σ agit comme l'élément non trivial de $\mathrm{Gal}(\overline{K_v}/K_v)$ si v est réelle et trivialement sinon. Pour chaque v, la cohomologie de C_v s'identifie alors à la cohomologie modifiée de Tate du $\mathrm{Gal}(\overline{K_v}/K_v)$-module $\mathcal{F}_{\overline{\eta}}$ (décalée de 1). Par conséquent,

$$\mathbb{H}^r(\mathrm{Spec}\,\mathbb{Z}, (Rf_!\mathcal{F})_\sigma) \cong \bigoplus_{v\in\Omega_K^\infty} H^{r-1}(K_v, \mathcal{F}).$$

Pour $\mathcal{F}$ un faisceau sur U, la cohomologie à support compact de $\mathcal{F}$ est définie par

$$H^r_c(U, \mathcal{F}) = H^r_c(U, \tilde{\mathcal{F}}),$$

où $\tilde{F}$ désigne le complexe : $... \to 0 \to 0 \to \mathcal{F} \to 0 \to 0 \to ...$.
Avant de continuer, nous rappelons les propriétés de base de la cohomologie à support compact que nous utiliserons constamment :

Proposition 2.1.3. *(i) Une suite exacte courte de complexes de faisceaux sur U :*

$$0 \to \mathcal{F}'^\bullet \to \mathcal{F}^\bullet \to \mathcal{F}''^\bullet \to 0$$

donne lieu à une suite exacte longue en cohomologie à support compact :

$$... \to H^r_c(U, \mathcal{F}'^\bullet) \to H^r_c(U, \mathcal{F}^\bullet) \to H^r_c(U, \mathcal{F}''^\bullet) \to ...$$

(ii) Pour toute immersion fermée $i : Z \hookrightarrow U$ avec $Z \neq U$ et tout complexe de faisceaux $\mathcal{F}^\bullet$ sur Z, les groupes $H^r_c(U, i_*\mathcal{F}^\bullet)$ et $\mathbb{H}^r(Z, \mathcal{F}^\bullet)$ sont isomorphes.
(iii) Pour toute immersion ouverte $j : V \hookrightarrow U$ et tout complexe de faisceaux $\mathcal{F}^\bullet$ sur V, les groupes $H^r_c(U, j_!\mathcal{F}^\bullet)$ et $H^r_c(V, \mathcal{F}^\bullet)$ sont isomorphes.
(iv) Pour toute immersion ouverte $j : V \hookrightarrow U$ et tout complexe de faisceaux $\mathcal{F}^\bullet$ sur U, on dispose d'une suite exacte longue qui permet de comparer la cohomologie à support compact sur U à celle sur V :

$$... \to H^r_c(V, j^*\mathcal{F}^\bullet) \to H^r_c(U, \mathcal{F}^\bullet) \to \bigoplus_{v\in U\setminus V} \mathbb{H}^r(k(v), \mathcal{F}^\bullet_{\overline{v}}) \to ...$$

(v) Pour tout faisceau $\mathcal{F}$ sur U, on dispose d'une suite exacte longue qui permet de comparer la cohomologie à support compact à la cohomologie usuelle :

$$... \to H^r_c(U, \mathcal{F}) \to H^r(U, \mathcal{F}) \to \bigoplus_{v\notin U} H^r(K_v, \mathcal{F}_{\overline{\eta}}) \to ...$$

Démonstration. (i) Comme $0 \to \mathcal{F}'^\bullet \to \mathcal{F}^\bullet \to \mathcal{F}''^\bullet \to 0$ est une suite exacte de complexes de faisceaux sur U, nous disposons d'un triangle distingué :

$$\mathcal{F}''^\bullet[-1] \to \mathcal{F}'^\bullet \to \mathcal{F}^\bullet \to \mathcal{F}''^\bullet,$$

d'où un triangle distingué :

$$\widehat{Rf_!\mathcal{F}''^\bullet}[-1] \to \widehat{Rf_!\mathcal{F}'^\bullet} \to \widehat{Rf_!\mathcal{F}^\bullet} \to \widehat{Rf_!\mathcal{F}''^\bullet}.$$

On en deduit une suite exacte longue :

$$\ldots \to H_c^r(U, \mathcal{F}'^\bullet) \to H_c^r(U, \mathcal{F}^\bullet) \to H_c^r(U, \mathcal{F}''^\bullet) \to \ldots$$

(ii) Par finitude de f_X, on a :

$$\begin{aligned} H_c^r(U, i_*\mathcal{F}^\bullet) &= \mathbb{H}^r(\mathrm{Spec}\ \mathbb{Z}, (Rf_{X*}j_{X!}(i_!\mathcal{F}^\bullet))\widehat{\ }) \\ &= \mathbb{H}^r(\mathrm{Spec}\ \mathbb{Z}, (Rf_{X*}(j_X \circ i)_!\mathcal{F}^\bullet)\widehat{\ }) \\ &= \mathbb{H}^r(\mathrm{Spec}\ \mathbb{Z}, ((f_X \circ j_X \circ i)_!\mathcal{F}^\bullet)\widehat{\ }) \end{aligned}$$

Mais $(f_X \circ j_X \circ i)_!\mathcal{F}^\bullet$ est à support dans un fermé strict de Spec $\mathbb{Z}$, et donc $a_*a^*(f_X \circ j_X \circ i)_!\mathcal{F}^\bullet = 0$. On en déduit que :

$$((f_X \circ j_X \circ i)_!\mathcal{F}^\bullet)\widehat{\ } = (f_X \circ j_X \circ i)_!\mathcal{F}^\bullet$$

et donc $H_c^r(U, i_*\mathcal{F}^\bullet) = \mathbb{H}^r(\mathrm{Spec}\ \mathbb{Z}, (f_X \circ j_X \circ i)_!\mathcal{F}^\bullet) = \mathbb{H}^r(\mathrm{Spec}\ \mathbb{Z}, (f_X \circ j_X \circ i)_*\mathcal{F}^\bullet)$. Comme $f_X \circ j_X \circ i$ est fini, le foncteur $(f_X \circ j_X \circ i)_*$ est exact et envoie les faisceaux injectifs sur les faisceaux injectifs. De plus, il admet un adjoint à gauche, $(f_X \circ j_X \circ i)^*$. On en déduit que :

$$H_c^r(U, i_*\mathcal{F}^\bullet) = \mathbb{H}^r(\mathrm{Spec}\ \mathbb{Z}, (f_X \circ j_X \circ i)_*\mathcal{F}^\bullet) \cong \mathbb{H}^r(Z, \mathcal{F}^\bullet).$$

(iii) On a :

$$\begin{aligned} H_c^r(U, j_!\mathcal{F}^\bullet) &= \mathbb{H}^r(\mathrm{Spec}\ \mathbb{Z}, (Rf_{X*}j_{X!}(j_!\mathcal{F}^\bullet))\widehat{\ }) \\ &= \mathbb{H}^r(\mathrm{Spec}\ \mathbb{Z}, (Rf_{X*}(j_X \circ j)_!\mathcal{F}^\bullet)\widehat{\ }) \\ &= H_c^r(V, \mathcal{F}^\bullet). \end{aligned}$$

(iv) Notons $i : U \setminus V \hookrightarrow U$. Nous disposons d'une suite exacte :

$$0 \to j_!j^*\mathcal{F}^\bullet \to \mathcal{F}^\bullet \to i_*i^*\mathcal{F}^\bullet \to 0.$$

En utilisant (i), nous obtenons une suite exacte longue :

$$\ldots \to H_c^r(U, j_!j^*\mathcal{F}^\bullet) \to H_c^r(U, \mathcal{F}^\bullet) \to H_c^r(U, i_*i^*\mathcal{F}^\bullet) \to \ldots$$

Or, (ii) impose que $H_c^r(U, i_*i^*\mathcal{F}^\bullet) = \mathbb{H}^r(U \setminus V, i^*\mathcal{F}^\bullet) = \bigoplus_{v \in U \setminus V} \mathbb{H}^r(k(v), \mathcal{F}^\bullet_{\overline{v}})$ et (iii) entraîne que $H_c^r(U, j_!j^*\mathcal{F}^\bullet) = H_c^r(V, j^*\mathcal{F}^\bullet)$. Et donc la suite :

$$\ldots \to H_c^r(V, j^*\mathcal{F}^\bullet) \to H_c^r(U, \mathcal{F}^\bullet) \to \bigoplus_{v \in U \setminus V} \mathbb{H}^r(k(v), \mathcal{F}^\bullet_{\overline{v}}) \to \ldots$$

est exacte.

(v) La démonstration de cette propriété nécessite de connaissances plus avancées en algèbre homologique et nous n'allons pas la présenter ici. Malheureusement, nous n'avons pas trouvé de référence appropriée pour cette preuve. En fait, dans la littérature, on peut trouver d'autres définitions de la cohomologie à support compact (voir la section II.2 de [Mil06] et l'appendice de [Hab78]). Ces définitions permettent bien de prouver la propriété (v) mais nous n'avons trouvé aucune référence démontrant l'équivalence des trois définitions.
Dans la suite, on donne quand même la construction des morphismes apparaissant dans la suite.
<u>A.</u> Montrons qu'il y a une suite exacte longue :

$$... \to H^r_c(U, \mathcal{F}) \to H^r(\operatorname{Spec}\mathbb{Z}, f_{X*}j_{X!}\mathcal{F}) \to \bigoplus_{v\in\Omega_K^\infty} H^r(K_v, \mathcal{F}_{\overline{\eta}}) \to ...$$

Nous disposons d'un triangle distingué :

$$Rf_!\mathcal{F}[-1] \to (Rf_!\mathcal{F})_\sigma \to \widehat{Rf_!\mathcal{F}} \to Rf_!\mathcal{F},$$

qui induit une suite exacte longue d'hypercohomologie :

$$... \to H^{r-1}(\operatorname{Spec}\mathbb{Z}, Rf_!\mathcal{F}) \to \mathbb{H}^r(\operatorname{Spec}\mathbb{Z}, (Rf_!\mathcal{F})_\sigma) \to H^r_c(U, \mathcal{F}) \to ...$$

Or :

$$\mathbb{H}^r(\operatorname{Spec}\mathbb{Z}, (Rf_!\mathcal{F})_\sigma) \cong \bigoplus_{v\in\Omega_K^\infty} H^{r-1}(K_v, \mathcal{F}).$$

On en déduit la suite exacte :

$$... \to H^r_c(U, \mathcal{F}) \to H^r(\operatorname{Spec}\mathbb{Z}, f_{X*}j_{X!}\mathcal{F}) \to \bigoplus_{v\in\Omega_K^\infty} H^r(K_v, \mathcal{F}_{\overline{\eta}}) \to ...$$

Dans la suite, nous noterons $H^r_{c,f}(U, \mathcal{F}) = H^r(\operatorname{Spec}\mathbb{Z}, f_{X*}j_{X!}\mathcal{F})$. On remarquera que, comme f_{X*} est exact (par finitude de f_X et envoie les faisceaux injectifs sur les faisceaux injectifs, on a $H^r_{c,f}(U, \mathcal{F}) = H^r(X, j_{X!}\mathcal{F})$.
<u>B.</u> Montrons qu'il y a une suite exacte longue :

$$... \to H^r_{c,f}(U, \mathcal{F}) \to H^r(U, \mathcal{F}) \to \bigoplus_{v\in X\setminus U} H^r(K_v, \mathcal{F}_{\overline{\eta}}) \to ...$$

Notons $i_X : X \setminus U \hookrightarrow X$. Nous disposons d'une suite exacte de faisceaux sur X :

$$0 \to j_{X!}\mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \to i_{X*}\mathbb{Z} \to 0,$$

d'où une suite exacte longue :

$$... \to \operatorname{Ext}^r_X(i_{X*}\mathbb{Z}, j_{X!}\mathcal{F}) \to \operatorname{Ext}^r_X(\mathbb{Z}, j_{X!}\mathcal{F}) \to \operatorname{Ext}^r_X(j_{X!}\mathbb{Z}, j_{X!}\mathcal{F}) \to ...$$

On remarque que $\mathrm{Ext}^r_X(\mathbb{Z}, j_{X!}\mathcal{F}) = H^r_{c,f}(U,\mathcal{F})$ et que $\mathrm{Ext}^r_X(j_{X!}\mathbb{Z}, j_{X!}\mathcal{F}) \cong H^r(U,\mathcal{F})$ car j_X^* est exact et envoie les faisceaux injectifs sur les faisceaux injectifs. De plus, à l'aide du théorème d'excision et des propositions II.0.1.d et II.1.1.a de [Mil06], on a :

$$\begin{aligned}\mathrm{Ext}^r_X(i_{X*}\mathbb{Z}, j_{X!}\mathcal{F}) &\cong \bigoplus_{v\in X\setminus U} H^r_v(X, j_{X!}\mathcal{F})\\ &\cong \bigoplus_{v\in X\setminus U} H^r_v(\mathrm{Spec}\ \mathcal{O}_v, j_{X!}\mathcal{F})\\ &\cong \bigoplus_{v\in X\setminus U} H^{r-1}(K_v, \mathcal{F}_{\overline{\eta}}),\end{aligned}$$

où $\mathcal{O}_v$ désigne l'anneau des entiers de K_v. On en déduit la suite exacte anoncée :

$$\ldots \to H^r_{c,f}(U,\mathcal{F}) \to H^r(U,\mathcal{F}) \to \bigoplus_{v\in X\setminus U} H^r(K_v,\mathcal{F}_{\overline{\eta}}) \to \ldots$$

<u>C.</u> Pour chaque place archimédienne v, construisons un morphisme $h : H^r(U,\mathcal{F}) \to H^r(K_v, F_{\overline{\eta}})$ tel que le diagramme suivant commute :

$$(*)\quad \begin{tikzcd} H^r_{c,f}(U,\mathcal{F}) \arrow[r] \arrow[d] & H^r(K_v,\mathcal{F}_{\overline{\eta}}) \\ H^r(U,\mathcal{F}) \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

Notons $g_v : \mathrm{Spec}\ K_v \to U$. Pour $r > 0$, on choisit pour $h : \mathrm{Ext}^r_U(\mathbb{Z},\mathcal{F}) \to \mathrm{Ext}^r_{\mathrm{Spec}\ K_v}(g_v^*\mathbb{Z}, g_v^*\mathcal{F})$ le morphisme induit par le foncteur exact g_v^*. Dans ce cas, la commutativité du diagramme (*) découle immédiatement de la commutativité du diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Ext}^r_X(\mathbb{Z}, j_{X!}\mathcal{F}) \arrow[r, "(j\circ g_v)^*"] \arrow[d, "j_X^*"] & \mathrm{Ext}^r_{\mathrm{Spec}\ K_v}(g_v^*\mathbb{Z}, g_v^* j_{X!}\mathcal{F}) \arrow[d, equal] \\ \mathrm{Ext}^r_U(j_X^*\mathbb{Z}, j_X^* j_{X!}\mathcal{F}) \arrow[r, "g_v^*"] & \mathrm{Ext}^r_{\mathrm{Spec}\ K_v}(g_v^* j^*\mathbb{Z}, g_v^* j_X^* j_{X!}\mathcal{F}) \end{tikzcd}$$

Pour $r = 0$, on choisit pour $h : \mathrm{Ext}^0_U(\mathbb{Z},\mathcal{F}) \to H^0(K_v, F_{\overline{\eta}})$ la composée du morphisme $\mathrm{Ext}^0_U(\mathbb{Z},\mathcal{F}) \to \mathrm{Ext}^0_{\mathrm{Spec}\ K_v}(g_v^*\mathbb{Z}, g_v^*\mathcal{F})$ induit par g_v^* suivie de la projection $H^0(G_{K_v}, F_{\overline{\eta}}) = H^0(K_v, F_{\overline{\eta}})$. La commutativité du diagramme (*) s'obtient comme dans le cas $r > 0$.

Finalement, pour $r < 0$, h est nécessairement le morphisme nul puisque $H^r(U,\mathcal{F}) = 0$. Mais on a aussi $H^r_{c,f}(U,\mathcal{F}) = 0$ et donc le diagramme (*) est automatiquement commutatif.

<u>D.</u> Pour chaque place finie $v \notin U$, contruisons un morphisme $h' : H^{r-1}(K_v,\mathcal{F}_{\overline{\eta}}) \to H^r_c(U,\mathcal{F})$ tel que le diagramme suivant commute :

$$(**)\qquad \begin{tikzcd} & H^{r-1}(K_v, \mathcal{F}_{\overline{\eta}}) \arrow[dl] \arrow[d] \\ H^r_c(U,\mathcal{F}) \arrow[r] & H^r_{c,f}(U,\mathcal{F}) \end{tikzcd}$$

Pour $r \leq 0$, le morphisme nul convient.
Prenons maintenant $r > 0$, et notons $i_v : \mathrm{Spec}\ k(v) \hookrightarrow X$. On choisit pour $h' : \mathrm{Ext}^r_X(i_{v*}\mathbb{Z}, j_{X!}\mathcal{F}) \to \mathrm{Ext}^r_{\mathrm{Spec}\ \mathbb{Z}}(\mathbb{Z}, \widehat{f_{X*}j_{X!}\mathcal{F}})$ la composée :

$$\mathrm{Ext}^r_X(i_{v*}\mathbb{Z}, j_{X!}\mathcal{F}) \to \mathrm{Ext}^r_{\mathrm{Spec}\ \mathbb{Z}}(\widehat{f_{X*}i_{v*}\mathbb{Z}}, \widehat{f_{X*}j_{X!}\mathcal{F}}) \to \mathrm{Ext}^r_{\mathrm{Spec}\ \mathbb{Z}}(\mathbb{Z}, \widehat{f_{X*}j_{X!}\mathcal{F}})$$

où la première flèche est induite par le foncteur exact $(f_{X*}-)\widehat{}$ et la deuxième par le morphisme $\mathbb{Z} \to f_{X*}i_{v*}i_v^*f_X^*\mathbb{Z} = \widehat{f_{X*}i_{v*}\mathbb{Z}}$.
Pour vérifier que (**) est commutatif, il suffit de montrer la commutativité du diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Ext}^r_X(i_{v*}\mathbb{Z}, \mathcal{G}) \arrow[r] \arrow[dd] & \mathrm{Ext}^r_{\mathrm{Spec}\ \mathbb{Z}}(\widehat{f_{X*}i_{v*}\mathbb{Z}}, \widehat{f_{X*}\mathcal{G}}) \arrow[d] \\ & \mathrm{Ext}^r_{\mathrm{Spec}\ \mathbb{Z}}(\mathbb{Z}, \widehat{f_{X*}\mathcal{G}}) \arrow[d] \\ \mathrm{Ext}^r_X(\mathbb{Z}, \mathcal{G}) & \mathrm{Ext}^r_{\mathrm{Spec}\ \mathbb{Z}}(\mathbb{Z}, f_{X*}\mathcal{G}) \arrow[l, "\cong"'] \end{tikzcd}$$

pour tout faisceau $\mathcal{G}$ sur X. Les deux morphismes $\mathrm{Ext}^r_X(i_{v*}\mathbb{Z}, \mathcal{G}) \to \mathrm{Ext}^r_X(\mathbb{Z}, \mathcal{G})$ ainsi obtenus étant des morphismes de δ-foncteurs, par universalité de $\mathrm{Ext}^r_X(i_{v*}\mathbb{Z}, -)$, il suffit de vérifier que le diagramme précédent commute lorsque $r = 0$. Soit donc $\phi : i_{v*}\mathbb{Z} \to \mathcal{G}$. Il s'agit de prouver que le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd} \mathbb{Z} = f_X^*\mathbb{Z} \arrow[r] \arrow[d] & f_X^*f_{X*}i_{v*}\mathbb{Z} = f_X^*\widehat{f_{X*}i_{v*}}\mathbb{Z} \arrow[d, "f_X^*\widehat{f_{X*}\phi}"] \\ i_{v*}\mathbb{Z} \arrow[d, "\phi"] & f_X^*\widehat{f_{X*}\mathcal{G}} \arrow[d] \\ \mathcal{G} & f_X^*f_{X*}\mathcal{G} \arrow[l] \end{tikzcd}$$

On remarque que la composée des deux morphismes verticaux de droite est tout simplement $f_X^*f_{X*}\phi$, et donc il suffit de prouver la commutativité du diagramme :

$$\begin{tikzcd} \mathbb{Z} = f_X^*\mathbb{Z} \arrow[d] \arrow[dr] & \\ i_{v*}\mathbb{Z} \arrow[d, "\phi"] & f_X^* f_{X*} i_{v*}\mathbb{Z} \arrow[l] \arrow[d, "f_X^* f_{X*}\phi"] \\ \mathcal{G} & f_X^* f_{X*}\mathcal{G} \arrow[l] \end{tikzcd}$$

La commutativité du carré du bas est évidente par fonctorialité. La commutativité du tringle provient de la commutativité du carré :

$$\begin{tikzcd} f_X^*\mathbb{Z} \arrow[r] \arrow[d] & f_X^* f_{X*} f_X^*\mathbb{Z} \arrow[d] \\ i_{v*}i_v^* f_X^*\mathbb{Z} & f_X^* f_{X*} i_{v*} i_v^* f_X^*\mathbb{Z} \arrow[l] \end{tikzcd}$$

où tous les morphismes sont induits par des morphismes d'adjonction. Cette commutativité est évidente par fonctorialité dès que l'on a remarqué que la composée des morphismes induits par l'adjonction $f_X^*\mathbb{Z} \to f_X^* f_{X*} f_X^*\mathbb{Z} \to f_X^*\mathbb{Z}$ est l'identité. On déduit finalement la commutativité du diagramme (**).

E. Les parties A et B permettent de construire le morphisme $H_c^r(U, \mathcal{F}) \to H^r(U, \mathcal{F})$; les parties B et C permettent de construire le morphisme $H^r(U, \mathcal{F}) \to \bigoplus_{v \notin U} H^r(K_v, \mathcal{F}_{\overline{\eta}})$; les parties A et D permettent de construire le morphisme $\bigoplus_{v \notin U} H^r(K_v, \mathcal{F}_{\overline{\eta}})$.

□

2.2 Étape 1 : Définition de l'accouplement

La proposition 2.1.3(i) nous permet alors de définir un accouplement :

$$\mathrm{Ext}_U^r(F, \mathbb{G}_m) \times H_c^{3-r}(U, F) \to H_c^3(U, \mathbb{G}_m).$$

Calculons donc $H_c^3(U, \mathbb{G}_m)$:

Lemme 2.2.1. ***(Cohomologie de*** $\mathbb{G}_m$***)***
Notons $S = \Omega_K \setminus U$.
(i) Le groupe $H^r(U, \mathbb{G}_m)$ *est isomorphe à* $\mathcal{O}_{K,S}^\times$ *pour* $r = 0$, *à* $Pic(\mathcal{O}_{K,S})$ *pour* $r = 1$, *et à* $H^r(K, \mathbb{G}_m)$ *pour* $r \geq 4$. *De plus, on a une suite exacte :*

$$0 \to H^2(U, \mathbb{G}_m) \to \bigoplus_{v \in S} Br(K_v) \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \to H^3(U, \mathbb{G}_m) \to 0.$$

(ii) Le groupe $H_c^r(U, \mathbb{G}_m)$ *est nul pour* $r = 2$ *et isomorphe à* $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ *pour* $r = 3$.

Démonstration. (i) On dispose d'une suite exacte :

$$0 \to \mathbb{G}_m \to g_*\mathbb{G}_m \to \mathrm{Div}_U \to 0.$$

La suite exacte longue associée s'écrit :

$$... \to H^r(U,\mathbb{G}_m) \to H^r(U,g_*\mathbb{G}_m) \to H^r(U,\mathrm{Div}_U) \to ...$$

Le calcul de $H^r(U,\mathrm{Div}_U)$ est simple : si l'on note U^0 l'ensemble des points fermés de U et i_v désigne l'immersion fermée Spec $k(v) \hookrightarrow U$, on a $\mathrm{Div}_U = \bigoplus_{v\in U^0} i_{v*}\mathbb{Z}$, et donc, comme U est quasi-compact et quasi-séparé,

$$H^r(U,\mathrm{Div}_U) = \bigoplus_{v\in U^0} H^r(U,i_{v*}\mathbb{Z}) \cong \bigoplus_{v\in U^0} H^r(k(v),\mathbb{Z}).$$

D'autre part, pour $s>0$, la tige de $R^sg_*\mathbb{G}_m$ en $\overline{\eta}$ est $H^s(K^s,\mathbb{G}_m)=0$ et, pour $v\in U\setminus\{\eta\}$, la tige de $R^sg_*\mathbb{G}_m$ en $\overline{v}$ est $H^s(K_v^{nr},\mathbb{G}_m)$, qui vaut 0 pour $s=1$ d'après le théorème de Hilbert 90 et qui vaut 0 pour $s>1$ parce que K_v^{nr} est un corps de dimension cohomologique au plus 1. On en déduit que $R^sg_*\mathbb{G}_m=0$. La suite spectrale de Leray :

$$H^r(U,R^sg_*\mathbb{G}_m) \Rightarrow H^{r+s}(K,\mathbb{G}_m)$$

fournit alors des isomorphismes $H^r(U,g_*\mathbb{G}_m)\cong H^r(K,\mathbb{G}_m)$. Par conséquent, on obtient des suites exactes :

$$0\to \mathcal{O}_{K,S}^\times \to K^\times \to \bigoplus_{v\in U^0}\mathbb{Z} \to H^1(U,\mathbb{G}_m)\to 0$$

$$0\to H^2(U,\mathbb{G}_m)\to \mathrm{Br}(K)\to \bigoplus_{v\in U^0}\mathrm{Br}(K_v)\to H^3(U,\mathbb{G}_m)\to H^3(K,\mathbb{G}_m)\to 0$$

$$H^r(U,\mathbb{G}_m)\cong H^r(K,\mathbb{G}_m)$$

pour $r>3$. La première et la troisième suites donnent immédiatement les résultats pour $r=0$, $r=1$ et $r>3$ à l'aide des résultats de cohomologie galoisienne. De plus, le théorème de Brauer-Hasse-Noether fournit une suite exacte :

$$0\to \mathrm{Br}(K)\to \bigoplus_{v\in\Omega_K}\mathrm{Br}(K_v)\to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}\to 0.$$

Cela entraîne la suite exacte :

$$0\to H^2(U,\mathbb{G}_m)\to \bigoplus_{v\in S}\mathrm{Br}(K_v)\to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}\to H^3(U,\mathbb{G}_m)\to 0.$$

(ii) Supposons d'abors que $U\neq X$. Dans ce cas, (i) entraîne que $H^3(U,\mathbb{G}_m)=0$. La proposition 2.1.3(v) fournit des suites exactes :

$$0\to H^2_c(U,\mathbb{G}_m)\to H^2(U,\mathbb{G}_m)\to \bigoplus_{v\notin U}\mathrm{Br}(K_v)\to H^3_c(U,\mathbb{G}_m)\to 0$$

$$0 \to H_c^{2r}(U, \mathbb{G}_m) \to H^{2r}(U, \mathbb{G}_m) \to \bigoplus_{v \text{ réelle}} H^{2r}(K_v, \mathbb{G}_m) \to H_c^{2r+1}(U, \mathbb{G}_m) \to H^{2r+1}(U, \mathbb{G}_m) \to 0$$

pour $r > 1$. En utilisant la partie (i), cela entraîne que le groupe $H_c^r(U, \mathbb{G}_m)$ est nul pour $r = 2$ et isomorphe à $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ pour $r = 3$.
Reste donc à étudier le cas où $U = X$. Montrons que, pour tout ouvert V de U et tout $r \geq 2$, $H_c^r(V, \mathbb{G}_m)$ et $H_c^r(U, \mathbb{G}_m)$ sont isomorphes. La proposition 2.1.3(iv) fournit une suite exacte longue :

$$... \to H_c^r(V, \mathbb{G}_m) \to H_c^r(U, \mathbb{G}_m) \to \bigoplus_{v \in U \setminus V} H^r(k(v), \mathcal{O}_v^{nr\times}) \to ...$$

Comme on a un isomorphisme de $\mathrm{Gal}(k(v)^s/k(v))$-modules discrets

$$K_v^{nr\times} \cong \mathcal{O}_v^{nr\times} \oplus \mathbb{Z}$$

et comme $H^1(k(v), K_v^{nr\times}) = 0$, on obtient que $H^1(k(v), \mathcal{O}_v^{nr\times}) = 0$. De plus, on sait que $H^2(k(v), \mathcal{O}_v^{nr\times}) = 0$ et par dimension cohomologique, $H^r(k(v), \mathcal{O}_v^{nr\times}) = 0$ pour $r \geq 3$. Par conséquent, les groupes $H_c^r(V, \mathbb{G}_m)$ et $H_c^r(U, \mathbb{G}_m)$ sont isomorphes pour $r \geq 2$.

□

Remarque 2.2.2. D'après les résultats de cohomologie galoisienne des corps globaux présentés au début du mémoire, $H^r(U, \mathbb{G}_m)$ est nul pour $r \geq 4$ lorsque K n'a pas de places réelles.
En fait, de manière générale, si l'on s'autorise à utiliser le théorème de Poitou-Tate, la preuve précédente montre que $H^r(U, \mathbb{G}_m)$ est isomorphe à $\bigoplus_{v \text{ réelle}} H^r(K_v, \mathbb{G}_m)$ pour $r \geq 4$ indépendamment du corps K, et que $H_c^r(U, \mathbb{G}_m)$ est nul pour $r \geq 4$.

On dispose alors d'un accouplement :

$$\mathrm{Ext}_U^r(F, \mathbb{G}_m) \times H_c^{3-r}(U, F) \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}.$$

Cela fournit un morphisme $\alpha^r(U, F) : \mathrm{Ext}_U^r(F, \mathbb{G}_m) \to H_c^{3-r}(U, F)^*$.

2.3 Étape 2 : Cas d'un faisceau à support dans un fermé strict

Nous commençons par prouver le théorème d'Artin-Verdier pour des faisceaux dont le support est contenun dans un fermé strict : cela se ramène assez aisément à un problème de dualité en cohomologie galoisienne, et ce sera utile pour voir qu'il suffit de prouver le théorème lorsque U est assez petit.

Lemme 2.3.1. *Supposons que F est à support dans un fermé strict Z de U. Alors, pour tout $r \geq 0$,*

$$\bigoplus_{v \in Z} Ext_v^{r-1}(i_v^* F, \mathbb{Z}) \cong Ext_U^r(F, \mathbb{G}_m),$$

où, pour $v \in Z$, i_v désigne l'immersion fermée Spec $k(v) \hookrightarrow U$.

Démonstration. Nous disposons d'une immersion fermée $i : Z \hookrightarrow U$ et d'une immersion ouverte $j : U \setminus Z \hookrightarrow U$. On remarque alors que $F = i_* i^* F$.
Nous disposons d'une suite exacte de faisceaux sur U :

$$0 \to \mathbb{G}_m \to g_* \mathbb{G}_m \to \mathrm{Div}_U \to 0$$

avec $\mathrm{Div}_U = \bigoplus_{v \in U^0} i_{v*}\mathbb{Z}$, où U^0 désigne les points fermés de U, et i_v est l'immesion fermée $i_v : \mathrm{Spec}\ k(v) \hookrightarrow U$. D'où une suite exacte longue :

$$... \to \mathrm{Ext}_U^r(F, \mathbb{G}_m) \to \mathrm{Ext}_U^r(F, g_* \mathbb{G}_m) \to \mathrm{Ext}_U^r(F, \mathrm{Div}_U) \to ...$$

Il nous faut maintenant calculer les termes $\mathrm{Ext}_U^r(F, g_* \mathbb{G}_m)$ et $\mathrm{Ext}_U^r(F, \mathrm{Div}_U)$ de la suite exacte :

- Calculons $\mathrm{Ext}_U^r(F, g_* \mathbb{G}_m)$. Pour $s > 0$ et $v \in U \setminus \{\eta\}$, on a $(R^s g_* \mathbb{G}_m)_{\overline{\eta}} = H^s(K^s, K^{s,\times}) = 0$ et $(R^s g_* \mathbb{G}_m)_{\overline{v}} = H^s(K_v^{nr}, K_v^{s,\times}) = 0$ puisque K_v^{nr} est de dimension cohomologique au plus 1. On en déduit que, pour $s > 0$, $R^s g_* \mathbb{G}_m = 0$. La suite spectrale $\mathrm{Ext}_U^r(F, R^s g_* \mathbb{G}_m) \Rightarrow \mathrm{Ext}_{\mathrm{Spec}\ K}^{r+s}(g^* F, \mathbb{G}_m)$ induit donc des isomorphismes $\mathrm{Ext}_U^r(F, g_* \mathbb{G}_m) \cong \mathrm{Ext}_{\mathrm{Spec}\ K}^r(g^* F, \mathbb{G}_m)$. Mais on a $\mathrm{Ext}_{\mathrm{Spec}\ K}^r(g^* F, \mathbb{G}_m) \cong \mathrm{Ext}_{\mathrm{Gal}(K^s/K)}^r(F_{\overline{\eta}}, K^{s,\times}) = 0$ car $F_{\overline{\eta}} = 0$. Par conséquent, $\mathrm{Ext}_U^r(F, g_* \mathbb{G}_m) = 0$.
- Comme U est quasi-compact et quasi-séparé, le foncteur $\mathrm{Ext}_U^r(F, -)$ commute avec les limites inductives filtrées, et donc avec les sommes directes. Ainsi,

  $$\mathrm{Ext}_U^r(F, \mathrm{Div}_U) = \bigoplus_{v \in U^0} \mathrm{Ext}_U^r(F, i_{v*}\mathbb{Z}).$$

  Mais $\mathrm{Ext}_U^r(F, i_{v*}\mathbb{Z}) = \mathrm{Ext}_v^r({i_v}^* F, \mathbb{Z})$ puisque i_{v*} est un foncteur exact qui préserve les objets injectifs, et ${i_v}^* F = 0$ si $v \notin Z$. Par conséquent,

  $$\mathrm{Ext}_U^r(F, \mathrm{Div}_U) = \bigoplus_{v \in Z} \mathrm{Ext}_v^r(i_v^* F, \mathbb{Z}).$$

Ainsi, on obtient des isomorphismes $\bigoplus_{v \in Z} \mathrm{Ext}_v^{r-1}(i_v^* F, \mathbb{Z}) \cong \mathrm{Ext}_U^r(F, \mathbb{G}_m)$ pour $r \geq 0$. □

Proposition 2.3.2. *Supposons que F est à support dans un fermé strict Z de U. Alors $\alpha^r(U, F)$ est un isomorphisme pour tout entier r.*

Démonstration. Reprenons les notations de la démonstration précédente. Nous avons des isomorphismes :

$$\mathrm{Ext}^r_U(F, \mathbb{G}_m) \cong \bigoplus_{v \in Z} \mathrm{Ext}^{r-1}_v(i_v^* F, \mathbb{Z}) \cong \bigoplus_{v \in Z} \mathrm{Ext}^{r-1}_{\mathrm{Gal}(k(v)^s/k(v))}(F_{\overline{v}}, \mathbb{Z}),$$

$$H^r_c(U, F) \cong H^r(Z, i^* F) \cong \bigoplus_{v \in Z} H^r(v, i_v^* F) \cong \bigoplus_{v \in Z} H^r(k(v), F_{\overline{v}}),$$

le premier isomorphisme découlant du lemme précédent, le deuxième des propriétés de la cohomologie à support compact.
À travers ces isomorphismes, l'accouplement :

$$\mathrm{Ext}^r_U(F, \mathbb{G}_m) \times H^{3-r}_c(U, F) \to H^3_c(U, \mathbb{G}_m) \cong \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$$

s'identifie à l'accouplement

$$\bigoplus_{v \in Z} \mathrm{Ext}^{r-1}_{\mathrm{Gal}(k(v)^s/k(v))}(F_{\overline{v}}, \mathbb{Z}) \times \bigoplus_{v \in Z} H^{3-r}(k(v), F_{\overline{v}}) \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$$

obtenu naturellement à partir des accouplements :

$$\mathrm{Ext}^{r-1}_{\mathrm{Gal}(k(v)^s/k(v))}(F_{\overline{v}}, \mathbb{Z}) \times H^{3-r}(k(v), F_{\overline{v}}) \to H^2(k(v), \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$$

associés aux formations de classes $(\mathrm{Gal}(k(v)^s/k(v)), \mathbb{Z})$ pour $v \in Z$: d'après le théorème de dualité de dualité pour les formations de classes (théorème I.1.8 dans [Mil06]), ces accouplements sont des accouplements parfaits de groupes finis, et donc l'accouplement

$$\mathrm{Ext}^r_U(F, \mathbb{G}_m) \times H^{3-r}_c(U, F) \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$$

est aussi un accouplement parfait de groupes finis. □

2.4 Étape 3 : Le théorème d'Artin-Verdier est vrai pour F sur U si, et seulement si, il est vrai pour la restriction de F à un certain ouvert V de U

Nous allons maintenant voir que, si V désigne un ouvert de U, alors $\alpha^r(U, F)$ est un isomorphisme pour tout entier r si, et seulement si, $\alpha^r(V, F|_V)$ l'est. Cela permettra en particulier de supposer que F est localement constant et que $|F_{\overline{\eta}}|$ est inversible sur U.

Lemme 2.4.1. *Soit $0 \to F' \to F \to F'' \to 0$ une suite exacte de faisceaux constructibles sur U. Si $\alpha^r(U, F')$ et $\alpha^r(U, F'')$ sont des isomorphismes pour tout entier r, alors $\alpha^r(U, F)$ est un isomorphisme pour tout entier r.*

Démonstration. La suite exacte de faisceaux donnée fournit deux suites exactes longues de cohomologie :

$$... \to \mathrm{Ext}^r_U(F'', \mathbb{G}_m) \to \mathrm{Ext}^r_U(F, \mathbb{G}_m) \to \mathrm{Ext}^r_U(F', \mathbb{G}_m) \to \mathrm{Ext}^{r+1}_U(F'', \mathbb{G}_m)...$$

$$... \to H^{3-r}_c(U, F') \to H^{3-r}_c(U, F) \to H^{3-r}_c(U, F'') \to H^{4-r}_c(U, F')...$$

De plus, le foncteur $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(-, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ est exact puisque $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ est un groupe abélien divisible injectif. Par conséquent, nous disposons d'un diagramme commutatif à lignes exactes :

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Ext}^{r-1}_U(F', \mathbb{G}_m) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & \mathrm{Ext}^r_U(F'', \mathbb{G}_m) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & \mathrm{Ext}^r_U(F, \mathbb{G}_m) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Ext}^r_U(F', \mathbb{G}_m) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & \mathrm{Ext}^{r+1}_U(F'', \mathbb{G}_m) \arrow[d, "\cong"] \\
(H^{4-r}_c(U, F'))^* \arrow[r] & (H^{3-r}_c(U, F''))^* \arrow[r] & (H^{3-r}_c(U, F))^* \arrow[r] & (H^{3-r}_c(U, F'))^* \arrow[r] & (H^{2-r}_c(U, F''))^*
\end{tikzcd}$$

où les flèches verticales sont données par les α^r. Le lemme des cinq permet alors de conclure. □

Proposition 2.4.2. *Soit V un ouvert non vide de U. Alors $\alpha^r(U, F)$ est un isomorphisme pour tout entier r si, et seulement si, $\alpha^r(V, F|_V)$ l'est.*

Démonstration. Nous disposons d'une immersion ouverte $j : V \hookrightarrow U$ et d'une immersion fermée $i : U \setminus V \hookrightarrow U$, et donc d'une suite exacte de faisceaux sur U :

$$0 \to j_!j^*F \to F \to i_*i^*F \to 0.$$

D'après la deuxième étape, $\alpha^r(U, i_*i^*F)$ est un isomorphisme pour tout r, et donc, d'après le lemme précédent, $\alpha^r(U, F)$ est un isomorphisme pour tout r si, et seulement si, $\alpha^r(U, j_!j^*F)$ l'est.
Or, comme j^* est un fonteur exact préservant les injectifs, $\mathrm{Ext}^r_U(j_!j^*F, \mathbb{G}_m) \cong \mathrm{Ext}^r_V(j^*F, \mathbb{G}_m)$, et d'après les propriétés de la cohomologie à support compact, $H^r_c(U, j_!j^*F) \cong H^r_c(V, j^*F)$. À travers ces isomorphismes, $\alpha^r(U, j_!j^*F) : \mathrm{Ext}^r_U(j_!j^*F, \mathbb{G}_m) \to (H^r_c(U, j_!j^*F))^*$ s'identifie à $\alpha^r(V, j^*F) : \mathrm{Ext}^r_V(j^*F, \mathbb{G}_m) \to (H^r_c(V, j^*F))^*$. On en déduit immédiatement le résultat. □

2.5 Étape 4 : Annulation de $H^r_c(U, F)$ pour r assez grand

Nous allons montrer que $H^r_c(U, F)$ est nul pour $r \geq 4$. Cela permettra de prouver le théorème d'Artin-Verdier pour $r < 0$.

Lemme 2.5.1. *Soit V un ouvert non vide de U sur lequel F est localement constant. Soit $S = \Omega_K \setminus V$. Alors $H^r(V, F)$ est un groupe de torsion pour $r > 0$ et $H^r(V, F)\{l\} \cong H^r(G_{K,S}, F_{\overline{\eta}})\{l\}$ pour tout nombre premier l inversible sur V.*

Démonstration. Comme F est localement constant à tiges finies sur V, il existe $m>0$ tel que $mF=0$ et donc $H^r(V,F)$ est de m-torsion. Reste donc à prouver que $H^r(V,F)\{l\} \cong H^r(G_{K,S},F_{\overline{\eta}})\{l\}$ pour tout nombre premier l inversible sur V. Si $V=X$, le résultat est évident puisqu'il n'existe pas de nombre premier l inversible sur V. On supposera dans la suite que $V \neq X$.
Soit $\mathcal{O}_{K_S}$ l'ensemble des éléments x de K_S tels que, pour toute place w de K_S au-dessus d'une place dans V, $w(x) \geq 0$. Rappelons que le revêtement universel de V est Spec $\mathcal{O}_{K_S}$ et que $\pi_1(V,\overline{\eta}) = G_{K,S}$. Si l'on note f : Spec $\mathcal{O}_{K_S} \to V$, on dispose alors de la suite spectrale de Hochschild-Serre :

$$H^r(G_{K,S}, H^s(\text{Spec } \mathcal{O}_{K_S}, f^*F)) \Rightarrow H^{r+s}(V,F).$$

Afin d'exploiter cette suite spectrale, nous allons étudier le terme $H^s(\text{Spec } \mathcal{O}_{K_S}, f^*F)$ pour $s>0$. Remarquons que, comme F est localement constant sur V, f^*F est constant.

- <u>Cas $s=1$:</u>
  Grâce à la proposition 5.7.20 de [Fu11], comme f^*F est constant à tiges finies, on a :

  $$H^1(\text{Spec } \mathcal{O}_{K_S}, f^*F) = \text{Hom}(\pi_1(\text{Spec } \mathcal{O}_{K_S}, \overline{\eta}), F(\text{Spec } \mathcal{O}_{K_S})) = 0.$$

- <u>Cas $s=2$:</u>
  Soient l un nombre premier inversible sur V et n un entier naturel non nul. Étudions le groupe $H^2(\text{Spec } \mathcal{O}_{K_S}, \mathbb{Z}/l^n\mathbb{Z})$. Comme l est inversible sur V, les faisceaux $\mathbb{Z}/l^n\mathbb{Z}$ et μ_{l^n} sur Spec $\mathcal{O}_{K_S}$ sont isomorphes, d'où une suite exacte :

  $$0 \to \mathbb{Z}/l^n\mathbb{Z} \to \mathbb{G}_m \to \mathbb{G}_m \to 0.$$

  La suite exacte longue de cohomologie fournit une suite exacte courte :

  $$0 \to \text{Pic}(\text{Spec } \mathcal{O}_{K_S}) \to \text{Pic}(\text{Spec } \mathcal{O}_{K_S}) \to H^2(\text{Spec } \mathcal{O}_{K_S}, \mathbb{Z}/l^n\mathbb{Z}) \to \text{Br}(\text{Spec } \mathcal{O}_{K_S})[l^n] \to 0.$$

  Étant donné que :

  $$\text{Pic}(\text{Spec } \mathcal{O}_{K_S}) = \varinjlim_{V'} \text{Pic}(V')$$

  où V' décrit les recouvrements étales finis de V, le groupe Pic(Spec $\mathcal{O}_{K_S}$) est de torsion. Comme de plus la multiplication par l^n dans ce groupe est injective, on déduit que Pic(Spec $\mathcal{O}_{K_S})\{l\} = 0$. Par conséquent, les groupes de l^n-torsion $H^2(\text{Spec } \mathcal{O}_{K_S}, \mathbb{Z}/l^n\mathbb{Z})$ et Br(Spec $\mathcal{O}_{K_S})[l^n]$ sont isomorphes. Notons maintenant L une extension de K contenue dans K_S, contenant les racines primitives l^n-ièmes de l'unité et sans places réelles. Soit S_L l'ensemble des places de L au-dessus de places de S et S_L^f l'ensemble des places finies de S_L. Pour $w \in S_L^f$, choisissons $c_w \in \mathcal{O}_L$ tel que $w(c_w) = 1$, et posons $L' = L(c_w^{1/l^n}, w \in S_L^f)$. Soit $S_{L'}$ l'ensemble des places de L' au-dessus de places de S et $S_{L'}^f$ l'ensemble des places finies de $S_{L'}$. Comme pour chaque $w \in S_L^f$ le polynôme $X^{l^n} - c_w$ est d'Eisentein de degré l^n, on déduit que, pour toute place finie $w' \in S_{L'}^f$, on a $l^n | [L'_{w'} : L_w]$ où $w = w'|_L$. De plus, L' n'a pas de places réelles. Par conséquent, la flèche induite par les restrictions

$$\left(\bigoplus_{w \in S_L} \mathrm{Br}(L_w) \right) [l^n] \to \bigoplus_{w' \in S_{L'}} \mathrm{Br}(L'_{w'})$$

est nulle. Comme on dispose de suites exactes :

$$0 \to H^2(\mathrm{Spec}\ \mathcal{O}_{L,S_L}, \mathbb{G}_m) \to \bigoplus_{w \in S_L} \mathrm{Br}(K_v) \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \to 0,$$

$$0 \to H^2(\mathrm{Spec}\ \mathcal{O}_{L',S_{L'}}, \mathbb{G}_m) \to \bigoplus_{w' \in S_{L'}} \mathrm{Br}(L'_{w'}) \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \to 0,$$

la flèche induite par la restriction $H^2(\mathrm{Spec}\ \mathcal{O}_{L,S_L}, \mathbb{G}_m)[l^n] \to H^2(\mathrm{Spec}\ \mathcal{O}_{L',S_{L'}}, \mathbb{G}_m)$ est nulle. Cela entraîne que $\mathrm{Br}(\mathrm{Spec}\ \mathcal{O}_{K_S})[l^n] = \varinjlim_L H^2(\mathrm{Spec}\ \mathcal{O}_{L,S_L}, \mathbb{G}_m)[l^n] = 0$. Par conséquent, $H^2(\mathrm{Spec}\ \mathcal{O}_{K_S}, \mathbb{Z}/l^n\mathbb{Z}) = 0$. Ceci étant vrai pour tout n, comme f^*F est constant à tiges finies, on déduit que $H^2(\mathrm{Spec}\ \mathcal{O}_{K_S}, f^*F)\{l\} = 0$.

- <u>Cas $s > 2$:</u>
  Soient l un nombre premier inversible sur V et n un entier naturel non nul. Pour L une extension de K contenue dans K_S sans places réelles, si S_L désigne l'ensemble des places de L divisant des places dans S, on sait que $H^s(\mathrm{Spec}\ \mathcal{O}_{L,S_L}, \mathbb{G}_m) = 0$. Donc
  $$H^s(\mathrm{Spec}\ \mathcal{O}_{K_S}, \mathbb{G}_m) = \varinjlim_L H^s(\mathrm{Spec}\ \mathcal{O}_{L,S_L}, \mathbb{G}_m) = 0.$$
  La suite exacte $0 \to \mathbb{Z}/l^n\mathbb{Z} \to \mathbb{G}_m \to \mathbb{G}_m \to 0$ entraîne alors que $H^s(\mathrm{Spec}\ \mathcal{O}_{K_S}, \mathbb{Z}/l^n\mathbb{Z}) = 0$. Ceci étant vrai pour tout n, comme f^*F est constant à tiges finies, on déduit que $H^s(\mathrm{Spec}\ \mathcal{O}_{K_S}, f^*F)\{l\} = 0$.

Nous venons donc de prouver que $H^s(\mathrm{Spec}\ \mathcal{O}_{K_S}, f^*F)\{l\} = 0$ pour tout $s > 0$. La suite spectrale de Hochschild-Serre fournit alors des isomorphismes $H^r(V, F)\{l\} \cong H^r(G_{K,S}, F_{\overline{\eta}})\{l\}$. □

Lemme 2.5.2. *Soit V un ouvert non vide de U sur lequel F est localement constant et tel que $|F_{\overline{\eta}}|$ soit inversible sur V. Alors $H^r_c(V, F) = 0$ pour $r \geq 4$.*

Démonstration. Notons comme avant $S = X \setminus V$. On dispose de la suite exacte longue :

$$... \to H^r_c(V, F) \to H^r(V, F) \to \bigoplus_{v \notin V} H^r(K_v, F_{\overline{\eta}}) \to ...$$

À travers l'isomorphisme $H^r(V,F) \cong H^r(G_{K,S}, F_{\overline{\eta}})$ du lemme précédent, l'application $H^r(V,F) \to \bigoplus_{v \text{ réelle}} H^r(K_v, F_{\overline{\eta}})$ s'identifie avec l'application naturelle $H^r(G_{K,S}, F_{\overline{\eta}}) \to \bigoplus_{v \text{ réelle}} H^r(K_v, F_{\overline{\eta}})$, qui est un isomorphisme pour $r \geq 4$ et qui est surjective pour $r = 3$ d'après les résultats de cohomologie galoisienne, puisque toutes les places de K divisant $|F_{\overline{\eta}}|$ sont contenues dans S. On déduit alors que $H^r_c(V,F) = 0$ pour $r \geq 4$. □

Proposition 2.5.3. *On a* $H^r_c(U,F) = 0$ *pour* $r \geq 4$.

Démonstration. Par définition, comme F est constructible, on peut trouver V un ouvert non vide de U tel que F est localement constant sur V et $|F_{\overline{\eta}}|$ est inversible sur V. On a alors une suite exacte longue de cohomologie à support compact associée à l'immersion ouverte $V \hookrightarrow U$:

$$... \to \bigoplus_{v \in U \setminus V} H^{r-1}(k(v), F_{\overline{v}}) \to H^r_c(V,F) \to H^r_c(U,F) \to \bigoplus_{v \in U \setminus V} H^r(k(v), F_{\overline{v}}) \to ...$$

Or, comme $k(v)$ est un corps fini et donc de dimension cohomologique au plus 1, on a $H^r(k(v), F_{\overline{v}}) = 0$ pour $r \geq 2$. On en déduit que le morphisme $H^r_c(V,F) \to H^r_c(U,F)$ est un isomorphisme dès que $r \geq 3$. Le lemme précédent impose que $H^r_c(V,F) = 0$ pour $r \geq 4$, d'où le résultat. □

2.6 Étape 5 : Annulation du groupe $\mathrm{Ext}^r_U(F, \mathbb{G}_m)$ pour r assez grand lorsque K n'a pas de places réelles

Nous allons montrer que $\mathrm{Ext}^r_U(F, \mathbb{G}_m)$ est nul pour $r > 3$ lorsque K n'a pas de places réelles. Cela permettra de prouver le théorème d'Artin-Verdier pour $r > 3$, du moins sous ces hypothèses. Il ne restera plus qu'à montrer le théorème pour $r = 0, 1, 2, 3$.

Lemme 2.6.1. *Soit* V *un ouvert non vide de* U *sur lequel* F *est localement constant (et constructible) et* $|F_{\overline{\eta}}|$ *est inversible. Le faisceau* $\underline{\mathrm{Ext}}^r_V(F, \mathbb{G}_m)$ *est de torsion pour* $r = 0$ *et nul pour* $r \geq 1$.

Démonstration. Calculons les tiges de $\underline{\mathrm{Ext}}^r_V(F, \mathbb{G}_m)$:

- en $\overline{\eta}$, $\underline{\mathrm{Ext}}^r_V(F, \mathbb{G}_m)_{\overline{\eta}} = \mathrm{Ext}^r(F_{\overline{\eta}}, K^{s\times})$. Ce groupe est de $|F_{\overline{\eta}}|$-torsion pour $r = 0$, et il est nul pour $r \geq 1$ puisque $K^{s\times}$ est un groupe abélien injectif.
- en $\overline{v}$ pour $v \in V$ différent de η, $\underline{\mathrm{Ext}}^r_V(F, \mathbb{G}_m)_{\overline{v}} = \mathrm{Ext}^r_{\mathbb{Z}}(F_{\overline{v}}, \mathcal{O}_v^{nr\times})$. Comme avant, ce groupe est de $|F_{\overline{\eta}}|$-torsion pour $r = 0$, et il est nul pour $r \geq 1$ puisque $\mathcal{O}_v^{nr\times}$ est un groupe sur lequel la multiplication par $|F_{\overline{\eta}}|$ est surjective.

Le lemme en découle immédiatement. □

Lemme 2.6.2. *Supposons que K n'ait pas de places réelles. Soit V un ouvert non vide de U sur lequel F est localement constant (et constructible) et $|F_{\overline{\eta}}|$ est inversible. Alors $Ext^r_V(F, \mathbb{G}_m) = 0$ pour $r \geq 4$.*

Démonstration. Nous disposons de la suite spectrale des Ext :

$$H^r(V, \underline{\mathrm{Ext}}^s_V(F, \mathbb{G}_m)) \Rightarrow \mathrm{Ext}^{r+s}_V(F, \mathbb{G}_m).$$

Le lemme précédent impose que les morphismes de bord $H^r(V, \underline{\mathrm{Hom}}_V(F, \mathbb{G}_m)) \to \mathrm{Ext}^r_V(F, \mathbb{G}_m)$ sont des isomorphismes pour tout r. Par conséquent, il suffit de prouver que $H^r(V, \underline{\mathrm{Hom}}_V(F, \mathbb{G}_m)) = 0$ pour $r \geq 4$.
Le faisceau $\underline{\mathrm{Hom}}_V(F, \mathbb{G}_m)$ étant de torsion, il est limite inductive filtrée de faisceaux constructibles. Comme V est quasi-compact et quasi-séparé, les foncteurs $H^r(V, -)$ commutent avec les limites inductives. De plus, comme K n'a pas de places réelles, $H^r_c(V, -) \cong H^r(V, -)$ pour $r \geq 4$. L'étape 4 impose donc que $H^r(V, \underline{\mathrm{Hom}}_V(F, \mathbb{G}_m)) = 0$ pour $r \geq 4$. □

Proposition 2.6.3. *Supposons que K n'ait pas de places réelles. Pour $r \geq 4$, on a $Ext^r_U(F, \mathbb{G}_m) = 0$.*

Démonstration. Soit V un ouvert non vide de U sur lequel F est localement constant et $|F_{\overline{\eta}}|$ est inversible. Notons $j : V \hookrightarrow U$ et $i : U \setminus V \hookrightarrow U$. On a alors la suite exacte de faisceaux sur U :

$$0 \to j_! j^* F \to F \to i_* i^* F \to 0.$$

D'où une suite exacte longue :

$$... \to \mathrm{Ext}^r_U(i_* i^* F, \mathbb{G}_m) \to \mathrm{Ext}^r_U(F, \mathbb{G}_m) \to \mathrm{Ext}^r_U(j_! j^* F, \mathbb{G}_m) \to ...$$

Le lemme 2.3.1 impose que

$$\mathrm{Ext}^r_U(i_* i^* F, \mathbb{G}_m) \cong \bigoplus_{v \in U \setminus V} \mathrm{Ext}^{r-1}_{\mathrm{Gal}(k(v)^s/k(v))}(F_{\overline{v}}, \mathbb{Z}).$$

Pour chaque $v \in U \setminus V$, le théorème de dualité pour la formation de classes $(\mathrm{Gal}(k(v)^s/k(v)), \mathbb{Z})$ entraîne alors que $\mathrm{Ext}^{r-1}_{\mathrm{Gal}(k(v)^s/k(v))}(F_{\overline{v}}, \mathbb{Z}) \cong (H^{3-r}(k(v), F_{\overline{v}}))^*$. Ce groupe est nul dès que $r \geq 4$.
D'autre part, comme j^* est un foncteur exact préservant les injectifs, $\mathrm{Ext}^r_U(j_! j^* F, \mathbb{G}_m) \cong \mathrm{Ext}^r_V(j^* F, \mathbb{G}_m)$, groupe qui est nul pour $r \geq 4$ d'après le lemme précédent.
Ainsi, pour $r \geq 4$, $\mathrm{Ext}^r_U(i_* i^* F, \mathbb{G}_m)$ et $\mathrm{Ext}^r_U(j_! j^* F, \mathbb{G}_m)$ sont nuls, donc $\mathrm{Ext}^r_U(F, \mathbb{G}_m)$ l'est aussi. □

2.7 Étape 6 : Décomposition de F

Nous allons voir que F s'injecte dans une somme directe de deux faisceaux. L'un des deux faisceaux sera à support dans un fermé strict : d'après l'étape 2, nous savons qu'un tel faisceau vérifie le théorème d'Artin-Verdier. L'autre faisceau est obtenu à partir d'un faisceau constant sur une normalisation d'un ouvert V de U : nous verrons comment traiter un tel faisceau à l'étape suivante.

Proposition 2.7.1. *Soit V un ouvert non vide de U tel que $F|_V$ est localement constant. Soit L une extension finie de K telle que la normalisation $\pi_V : V_n \to V$ de V dans L est étale et $F|_{V_n}$ est constant. Soit $\pi_U : U_n \to U$ la normalisation de U dans L. Soit $m > 0$ tel que $mF = 0$. Il existe alors un faisceau F_n constructible constant sur U_n de m-torsion, un faisceau F_f constructible sur U à support fini et un morphisme injectif $F \hookrightarrow \pi_{U*}F_n \oplus F_f$.*

Démonstration. On choisit pour F_n le faisceau constant sur U_n défini par le groupe abélien fini $F(V_n)$. Nous disposons alors d'un morphisme d'adjonction injectif $F|_V \hookrightarrow \pi_{V*}\pi_V^*(F|_V) = \pi_{V*}(F_n|_{V_n})$. Ce morphisme s'étend en un morphisme $F \to \pi_{U*}F_n$. Le support du noyau de ce morphisme est contenu dans $U \setminus V$. Il suffit donc de trouver un faisceau F_f constructible sur U à support dans $U \setminus V$ et un morphisme $F \to F_f$ tel que le support du noyau soit contenu dans V. Si l'on note $i : U \setminus V \hookrightarrow U$, on choisit $F_f = i_*i^*F$, le morphisme $F \to F_f$ étant le morphisme d'adjonction. □

2.8 Étape 7 : Comportement vis-à-vis de la normalisation

Nous allons maintenant étudier le comportement du morphisme α^r vis-à-vis de la normalisation, d'une part pour savoir traiter le faisceau $\pi_{U*}F_n$ de l'étape précédente (voir étape 9), d'autre part pour savoir comment passer de K à une extension de K et pouvoir alors supposer que K n'a pas de places réelles (voir étape 8).

Soit L une extension finie galoisienne de K. Soit U_n la normalisation de U dans L et notons $\pi : U_n \to U$. Afin de passer de U à U_n, il convient de définir une application norme $\pi_*\mathbb{G}_m \to \mathbb{G}_m$.

Pour ce faire, pour tout schéma Y, on note Y_{et} le site étale de Y et Y_{fet} le site étale restreint de Y (défini dans l'introduction de ce mémoire). On rappelle que, d'après la proposition II.1.5.2 de [Tam94], nous disposons d'un morphisme de topologies $\iota : Y_{fet} \to Y_{et}$ qui induit une équivalence de catégories ι_* des faisceaux sur Y_{et} vers les faisceaux sur Y_{fet}. De plus, ι^* est un quasi-inverse de ι_*.

Soit $V \to U$ un morphisme étale de type fini. D'après I.3.21 de [Mil80], comme U est un schéma normal, V est un ouvert de la normalisation de U dans une K-algèbre finie séparable A. Comme $V \to U$ est étale, le morphisme $V \times_U U_n \to U_n$ est aussi étale. Le schéma U_n étant normal, $V \times_U U_n$ est aussi normal. De plus,

comme $U_n \to U$ est fini, $V \times_U U_n \to V$ est aussi fini. On déduit que $V \times_U U_n$ est la normalisation de V dans la L-algèbre $L \otimes_K A$.
Nous disposons de l'application norme usuelle $L \otimes_K A \to A$, qui se restreint en une application $\pi_*\mathbb{G}_m(V) = \mathbb{G}_m(V \times_U U_n) \to \mathbb{G}_m(V)$. Cela définit un morphisme norme $N^{fet}_{U_n/U} : \pi_*\mathbb{G}_m \to \mathbb{G}_m$ de faisceaux sur le site étale restreint U_{fet}, d'où aussi un morphisme norme $N_{U_n/U} = \iota^* N^{fet}_{U_n/U} : \pi_*\mathbb{G}_m \to \mathbb{G}_m$ de faisceaux sur le site étale U_{et}.

Lemme 2.8.1. *Soit $\mathcal{F}_n$ un faisceau constructible sur U_n. Pour tout $r \in \mathbb{Z}$, la composée*

$$N^r(\mathcal{F}_n) : Ext^r_{U_n}(\mathcal{F}_n, \mathbb{G}_m) \to Ext^r_U(\pi_*\mathcal{F}_n, \pi_*\mathbb{G}_m) \to Ext^r_U(\pi_*\mathcal{F}_n, \mathbb{G}_m),$$

où le premier morphisme est induit par le foncteur exact π_* et le second par la norme $N_{U_n/U}$, est un isomorphisme.

Démonstration. Soit V_n le plus grand ouvert de U_n sur lequel la restriction de π est étale, et notons $j_n : V_n \hookrightarrow U_n$ l'immersion ouverte et $i_n : Z_n = U_n \setminus V_n \hookrightarrow U_n$ l'immersion fermée. Nous allons montrer que $N^r(j_{n!}j_n^*\mathcal{F}_n)$ et $N^r(i_{n*}i_n^*\mathcal{F}_n)$ sont des isomorphismes, ce qui impliquera que $N^r(\mathcal{F}_n)$ est un isomorphisme grâce à la suite exacte $0 \to j_{n!}j_n^*\mathcal{F}_n \to \mathcal{F}_n \to i_{n*}i_n^*\mathcal{F}_n \to 0$.

- D'une part, comme $\pi \circ j_n$ est étale, le foncteur $(\pi \circ j_n)^*$ est exact, préserve les faisceaux injectifs et admet $(\pi \circ j_n)_! = \pi_* j_{n!}$ pour adjoint à gauche. Par conséquent, on dispose d'isomorphismes :

$$\begin{aligned}\mathrm{Ext}^r_{V_n}(j_n^*\mathcal{F}_n, \mathbb{G}_m) &= \mathrm{Ext}^r_{V_n}(j_n^*\mathcal{F}_n, (\pi \circ j_n)^*\mathbb{G}_m)) \\ &\cong \mathrm{Ext}^r_U(\pi_* j_{n!}j_n^*\mathcal{F}_n, \mathbb{G}_m).\end{aligned}$$

  Or, comme j_n^* est exact et préserve les injectifs,

$$\mathrm{Ext}^r_{U_n}(j_{n!}j_n^*\mathcal{F}_n, \mathbb{G}_m) \cong \mathrm{Ext}^r_{V_n}(j_n^*\mathcal{F}_n, \mathbb{G}_m),$$

  d'où un isomorphisme $\mathrm{Ext}^r_{U_n}(j_{n!}j_n^*\mathcal{F}_n, \mathbb{G}_m) \cong \mathrm{Ext}^r_U(\pi_* j_{n!}j_n^*\mathcal{F}_n, \mathbb{G}_m)$. Cela impose immédiatement que $N^r(j_{n!}j_n^*\mathcal{F}_n)$ est un isomorphisme.
- D'autre part, étant donné le choix de V_n, si l'on note $Z = \pi(Z_n)$, on remarque que $Z_n = \pi^{-1}(Z) = Z \times_U U_n$, et donc on dispose d'un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} Z_n & \xrightarrow{i_n} & U_n \\ \downarrow{\scriptstyle \pi_Z} & & \downarrow{\scriptstyle \pi} \\ Z & \xrightarrow{i} & U \end{array}$$

  Ainsi, en utilisant le lemme 2.3.1 et en tenant compte du fait que π_Z est fini étale :

$$\mathrm{Ext}^r_{U_n}(i_{n*}i_n^*\mathcal{F}_n, \mathbb{G}_m) \cong \mathrm{Ext}^{r-1}_{Z_n}(i_n^*\mathcal{F}_n, \mathbb{Z}) \cong \mathrm{Ext}^{r-1}_{Z_n}(i_n^*\mathcal{F}_n, \pi_Z^*\mathbb{Z}),$$

$$\mathrm{Ext}^r_U(\pi_* i_{n*} i_n^* \mathcal{F}_n, \mathbb{G}_m) \cong \mathrm{Ext}^{r-1}_Z(\pi_{Z*} i_n^* \mathcal{F}_n, \mathbb{Z}) \cong \mathrm{Ext}^{r-1}_Z(\pi_{Z!} i_n^* \mathcal{F}_n, \mathbb{Z}).$$

Vu à travers ces isomorphismes, $N^r(i_{n*}i_n^*\mathcal{F}_n)$ devient le morphisme de bord

$$\mathrm{Ext}^{r-1}_{Z_n}(i_n^*\mathcal{F}_n, \pi_Z^*\mathbb{Z}) \to \mathrm{Ext}^{r-1}_Z(\pi_{Z!} i_n^* \mathcal{F}_n, \mathbb{Z})$$

de la suite spectrale $\mathrm{Ext}^r_{Z_n}(i_n^*\mathcal{F}_n, R^s\pi_Z^*\mathbb{Z}) \Rightarrow \mathrm{Ext}^{r+s}_Z(\pi_{Z!} i_n^* \mathcal{F}_n, \mathbb{Z})$. Mais comme π_Z est fini, le morphisme de bord précédent est un isomorphisme, et donc $N^r(i_{n*}i_n^*\mathcal{F}_n)$ est un isomorphisme.

- Finalement, comme on a une suite exacte :

$$0 \to j_n!{j_n}^*\mathcal{F}_n \to \mathcal{F}_n \to i_{n*}{i_n}^*\mathcal{F}_n \to 0$$

et comme $N^r(j_{n!}{j_n}^*\mathcal{F}_n)$ et $N^r(i_{n*}{i_n}^*\mathcal{F}_n)$ sont des isomorphismes pour tout $r \in \mathbb{Z}$, le lemme des cinq impose que $N^r(\mathcal{F}_n)$ est un isomorphisme pour tout $r \in \mathbb{Z}$.

□

Proposition 2.8.2. *Soient $\mathcal{F}_n$ un faisceau constructible sur U_n et $r \in \mathbb{Z}$. Alors $\alpha^r(U_n, \mathcal{F}_n)$ est un isomorphisme si, et seulement si, $\alpha^r(U, \pi_*\mathcal{F}_n)$ est un isomorphisme.*

Démonstration. Supposons que $U \neq X$. Comme π est fini, on dispose d'un isomorphisme $H^3_c(U, \pi_*\mathbb{G}_m) \to H^3_c(U_n, \mathbb{G}_m)$. Notons $\mathrm{Nm}_{U_n/U}$ la composée :

$$H^3_c(U_n, \mathbb{G}_m) \to H^3_c(U, \pi_*\mathbb{G}_m) \to H^3_c(U, \mathbb{G}_m)$$

le deuxième morphisme étant induit par $N_{U_n/U}$. Ce morphisme s'insère dans un diagramme cubique :

$$\begin{tikzcd}
& \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \arrow[rr, equal] \arrow[dd, equal] & & \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \arrow[dd, equal] \\
\bigoplus_{w\in\Omega_L\setminus U_n} \mathrm{Br}(L_w) \arrow[ur] \arrow[rr, two heads] \arrow[dd, "\text{Cores}"] & & H^3_c(U_n, \mathbb{G}_m) \arrow[ur] \arrow[dd] & \\
& \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \arrow[rr, equal] & & \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \\
\bigoplus_{v\in\Omega_K\setminus U} \mathrm{Br}(K_v) \arrow[ur] \arrow[rr, two heads] & & H^3_c(U, \mathbb{G}_m) \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

où toutes les faces du cube, à l'exception de la face droite, sont commutatives. Cela entraîne que la face droite est aussi commutative. On en déduit un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Ext}^r_{U_n}(\mathcal{F}_n, \mathbb{G}_m) \arrow[d, "\cong"', "N^r(\mathcal{F}_n)"] & \times & H^{3-r}_c(U_n, \mathcal{F}_n) \arrow[r] & H^3_c(U_n, \mathbb{G}_m) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"', "\mathrm{Nm}_{U_n/U}"] & \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \arrow[d, equal] \\
\mathrm{Ext}^r_U(\pi_*\mathcal{F}_n, \mathbb{G}_m) & \times & H^{3-r}_c(U, \pi_*\mathcal{F}_n) \arrow[r] \arrow[u, "\cong"'] & H^3_c(U, \mathbb{G}_m) \arrow[r] & \mathbb{Q}/\mathbb{Z}
\end{tikzcd}$$

et donc $\alpha^r(U_n, \mathcal{F}_n)$ est un isomorphisme si, et seulement si, $\alpha^r(U, \pi_* \mathcal{F}_n)$ est un isomorphisme.
Si $U = X$, on choisit U' un ouvert strict de X. On a alors un diagramme cubique :

$$\begin{tikzcd}
 & \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \arrow[rr, equal] \arrow[dd, equal] & & \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \arrow[dd, equal] \\
H^3_c(U'_n, \mathbb{G}_m) \arrow[ur] \arrow[rr, "\cong"] \arrow[dd, "\mathrm{Nm}_{U'_n/U'}"] & & H^3_c(U_n, \mathbb{G}_m) \arrow[ur] \arrow[dd] & \\
 & \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \arrow[rr, equal] & & \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \\
H^3_c(U', \mathbb{G}_m) \arrow[ur] \arrow[rr, "\cong"] & & H^3_c(U, \mathbb{G}_m) \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

où toutes les faces, à l'exception de la face droite, sont commutatives. On en déduit la commutativité de la face droite. Il est maintenant possible de conclure exactement de la même manière que sous l'hypothèse $U \neq X$.

□

2.9 Étape 8 : Réduction au cas où K n'a pas de places réelles et où $U = X$

Nous utilisons maintenant l'étape précédente pour nous ramener au cas où K n'a pas de places réelles et où $U = X$.

Proposition 2.9.1. *Supposons que, pour tout corps de nombres K sans places réelles, pour tout faisceau constructible $\mathcal{F}$ sur X, pour tout r, $\alpha^r(X, \mathcal{F})$ est un isomorphisme. Alors, pour tout corps de nombres K, pour tout ouvert non vide V de X, pour tout faisceau constructible $\mathcal{F}$ sur V, pour tout r, $\alpha^r(V, \mathcal{F})$ est un isomorphisme.*

Démonstration. On montre par récurrence sur r la propriété suivante :

(P_r) Pour tout corps de nombres K, pour tout ouvert non vide W de X ne contenant aucune place divisant 2, pour tout faisceau constructible localement constant $\mathcal{F}$ sur W, $\alpha^r(W, \mathcal{F})$ est un isomorphisme.

D'après l'étape 4, la propriété (P_r) est vraie pour $r < 0$.
Soit $r_0 \geq 0$ et supposons la propriété (P_r) vraie pour $r < r_0$. Soient K un corps de nombres quelconque, W un ouvert non vide de X ne contenant aucune place divisant 2 et $\mathcal{F}$ un faisceau constructible localement constant sur W. Soit L une extension finie galoisienne de K non ramifiée en dehors de W telle que la restriction de $\mathcal{F}$ à la normalisation de W dans L soit un faisceau constant. Soit W_n la

normalisation de W dans le corps $L(i)$. Comme W ne contient pas d'idéaux de $\mathcal{O}_K$ divisant 2, le morphisme $\pi : W_n \to W$ est un morphisme fini étale galoisien de W de groupe $G = \mathrm{Gal}(L(i)/K)$.
Comme $\mathcal{F}(Y) = \mathcal{F}(Y \times_W W_n)^G = (\pi_* \pi^* \mathcal{F}(Y))^G$ pour Y étale sur W (voir la proposition II.1.4 de [Mil80]), nous pouvons définir un morphisme de faisceaux tr : $\pi_*\pi^*\mathcal{F} \to \mathcal{F}$ par $\pi_*\pi^*\mathcal{F}(Y) \to \mathcal{F}(Y), x \mapsto \sum_{\sigma \in G} \sigma x$. Au niveau des tiges, ce morphisme induit $\mathcal{F}_{\overline{w}}^{\mathrm{Gal}(L(i)/K)} \to \mathcal{F}_{\overline{w}}, (x_\sigma)_{\sigma \in \mathrm{Gal}(L(i)/K)} \mapsto \sum_{\sigma \in \mathrm{Gal}(L(i)/K)} x_\sigma$. Donc tr est surjectif. Notons $\mathcal{F}_0 = \pi_*\pi^*\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}_1$ le noyau de la trace. Nous disposons alors d'un diagramme commutatif à lignes exactes :

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Ext}^{r_0-1}_W(\mathcal{F}_0,\mathbb{G}_m) \arrow[r] \arrow[d, "\alpha^{r_0-1}(W,\mathcal{F}_0)"'] & \mathrm{Ext}^{r_0-1}_W(\mathcal{F}_1,\mathbb{G}_m) \arrow[r] \arrow[d, "\alpha^{r_0-1}(W,\mathcal{F}_1)"'] & \mathrm{Ext}^{r_0}_W(\mathcal{F},\mathbb{G}_m) \arrow[r] \arrow[d, "\alpha^{r_0}(W,\mathcal{F})"'] & \mathrm{Ext}^{r_0}_W(\mathcal{F}_0,\mathbb{G}_m) \arrow[r] \arrow[d, "\alpha^{r_0}(W,\mathcal{F}_0)"'] & \mathrm{Ext}^{r_0}_W(\mathcal{F}_1,\mathbb{G}_m) \arrow[d, "\alpha^{r_0}(W,\mathcal{F}_1)"'] \\
H^{4-r_0}_c(W,\mathcal{F}_0)^* \arrow[r] & H^{4-r_0}_c(W,\mathcal{F}_1)^* \arrow[r] & H^{3-r_0}_c(W,\mathcal{F})^* \arrow[r] & H^{3-r_0}_c(W,\mathcal{F}_0)^* \arrow[r] & H^{3-r_0}_c(W,\mathcal{F}_1)^*
\end{tikzcd}$$

Or, si l'on note X_n la normalisation de X dans $L(i)$, on a des équivalences :

$$\begin{aligned}
\alpha^{r_0}(W,\mathcal{F}_0) \text{ est un isomorphisme} &\Leftrightarrow \alpha^{r_0}(W_n,\mathcal{F}|_{W_n}) \text{ est un isomorphisme (étape 7)} \\
&\Leftrightarrow \alpha^{r_0}(X_n,\mathcal{F}(W_n)) \text{ est un isomorphisme} \\
&\qquad \text{(étape 3 car } \mathcal{F}|_{W_n} \text{ est constant)}
\end{aligned}$$

Mais cette dernière assertion est vraie par hypothèse puisque $L(i)$ n'a pas de places réelles. Donc $\alpha^{r_0}(W,\mathcal{F}_0)$ est un isomorphisme. De même, $\alpha^{r_0-1}(W,\mathcal{F}_0)$ est aussi un isomorphisme. De plus, par hypothèse de récurrence, comme $\mathcal{F}_1$ est constructible localement constant sur W, $\alpha^{r_0-1}(W,\mathcal{F}_1)$ est un isomorphisme. Donc $\alpha^{r_0}(W,\mathcal{F})$ est injectif. Cela étant vrai pour tout faisceau constructible localement constant $\mathcal{F}$, le morphisme $\alpha^{r_0}(W,\mathcal{F}_1)$ est aussi injectif. Le lemme des cinq permet alors de montrer que $\alpha^{r_0}(V,\mathcal{F})$ est un isomorphisme. La propriété (P_{r_0}) est donc vraie. Nous avons ainsi prouvé la propriété (P_r) pour tout r.
Considérons maintenant un corps de nombres K, un ouvert non vide V de X et un faisceau constructible $\mathcal{F}$ sur V. Soit W un ouvert non vide de V ne contenant aucune place divisant 2 et sur lequel $\mathcal{F}$ est localement constant. Alors $\alpha^r(W,\mathcal{F}|_W)$ est un isomorphisme pour tout r, et donc l'étape 3 permet de conclure que $\alpha^r(V,\mathcal{F})$ est un isomorphisme pour tour r. □

Remarque 2.9.2. • Remarquons que, dans la preuve précédente, pour initialiser la récurrence, il est indispensable d'avoir prouvé l'annulation de $H^r_c(V,\mathcal{F})$ pour $r \geq 4$ même lorsque le corps K a des places réelles. Cela explique pourquoi, dans la section 4, nous n'avons pas supposé que K n'avait pas de places réelles.

• En fait, nous avons prouvé un résultat plus fort que celui énoncé dans la proposition : si pour tout corps de nombres K sans places réelles, pour tout faisceau constant $\mathcal{F}$ sur X, pour tout r, $\alpha^r(X,\mathcal{F})$ est un isomorphisme, alors, pour tout corps de nombres K, pour tout ouvert non vide V de X, pour tout faisceau constructible $\mathcal{F}$ sur V, pour tout r, $\alpha^r(V,\mathcal{F})$ est un isomorphisme.

- On ne peut pas prouver la proposition elle-même par récurrence (c'est la propriété (P_r) que nous avons prouvée par récurrence) parce que l'étape 3 ne dit pas que, si $\alpha^r(W, \mathcal{F}|_W)$ est un isomorphisme pour un certain r, alors $\alpha^r(V, \mathcal{F})$ est un isomorphisme pour la même valeur de r.

2.10 Étape 9 : Propriété d'hérédité

Cette étape est la clé de voûte de la preuve du théorème d'Artin-Verdier : grâce à l'étape 8, on se place dans le cas où K n'a pas de places réelles et où $V = X$, puis on utilise la décomposition de l'étape 6 ainsi que l'étude de l'étape 7 pour montrer que si le théorème d'Artin-Verdier est vrai pour $r < r_0$, alors sous certaines conditions il est aussi vrai pour $r = r_0$. Cela permettra de raisonner par récurrence.

Lemme 2.10.1. *Soit $\mathcal{F}$ un faisceau de torsion sur X (pas nécessairement constructible). Alors les sous-faisceaux constructibles de $\mathcal{F}$ forment un système inductif filtrant et $\mathcal{F}$ en est la limite inductive.*

Démonstration. Le fait que les sous-faisceaux constructibles de $\mathcal{F}$ forment un système inductif filtrant est évident puisque, si $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$ sont deux tels sous-faisceaux, l'image de $\mathcal{F}_1 \oplus \mathcal{F}_2 \to \mathcal{F}$ est encore un sous-faisceau constructible de $\mathcal{F}$. On note $(\mathcal{F}_i)_i$ la famille de ces sous-faisceaux.
Nous disposons alors d'un morphisme canonique injectif $\varinjlim_i \mathcal{F}_i \to \mathcal{F}$. Soit $f : V \to X$ un morphisme étale tel que V est affine. Soit $s \in \mathcal{F}(V)$. Comme $\mathcal{F}$ est de torsion et X est quasi-compact, $\mathcal{F}(V)$ est de torsion. Fixons donc $n > 0$ tel que $ns = 0$. Il existe alors un morphisme $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to f^*\mathcal{F}$ qui envoit 1 sur s. Par adjonction, cela induit un morphisme de faisceaux $f_!(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \to \mathcal{F}$ dont l'image contient s. De plus, l'image de ce morphisme de faisceaux est un sous-faisceau constructible de $\mathcal{F}$, puisque $f_!(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ est constructible. On en déduit que $\varinjlim_i \mathcal{F}_i \to \mathcal{F}$ est surjective. $\square$

Lemme 2.10.2. *Soit $\mathcal{F}$ un faisceau constructible sur X. Alors il existe un morphisme injectif $\mathcal{F} \hookrightarrow \mathcal{I}$ où $\mathcal{I}$ est un faisceau flasque de torsion.*

Démonstration. Soit P un ensemble de points géométriques tels que, pour tout $v \in X$, il existe un unique élément de P d'image v. Posons $\mathcal{I} = \prod_{u \in P}, u_* u^* \mathcal{F}$. Par adjonction, on dispose alors d'un morphisme injectif canonique $\mathcal{F} \hookrightarrow \mathcal{I}$. De plus, pour $u \in P$, comme $u^*\mathcal{F}$ est flasque, $u_* u^* \mathcal{F}$ est flasque. On en déduit immédiatement que $\mathcal{I}$ est flasque. Finalement, $\mathcal{F}$ étant constructible, il existe $m > 0$ tel que $m\mathcal{F} = 0$, et alors $\mathcal{I}$ est de m-torsion. $\square$

Remarque 2.10.3. Le faisceau $\mathcal{I}$ que nous venons de construire n'est autre que le premier faisceau de la résolution de Godement de $\mathcal{F}$ par des faisceaux flasques. On l'appelle parfois le faisceau induit de $\mathcal{F}$.

Proposition 2.10.4. *Soit $r_0 \leq 3$ un entier. Supposons que $\alpha^r(X,\mathcal{F})$ soit un isomorphisme pour tout corps de nombres K sans places réelles, pour tout faisceau constructible $\mathcal{F}$ sur X et pour tout $r > r_0$.*

(i) Supposons $r_0 \neq 3$. Pour tout corps de nombres K sans places réelles et pour tout faisceau constructible $\mathcal{F}$ sur X, le morphisme $\alpha^{r_0}(X,\mathcal{F})$ est surjectif.

(ii) On ne suppose plus que $r_0 \neq 3$. On suppose par contre que pour tout corps de nombres K sans places réelles et pour tout $m > 0$ tel que K contient toutes les racines m-ièmes de l'unité, $\alpha^{r_0}(X,\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})$ est un isomorphisme. Alors pour tout corps de nombres K sans places réelles et pour tout faisceau constructible $\mathcal{F}$ sur X, le morphisme $\alpha^{r_0}(X,\mathcal{F})$ est un isomorphisme.

Démonstration. (i) Soient K un corps de nombres sans places réelles et $\mathcal{F}$ un faisceau constructible sur X. Comme K n'a pas de places réelles, les foncteurs $H^r(X,-)$ et $H^r_c(X,-)$ sont isomorphes. Fixons $c \in H^{3-r_0}(X,\mathcal{F})$. À l'aide du lemme précédent, nous pouvons trouver un faisceau flasque de torsion $\mathcal{I}$ et une injection $\mathcal{F} \hookrightarrow \mathcal{I}$. On sait que $\mathcal{I}$ est la limite inductive de ses sous-faisceaux constructibles (parmi lesquels se trouve $\mathcal{F}$). Par conséquent, comme $H^{3-r_0}(X,-)$ commute avec les limites inductives et comme $H^{3-r_0}(X,\mathcal{I}) = 0$, il existe un sous-faisceau $\mathcal{F}_0$ de $\mathcal{I}$ contenant $\mathcal{F}$ et tel que l'image de c dans $H^{3-r_0}(X,\mathcal{F}_0)$ est nulle. Soit $\mathcal{F}_1$ le conoyau de l'injection $\mathcal{F} \hookrightarrow \mathcal{F}_0$. Nous obtenons alors un diagramme commutatif à lignes exactes :

$$\begin{tikzcd}
(\mathrm{Ext}^{r_0+1}_X(\mathcal{F}_0,\mathbb{G}_m))^* \arrow[r] & (\mathrm{Ext}^{r_0+1}_X(\mathcal{F}_1,\mathbb{G}_m))^* \arrow[r] & (\mathrm{Ext}^{r_0}_X(\mathcal{F},\mathbb{G}_m))^* \arrow[r] & (\mathrm{Ext}^{r_0}_X(\mathcal{F}_0,\mathbb{G}_m))^* \\
H^{2-r_0}(X,\mathcal{F}_0) \arrow[r] \arrow[u, "\cong"', "(\alpha^{r_0+1}(X,\mathcal{F}_0))^*"] & H^{2-r_0}(X,\mathcal{F}_1) \arrow[r] \arrow[u, "\cong"', "(\alpha^{r_0+1}(X,\mathcal{F}_1))^*"] & H^{3-r_0}(X,\mathcal{F}) \arrow[r] \arrow[u, "(\alpha^{r_0}(X,\mathcal{F}))^*"] & H^{3-r_0}(X,\mathcal{F}_0) \arrow[u, "(\alpha^{r_0}(X,\mathcal{F}_0))^*"]
\end{tikzcd}$$

Ainsi, si $(\alpha^{r_0}(X,\mathcal{F}))^*(c) = 0$, alors $c = 0$. On en déduit que $(\alpha^{r_0}(X,\mathcal{F}))^*$ est injectif, d'où le résultat.

(ii) On reprend les mêmes notations qu'au début de (i). Soit $m > 0$ tel que $m\mathcal{F} = 0$. Comme $\mathcal{F}$ est constructible, on peut trouver un ouvert non vide V de X sur lequel m est inversible et un recouvrement étale fini connexe $V_n \to V$ tel que $\mathcal{F}|_{V_n}$ est constant. On remarque alors que V_n est la normalisation de V dans une extension finie L de K. Notons $\pi_X : X_n \to X$ la normalisation de X dans L. D'après l'étape 6, il existe alors un faisceau $\mathcal{F}_n$ constructible constant sur X_n de m-torsion, un faisceau $\mathcal{F}_f$ constructible sur X à support fini et un morphisme injectif $\mathcal{F} \hookrightarrow \pi_{X*}\mathcal{F}_n \oplus \mathcal{F}_f$. On note $\mathcal{F}_0 = \pi_{X*}\mathcal{F}_n \oplus \mathcal{F}_f$. D'après l'étape 2, on sait que $\alpha^r(X,\mathcal{F}_f)$ est un isomorphisme pour tout r. De plus, comme par hypothèse $\alpha^{r_0}(X_n,\mathbb{Z}/m'\mathbb{Z})$ est un isomorphisme pour $m'|m$, il en est de même de $\alpha^{r_0}(X_n,\mathcal{F}_n)$: l'étape 7 entraîne alors que $\alpha^{r_0}(X,\pi_{X*}\mathcal{F}_n)$ est un isomorphisme. Par conséquent, $\alpha^{r_0}(X,\mathcal{F}_0)$ est un isomorphisme.

Notons $\mathcal{F}_1$ le conoyau de l'injection $\mathcal{F} \hookrightarrow \mathcal{F}_0$. Nous obtenons alors un diagramme commutatif à lignes exactes :

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Ext}_X^{r_0+1}(\mathcal{F}_0,\mathbb{G}_m) \arrow[d, "\alpha^{r_0+1}(X,\mathcal{F}_0)"', "\cong"] & \mathrm{Ext}_X^{r_0+1}(\mathcal{F}_1,\mathbb{G}_m) \arrow[l] \arrow[d, "\alpha^{r_0+1}(X,\mathcal{F}_1)"', "\cong"] & \mathrm{Ext}_X^{r_0}(\mathcal{F},\mathbb{G}_m) \arrow[l] \arrow[d, "\alpha^{r_0}(X,\mathcal{F})"'] & \mathrm{Ext}_X^{r_0}(\mathcal{F}_0,\mathbb{G}_m) \arrow[l] \arrow[d, "\alpha^{r_0}(X,\mathcal{F}_0)"', "\cong"] & \mathrm{Ext}_X^{r_0}(\mathcal{F}_1,\mathbb{G}_m) \arrow[l] \arrow[d, "\alpha^{r_0}(X,\mathcal{F}_1)"'] \\
H^{2-r_0}(X,\mathcal{F}_0)^* & H^{2-r_0}(X,\mathcal{F}_1)^* \arrow[l] & H^{3-r_0}(X,\mathcal{F})^* \arrow[l] & H^{3-r_0}(X,\mathcal{F}_0)^* \arrow[l] & H^{3-r_0}(X,\mathcal{F}_1)^* \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

Par chasse au diagramme, $\alpha^{r_0}(X,\mathcal{F})$ est surjectif. Cela étant vrai pour tout faisceau constructible $\mathcal{F}$, $\alpha^{r_0}(X,\mathcal{F}_1)$ est aussi surjectif. Une nouvelle chasse au diagramme permet de conclure que $\alpha^{r_0}(X,\mathcal{F})$.

□

2.11 Étape 10 : Considérations combinatoires, caractéristique d'Euler-Poincaré et propriétés de finitude

Afin de prouver le théorème d'Artin-Verdier, nous allons procéder par recurrence en utilisant l'étape précédente. Ainsi, si le théorème est prouvé pour $r > r_0$, la proposition 2.10.4(i) permet de conclure que $\alpha^{r_0}(X,\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})$ est surjectif pour tout $m > 0$. D'après 2.10.4(ii), pour savoir que le théorème est vrai pour $r = r_0$, il suffit de montrer que $\alpha^{r_0}(X,\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})$ est un isomorphisme dès que le corps K contient les racines m-ièmes de l'unité. Comme on sait déjà que ce morphisme est surjectif, il suffit de voir que sa source et son but ont même cardinal. C'est pour cette raison que nous nous intéressons ici à des calculs combinatoires, en particulier au calcul de la caractéristique d'Euler-Poincaré :

Proposition 2.11.1. *Supposons que K n'a pas de places réelles. Soient V un ouvert non vide de X et $m > 1$ un entier inversible sur V tel que K contient toutes les racines m-ièmes de l'unité.*
(i) Les $H^r(V,\mu_m)$ et les $H^r_c(V,\mu_m)$ sont finis pour $r \geq 0$.
(ii) Notons $\chi(V,\mu_m) = \dfrac{|H^0(V,\mu_m)||H^2(V,\mu_m)|}{|H^1(V,\mu_m)||H^3(V,\mu_m)|}$ et $\chi_c(V,\mu_m) = \dfrac{|H^0_c(V,\mu_m)||H^2_c(V,\mu_m)|}{|H^1_c(V,\mu_m)||H^3_c(V,\mu_m)|}$.
Alors

$$\chi(V,\mu_m) = m^{-\frac{1}{2}[K:\mathbb{Q}]},$$

$$\chi_c(V,\mu_m) = m^{\frac{1}{2}[K:\mathbb{Q}]}.$$

Démonstration. Notons $S = \Omega_K \setminus V$ et $S_f = X \setminus V$. Comme m est inversible sur V, on dispose d'une suite exacte de faisceaux sur V :

$$0 \to \mu_m \to \mathbb{G}_m \to \mathbb{G}_m \to 0.$$

On en déduit une suite exacte longue :

$$
\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & H^0(V,\mu_m) \arrow[r] & H^0(V,\mathbb{G}_m) \arrow[r, "\cdot m"] & H^0(V,\mathbb{G}_m) \\
\arrow[r] & H^1(V,\mu_m) \arrow[r] & H^1(V,\mathbb{G}_m) \arrow[r, "\cdot m"] & H^1(V,\mathbb{G}_m) \\
\arrow[r] & H^2(V,\mu_m) \arrow[r] & H^2(V,\mathbb{G}_m) \arrow[r, "\cdot m"] & H^2(V,\mathbb{G}_m) \\
\arrow[r] & H^3(V,\mu_m) \arrow[r] & H^3(V,\mathbb{G}_m) \arrow[r, "\cdot m"] & H^3(V,\mathbb{G}_m) \\
\arrow[r] & H^4(V,\mu_m) \arrow[r] & H^4(V,\mathbb{G}_m) \arrow[r, "\cdot m"] & H^4(V,\mathbb{G}_m)
\end{tikzcd}
$$

Or, d'après 2.2.1 :

- on a $H^0(V,\mathbb{G}_m) = \mathcal{O}_{K,S}^\times \cong \mu(K) \times \mathbb{Z}^{|S|-1}$, où $\mu(K)$ est fini.
- le groupe $H^1(V,\mathbb{G}_m) = \mathrm{Pic}(\mathcal{O}_{K,S})$ est fini.
- le groupe $H^2(V,\mathbb{G}_m)$ est isomorphe à $(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^{|S_f|-1}$.
- le groupe $H^r(V,\mathbb{G}_m)$ est nul pour $r \geq 3$: en effet, $V \neq X$ puisqu'il existe un entier $m > 1$ inversible sur V.

On en déduit que les $H^r(V,\mu_m)$ sont finis pour $r \geq 0$ et que $\chi(V,\mu_m) = \frac{m^{|S_f|-1}}{m^{|S|-1}} = m^{-\frac{1}{2}[K:\mathbb{Q}]}$.

Maintenant, comme $H^3(V,\mu_m) \to \bigoplus_{v\in S} H^3(K_v,\mu_m(K^s))$ est surjective, nous disposons d'une suite exacte :

$$
\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & H_c^0(V,\mu_m) \arrow[r] & H^0(V,\mu_m) \arrow[r] & \bigoplus_{v\in S} H^0(K_v,\mu_m(K^s)) \\
\arrow[r] & H_c^1(V,\mu_m) \arrow[r] & H^1(V,\mu_m) \arrow[r] & \bigoplus_{v\in S} H^1(K_v,\mu_m(K^s)) \\
\arrow[r] & H_c^2(V,\mu_m) \arrow[r] & H^2(V,\mu_m) \arrow[r] & \bigoplus_{v\in S} H^2(K_v,\mu_m(K^s)) \\
\arrow[r] & H_c^3(V,\mu_m) \arrow[r] & H^3(V,\mu_m) \arrow[r] & \bigoplus_{v\in S} H^3(K_v,\mu_m(K^s)) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}
$$

et d'isomorphismes $H_c^r(V,\mu_m) \cong H^r(V,\mu_m)$ pour $r > 3$. On déduit que $H_c^r(V,\mu_m)$ est fini pour $r \geq 0$ et que :

$$\chi_c(V,\mu_m) = \frac{\chi(V,\mu_m)}{\prod_{v\in S_f} \chi(G_{K_v},\mu_m(K^s))}.$$

Mais on sait que $\chi(G_{K_v},\mu_m(K^s)) = [\mathcal{O}_{K_v} : m\mathcal{O}_{K_v}]^{-1} = |m|_v$, pour $v \in X$. En particulier, pour $v \in V$, comme m est inversible sur V, $\chi(G_{K_v},\mu_m(K^s)) = 1$. Par conséquent, la formule du produit $\prod_{v \in \Omega_K} |m|_v = 1$ entraîne que :

$$\chi_c(V, \mu_m) = m^{\frac{1}{2}[K:\mathbb{Q}]}.$$

□

Remarque 2.11.2. Dans la suite, nous n'aurons besoin que de la proposition précédente. Cependant, si l'on supposait connu le théorème de Poitou-Tate, on pourrait raffiner le résultat (voir théorème II.2.13 de [Mil06]).

Nous profitons maintenant de la proposition précédente pour prouver les énoncés de finitude du théorème d'Artin-Verdier :

Proposition 2.11.3. *Rappelons que U est un ouvert non vide de X et que F est un faisceau constructible sur U. Le groupe $H^r_c(U, F)$ est fini pour $r \in \mathbb{Z}$.*

Démonstration. • Soit V un ouvert non vide de U ne contenant aucune place divisant 2, sur lequel F est localement constant. Considérons un morphisme fini étale $V' \to V$ tel que V' est connexe et $F|_{V'}$ est constant. On remarque alors que V' est la normalisation de V dans une extension finie L de K, et on peut supposer que L n'a pas de places réelles quitte à remplacer L par $L(i)$. Si l'on note $G = \text{Gal }(L/K)$, on dispose alors de la suite spectrale de Hochschild-Serre :

$$H^r(G, H^s(V', F|_{V'})) \Rightarrow H^{r+s}(V, F|_V).$$

- Montrons que $H^s(V', F|_{V'})$ est fini pour $s \geq 0$. D'après la proposition 2.11.1(i), $H^s(V', \mathbb{Z}/m\mathbb{Z})$ est fini pour tout $m > 1$ inversible sur V' tel que L contient les racines m-ièmes de l'unité. Le faisceau $F|_{V'}$ étant constant, cela impose que $H^s(V', F|_{V'})$ est fini pour $s \geq 0$.
- On déduit alors de la suite spectrale de Hochschild-Serre que $H^r(V, F|_V)$ est fini pour tout $r \geq 0$. Par conséquent, la suite exacte 2.1.3(v) impose que $H^r_c(V, F|_V)$ est fini et la suite exacte 2.1.3(iv) entraîne que $H^r_c(U, F)$ est fini pour tout $r \in \mathbb{Z}$.

□

Proposition 2.11.4. *Le groupe $Ext^r_U(F, \mathbb{G}_m)$ est fini pour $r \in \mathbb{N}$.*

Démonstration. • Soit V un ouvert non vide de U sur lequel F est localement constant et $|F_{\overline{\eta}}|$ est inversible. Considérons un morphisme fini étale $V' \to V$ tel que V' est connexe et $F|_{V'}$ est constant. On remarque alors que V' est la normalisation de V dans une extension finie L de K, et on peut supposer que L n'a pas de places réelles et contient les racines $|F_{\overline{\eta}}|$-ièmes de l'unité. Si l'on note $G = \text{Gal }(L/K)$, on dispose alors d'une suite spectrale :

$$H^r(G, \text{Ext}^s_{V'}(F|_{V'}, \mathbb{G}_m)) \Rightarrow \text{Ext}^{r+s}_V(F|_V, \mathbb{G}_m).$$

- Montrons que $\mathrm{Ext}^s_{V'}(F|_{V'},\mathbb{G}_m)$ est fini pour $s \geq 0$. Comme $F|_{V'}$ est constant, il suffit de vérifier que $\mathrm{Ext}^s_{V'}(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z},\mathbb{G}_m)$ est fini pour tout $m > 1$. La suite exacte $0 \to \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \to 0$ fournit une suite exacte longue :

$$... \to \mathrm{Ext}^s_{V'}(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z},\mathbb{G}_m) \to H^s(V',\mathbb{G}_m) \to H^s(V',\mathbb{G}_m) \to ...$$

  Exactement de la même manière que dans la preuve de 2.11.1, les calculs de cohomologie réalisés dans l'étape 1 entraînent alors que $\mathrm{Ext}^s_{V'}(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z},\mathbb{G}_m)$ est fini et donc $\mathrm{Ext}^s_{V'}(F|_{V'},\mathbb{G}_m)$ est fini pour $s \geq 0$.
- La suite spectrale précédente permet alors de conclure que $\mathrm{Ext}^r_V(F|_V,\mathbb{G}_m)$ est fini pour tout r. Mais, si l'on note $j : V \hookrightarrow U$ et $i : X \setminus V \hookrightarrow U$, on a une suite exacte de faisceaux sur U :

$$0 \to j_!j^*F \to F \to i_*i^*F \to 0.$$

  La suite exacte longue associée s'écrit alors :

$$... \to \mathrm{Ext}^r_U(i_*i^*F,\mathbb{G}_m) \to \mathrm{Ext}^r_U(F,\mathbb{G}_m) \to\to \mathrm{Ext}^r_V(F|_V,\mathbb{G}_m) \to ...$$

  Les termes $\mathrm{Ext}^r_V(F|_V,\mathbb{G}_m)$ sont finis d'après ce que nous venons de voir. Les termes $\mathrm{Ext}^r_U(i_*i^*F,\mathbb{G}_m)$ sont finis d'après l'étape 2 et la proposition 2.11.3. On déduit que $\mathrm{Ext}^r_U(F,\mathbb{G}_m)$ est fini pour tout r.

□

2.12 Étape 11 : Preuve du théorème d'Artin-Verdier

Nous sommes à présent en mesure d'établir le théorème d'Artin-Verdier pour les corps de nombres. Pour ce faire, on prouve :

Proposition 2.12.1. *Pour tout corps de nombres K sans places réelles, pour tout faisceau constructible $\mathcal{F}$ sur X et pour tout $r_0 \in \mathbb{Z}$, le morphisme $\alpha^{r_0}(X,\mathcal{F})$ est un isomorphisme.*

Démonstration. On procède par étapes :

A. Pour $r_0 > 3$:

L'étape 5 entraîne immédiatement que $\alpha^{r_0}(X,\mathcal{F})$ est un isomorphisme puisque $\mathrm{Ext}^{r_0}_X(\mathcal{F},\mathbb{G}_m)$ est nul.

B. Pour $r_0 = 3$:

Soit K un corps de nombres sans places réelles. Soit $m > 0$ tel que K contient toutes les racines m-ièmes de l'unité. La suite exacte courte de faisceaux $0 \to \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \to 0$ induit une suite exacte longue de cohomologie :

$$... \to \mathrm{Ext}^r_X(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z},\mathbb{G}_m) \to H^r(X,\mathbb{G}_m) \to H^r(X,\mathbb{G}_m) \to ...$$

Comme $H^2(X,\mathbb{G}_m)=0$ et $H^3(X,\mathbb{G}_m)=\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$, on déduit que $\mathrm{Ext}^3_X(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z},\mathbb{G}_m)\cong \frac{1}{m}\mathbb{Z}/\mathbb{Z}$. D'autre part, $H^0(X,\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})=\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$. Vu à travers ces isomorphismes, l'accouplement d'Artin-Verdier devient $(x,y)\mapsto x\tilde{y}$ pour $x\in\frac{1}{m}\mathbb{Z}/\mathbb{Z}$, $y\in\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ et $\tilde{y}\in\mathbb{Z}$ un relèvement quelconque de y. Cela impose que $\alpha^3(X,\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})$ est un isomorphisme. L'étape 9 entraîne alors immédiatement que $\alpha^3(X,\mathcal{F})$ est un isomorphisme pour tout faisceau constructible $\mathcal{F}$ sur X.

C. Pour $r_0=2$:

Soit K un corps de nombres sans places réelles. Soit $m>0$ tel que K contient toutes les racines m-ièmes de l'unité. D'après l'étape 9, $\alpha^2(X,\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})$ est surjectif. Pour voir que c'est un isomorphisme, il suffit de montrer que $H^1(X,\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})$ et $\mathrm{Ext}^2_X(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z},\mathbb{G}_m)$ ont même cardinal.

La suite exacte longue utilisée en B impose que

$$\mathrm{Ext}^2_X(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z},\mathbb{G}_m)\cong \mathrm{Pic}(X)/m\mathrm{Pic}(X)\cong \mathrm{Cl}_K/m\mathrm{Cl}_K.$$

D'autre part, si H_m est l'extension abélienne maximale non ramifiée de K d'exposant m, on a

$$H^1(X,\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})\cong \mathrm{Hom}_c(\pi_1(X,\overline{\eta}),\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})\cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathrm{Gal}(H_m/K),\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}).$$

La théorie du corps de classes entraîne alors que les deux groupes ont même cardinal. Par conséquent, $\alpha^2(X,\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})$ est un isomorphisme. L'étape 9 permet alors de déduire que $\alpha^2(X,\mathcal{F})$ est un isomorphisme pour tout faisceau constructible $\mathcal{F}$ sur X.

D. Pour $r_0=1$:

Soit K un corps de nombres sans places réelles. Soit $m>0$ tel que K contient toutes les racines m-ièmes de l'unité. D'après l'étape 9, $\alpha^1(X,\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})$ est surjective. Choisissons un ouvert V non vide de X sur lequel m est inversible, et notons $j:V\hookrightarrow X$ et $i:X\setminus V\hookrightarrow X$. Nous disposons alors d'un diagramme commutatif à lignes exactes :

$$\begin{tikzcd}
... & \mathrm{Ext}^r_V(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z},\mathbb{G}_m) \arrow[l] \arrow[d, "\alpha^r(V,\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})"'] & \mathrm{Ext}^r_X(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z},\mathbb{G}_m) \arrow[l] \arrow[d, "\alpha^r(X,\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})"'] & \mathrm{Ext}^r_X(i_*(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}),\mathbb{G}_m) \arrow[l] \arrow[d, "\alpha^r(X,i_*(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}))"'] & ... \arrow[l] \\
... & H^{3-r}_c(V,\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^* \arrow[l] & H^{3-r}(X,\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^* \arrow[l] & H^{3-r}(X,i_*(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}))^* \arrow[l] & ... \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

On a déjà prouvé que $\alpha^r(X,\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})$ et $\alpha^r(X,i_*(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}))$ sont des isomorphismes pour $r>1$. De plus, $\alpha^1(X,\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})$ est surjectif, et d'après la partie 2, $\alpha^1(X,i_*(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}))$ est un isomorphisme. Le lemme des cinq impose alors que $\alpha^r(V,\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})$ est un isomorphisme pour $r>1$ et est surjectif pour $r=1$; de plus, si $\alpha^1(V,\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})$ et $\alpha^0(V,\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})$ étaient des isomorphismes, il en serait de même pour $\alpha^1(X,\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})$.

- Prouvons d'abord que $\alpha^0(V,\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})$ est un isomorphisme. Comme K contient toutes le racines m-ièmes de l'unité, $\mathrm{Hom}_V(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z},\mathbb{G}_m)\cong\mu_m(K)\cong\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ est un groupe cyclique d'ordre m. D'autre part, les faisceaux $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ et μ_m sont isomorphes sur V, et, m étant inversible sur V, $H^3_c(V,\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) \cong H^3_c(V,\mu_m) \cong H^3_c(V,\mathbb{G}_m)[m] = \frac{1}{m}\mathbb{Z}/\mathbb{Z}$. Vu à travers cet isomorphisme, l'accouplement d'Artin-Verdier s'identifie avec le même accouplement que nous avons décrit à l'étape B. Donc $\alpha^0(V,\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})$ est un isomorphisme.

- Reste à vérifier que $\alpha^1(V,\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})$ est un isomorphisme. Pour ce faire, il suffit de montrer que $\mathrm{Ext}^1_V(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z},\mathbb{G}_m)$ et $H^2_c(V,\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})$ ont même cardinal. Remarquons d'abord que l'on a deux suites exactes :

$$H^0(V,\mathbb{G}_m) \to H^0(V,\mathbb{G}_m) \to \mathrm{Ext}^1_V(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z},\mathbb{G}_m) \to H^1(U,\mathbb{G}_m) \to H^1(U,\mathbb{G}_m),$$
$$H^0(V,\mathbb{G}_m) \to H^0(V,\mathbb{G}_m) \to H^1(V,\mu_m) \to H^1(U,\mathbb{G}_m) \to H^1(U,\mathbb{G}_m),$$

ce qui entraîne que $\mathrm{Ext}^1_V(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z},\mathbb{G}_m)$ et $H^1(V,\mu_m)$ ont même cardinal. Or, comme $\alpha^r(V,\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})$ est un isomorphisme pour $r=0,2,3$ d'après l'étape 3, l'étape 10 impose que :

$$\frac{|H^2_c(V,\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})|}{|H^1(V,\mu_m)|} = \chi_c(V,\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})\chi(V,\mu_m) = m^{\frac{1}{2}[K:\mathbb{Q}]}\frac{m^{\frac{1}{2}[K:\mathbb{Q}]}}{m^{[K:\mathbb{Q}]}} = 1$$

(on a utilisé ici que K n'a pas de places réelles et que K contient toutes les racines m-ièmes de l'unité). Par conséquent, $\alpha^1(V,\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})$ est un isomorphisme.

On déduit alors que $\alpha^1(X,\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})$ est un isomorphisme. L'étape 9 permet alors de déduire que $\alpha^1(X,\mathcal{F})$ est un isomorphisme pour tout faisceau constructible $\mathcal{F}$ sur X.

E. Pour $r_0 = 0$:
Reprenons les notations de l'étape D. Nous avons vu que $\alpha^0(V,\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})$ est un isomorphisme. De plus, $\alpha^1(V,\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})$ est aussi un isomorphisme, et l'étape 2 impose que $\alpha^0(V,i_*(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}))$ est encore un isomorphisme. Par conséquent, à l'aide du diagramme dessiné à l'étape D et du lemme des cinq, $\alpha^0(X,\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})$ est injectif. Il est aussi surjectif d'après l'étape 9. Donc c'est un isomorphisme. L'étape 9 entraîne donc que $\alpha^0(X,\mathcal{F})$ est un isomorphisme pour tout faisceau constructible $\mathcal{F}$ sur X.

F. Pour $r_0 < 0$:
L'étape 4 entraîne immédiatement que $\alpha^{r_0}(X,\mathcal{F})$ est isomorphisme puisque $H^{3-r_0}_c(X,\mathcal{F})$ est nul.

□

Les étapes 8 et 10 permettent alors de déduire le théorème d'Artin-Verdier en toute généralité :

Théorème 2.12.2. ***(Théorème d'Artin-Verdier)***
Soit K un corps de nombres. Soit $\mathcal{O}_K$ son anneau des entiers. Soit $X = Spec\ \mathcal{O}_K$. Soit U un ouvert non vide de X. Soit F un faisceau constructible sur U. Alors pour tout $r \in \mathbb{Z}$, le morphisme $\alpha^r(U,F)$ est un isomorphisme de groupes abéliens finis.

Remarque 2.12.3. En travaillant juste un peu plus, il est possible de prouver un théorème d'Artin-Verdier pour des faisceaux $\mathbb{Z}$-constructibles.

2.13 Un corollaire fondamental

Nous présentons ici un corollaire qui sera très utile pour établir le théorème de Poitou-Tate :

Corollaire 2.13.1. *Soit F un faisceau constructible localement constant sur U tel qu'il existe un entier m inversible sur U vérifiant $mF = 0$. Notons $F^D = \underline{Hom}_U(F, \mathbb{G}_m)$. Il existe alors un accouplement parfait de groupes finis :*

$$H^r(U, F^D) \times H_c^{3-r}(U, F) \to H_c^3(U, \mathbb{G}_m) = \mathbb{Q}/\mathbb{Z}.$$

Démonstration. Calculons d'abord $\underline{\mathrm{Ext}}_U^s(F, \mathbb{G}_m)$ pour $s > 0$ en étudiant ses tiges :

- en $\overline{\eta}$, on a $\underline{\mathrm{Ext}}_U^s(F, \mathbb{G}_m)_{\overline{\eta}} = \mathrm{Ext}_{\mathbb{Z}}^s(F_{\overline{\eta}}, K^{s\times}) = 0$, puisque $K^{s\times}$ est un groupe abélien divisible et donc injectif.
- en $\overline{v}$ pour $v \in U \setminus \{\eta\}$, on a $\underline{\mathrm{Ext}}_U^s(F, \mathbb{G}_m)_{\overline{v}} = \mathrm{Ext}_{\mathbb{Z}}^s(F_{\overline{v}}, \mathcal{O}_v^{nr\times}) = 0$, puisque $\mathcal{O}_v^{nr\times}$ est un groupe abélien divisible par tous les nombres premiers autres que celui qui correspond à la place $v|_{\mathbb{Q}}$ de $\mathbb{Q}$ et donc par tous les diviseurs de m.

On déduit que $\underline{\mathrm{Ext}}_U^s(F, \mathbb{G}_m) = 0$ pour $s > 0$. La suite spectrale des Ext s'écrit :

$$H^r(U, \underline{\mathrm{Ext}}_U^s(F, \mathbb{G}_m)) \Rightarrow \mathrm{Ext}_U^{r+s}(F, \mathbb{G}_m)$$

et induit alors des isomorphismes $H^r(U, \underline{\mathrm{Hom}}_U(F, \mathbb{G}_m)) \cong \mathrm{Ext}_U^r(F, \mathbb{G}_m))$. Le théorème d'Artin-Verdier fournit donc un accouplement parfait de groupes finis :

$$H^r(U, F^D) \times H_c^{3-r}(U, F) \to H_c^3(U, \mathbb{G}_m) = \mathbb{Q}/\mathbb{Z}.$$

□

3 Le théorème de Poitou-Tate pour les corps de nombres

Fixons un corps de nombres K et notons $\mathcal{O}_K$ son anneau des entiers. Soient K^s une clôture séparable de K (c'est aussi une clôture algébrique puisque K est de caractéristique 0), et G_K le groupe de Galois absolu $\mathrm{Gal}(K^s/K)$ de K. On appelle Ω_K l'ensemble des places (archimédiennes et non archimédiennes) de K et on fixe une partie S de Ω_K contenant toutes les places archimédiennes. On note alors K_S la plus grande extension de K contenue dans K^s non ramifiée en dehors de S, et $G_{K,S} = \mathrm{Gal}(K_S/K)$. Ainsi, si $S = \Omega_K$, on a $G_{K,S} = G_K$. Le théorème de Poitou-Tate permet alors de relier la cohomologie du groupe de Galois $G_{K,S}$ à la cohomologie des groupes de Galois absolus des complétés de K. Plus précisément, il concerne les groupes de Tate-Shafarevich dont nous rappelons la définition :

Définition 3.0.2. ***(Groupes de Tate-Shafarevich)***
Soit M un $G_{K,S}$-module discret. On appelle ***groupes de Tate-Shafarevich*** *de M les groupes :*

$$Ш^1_S(K, M) = Ker\left(H^1(G_{K,S}, M) \to \prod_{v \in S} H^1(G_v, M)\right)$$

$$Ш^2_S(K, M) = Ker\left(H^2(G_{K,S}, M) \to \prod_{v \in S} H^2(G_v, M)\right)$$

où G_v désigne le groupe de Galois absolu du complété $\widehat{K_v}$ de K par rapport à la valuation v.

Le théorème de Poitou-Tate permet alors d'établir la finitude de ces groupes ainsi qu'une relation de dualité entre eux :

Théorème 3.0.3. ***(Théorème de Poitou-Tate)***
Soit M un $G_{K,S}$-module discret fini tel que les places de K divisant $|M|$ sont toutes contenues dans S. On pose $M^D = Hom_{\mathbb{Z}}(M, K^{s\times})$. Alors les groupes $Ш^1_S(K, M)$ et $Ш^2_S(K, M^D)$ sont finis et duaux pour la dualité de Pontryagin.

Dans la suite, nous allons retrouver ce théorème avec des techniques de cohomologie étale, et en particulier en faisant appel au théorème d'Artin-Verdier.

3.1 Le cas où $S = \Omega_K$

Dans cette section, nous supposons que $S = \Omega_K$, de sorte que $K_S = K^s$ et $G_{K,S} = G_K$. Soient $X = \mathrm{Spec}\ \mathcal{O}_K$ et F un faisceau constructible sur X.

3.1.1 Interprétation du deuxième groupe de Tate-Shafarevich dans le cadre de la cohomologie étale

Soit U un ouvert non vide de X. Rappelons que nous disposons d'un morphisme $H^2_c(U, F) \to H^2(U, F)$. Nous avons aussi un morphisme naturel $H^0(U, F) \to H^0(K, F_{\overline{\eta}})$. Comme $H^\bullet(U, -)$ est un foncteur cohomologique et $H^\bullet(K, -_{\overline{\eta}})$ est un δ-foncteur (par exactitude du foncteur associant à un faisceau sa tige au point générique), on peut étendre ce morphisme en un morphisme de δ-foncteurs : $H^\bullet(U, -) \to H^\bullet(K, -_{\overline{\eta}})$. On dispose en particulier d'un morphisme $H^2(U, F) \to H^2(K, F_{\overline{\eta}})$. On appelle alors $\mathcal{D}^2(U, F)$ l'image de la composée $f : H^2_c(U, F) \to H^2(U, F) \to H^2(K, F_{\overline{\eta}})$.
Remarquons maintenant que $\mathrm{Spec}\ K = \varprojlim_V V$ où la limite est prise sur les ouverts non vides de U. On en déduit que, pour $r \geq 0$, $H^r(K, F_{\overline{\eta}}) = \varinjlim_V H^r(V, F)$

où la limite est encore prise sur les ouverts non vides de U. Le morphisme f est donc aussi la composée de $H^2_c(U,F) \to H^2(U,F)$ suivie du morphisme naturel $H^2(U,F) \to H^2(K, F_{\overline{\eta}})$ en voyant $H^2(K, F_{\overline{\eta}})$ comme limite inductive.
Pour comprendre le morphisme f, il est donc important de comprendre les morphismes $H^2_c(U,F) \to H^2(U,F) \to H^2(V,F)$ pour V un ouvert non vide de U. Le lemme suivant sera donc très utile :

Lemme 3.1.1. *Soit V un ouvert non vide de U. Le diagramme suivant est commutatif à lignes exactes :*

$$\begin{tikzcd}
\bigoplus_{v \notin U} H^1(K_v, F_{\overline{\eta}}) \arrow[r] \arrow[d] & H^2_c(U,F) \arrow[r] & H^2(U,F) \arrow[r] \arrow[d] & \bigoplus_{v \notin U} H^2(K_v, F_{\overline{\eta}}) \\
\bigoplus_{v \notin V} H^1(K_v, F_{\overline{\eta}}) \arrow[r] & H^2_c(V,F) \arrow[r] \arrow[u] & H^2(V,F) \arrow[r] & \bigoplus_{v \notin V} H^2(K_v, F_{\overline{\eta}}) \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

Démonstration. La preuve est assez technique. Il suffit de vérifier les commutativités de diagrammes. On notera $j : V \hookrightarrow U$, $j_X : U \hookrightarrow X$ et $f_X : X \to \mathrm{Spec}\, \mathbb{Z}$.
Carré de gauche : Il suffit de vérifier la commutativité de :

$$\begin{tikzcd}
H^1(K_v, F_{\overline{\eta}}) \arrow[r] \arrow[d, equal] & H^2_c(U,F) \\
H^1(K_v, F_{\overline{\eta}}) \arrow[r] & H^2_c(V,F) \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

pour $v \in X \setminus U$ puis la commutativité de :

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{H}^2(\mathrm{Spec}\, \mathbb{Z}, (f_{X*} j_{X!} F)_\sigma) \arrow[r, "(-)_\sigma \to \widehat{\ }"] & \mathbb{H}^2(\mathrm{Spec}\, \mathbb{Z}, (f_{X*} j_{X!} F)\widehat{\ }) \\
\mathbb{H}^2(\mathrm{Spec}\, \mathbb{Z}, (f_{X*} j_{X!} j_! j^* F)_\sigma) \arrow[r, "(-)_\sigma \to \widehat{\ }"] \arrow[u, "j_! j^* F \to F"] & \mathbb{H}^2(\mathrm{Spec}\, \mathbb{Z}, (f_{X*} j_{X!} j_! j^* F)\widehat{\ }) \arrow[u, "j_! j^* F \to F"']
\end{tikzcd}$$

Par fonctorialité, la commutativité du second diagramme est évidente. Reste donc à prouver la commutativité pour $v \in X \setminus U$. Si l'on note $i_v : \mathrm{Spec}\, k(v) \hookrightarrow X$, la commutativité du premier diagramme se ramène à la commutativité de :

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Ext}^2_X(i_{v*}\mathbb{Z}, j_{X!}F) \arrow[r, "\widehat{f_{X*}-}"] & \mathrm{Ext}^2_{\mathrm{Spec}\, \mathbb{Z}}((f_{X*} i_{v*}\mathbb{Z})\widehat{\ }, (f_{X*} j_{X!} F)\widehat{\ }) \arrow[r, "\mathrm{id} \to f_{X*} i_{v*} i_v^* f_X^*"] & \mathrm{Ext}^2_{\mathrm{Spec}\, \mathbb{Z}}(\mathbb{Z}, (f_{X*} j_{X!} F)\widehat{\ }) \\
\mathrm{Ext}^2_X(i_{v*}\mathbb{Z}, j_{X!} j_! j^* F) \arrow[r, "\widehat{f_{X*}-}"] \arrow[u, "j_! j^* F \to F"] & \mathrm{Ext}^2_{\mathrm{Spec}\, \mathbb{Z}}((f_{X*} i_{v*}\mathbb{Z})\widehat{\ }, (f_{X*} j_{X!} j_! j^* F)\widehat{\ }) \arrow[r, "\mathrm{id} \to f_{X*} i_{v*} i_v^* f_X^*"] \arrow[u, "j_! j^* F \to F"] & \mathrm{Ext}^2_{\mathrm{Spec}\, \mathbb{Z}}(\mathbb{Z}, (f_{X*} j_{X!} j_! j^* F)\widehat{\ }) \arrow[u, "j_! j^* F \to F"]
\end{tikzcd}$$

Mais la commutativité de ce diagramme est évidente par fonctorialité.
Carré central : En écrivant les groupes de cohomologie avec des Ext et en explicitant les différents morphismes, la commutatitivité du carré central est équivalente à la commutativité du diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Ext}^2_{\mathrm{Spec}\,\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}, (f_{X*}j_{X!}j_!j^*F)\widehat{\ }) \arrow[r, "j_!j^*F \to F"] \arrow[d, "\widehat{\ }\to \mathrm{id}"] & \mathrm{Ext}^2_{\mathrm{Spec}\,\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}, (f_{X*}j_{X!}F)\widehat{\ }) \arrow[d, "\widehat{\ }\to \mathrm{id}"] \\
\mathrm{Ext}^2_{\mathrm{Spec}\,\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}, f_{X*}j_{X!}j_!j^*F) \arrow[r, "j_!j^*F \to F"] \arrow[d, "f_X^*"] & \mathrm{Ext}^2_{\mathrm{Spec}\,\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}, f_{X*}j_X^*F) \arrow[d, "f_X^*"] \\
\mathrm{Ext}^2_X(f_X^*\mathbb{Z}, f_X^*f_{X*}j_{X!}j_!j^*F) \arrow[r, "j_!j^*F \to F"] \arrow[d, "f_X^*f_{X*}\to \mathrm{id}"] & \mathrm{Ext}^2_X(f_X^*\mathbb{Z}, f_X^*f_{X*}j_{X!}F) \arrow[d, "f_X^*f_{X*}\to \mathrm{id}"] \\
\mathrm{Ext}^2_X(f_X^*\mathbb{Z}, j_{X!}j_!j^*F) \arrow[r, "j_!j^*F \to F"] \arrow[d, "j_X^*"] & \mathrm{Ext}^2_X(f_X^*\mathbb{Z}, j_{X!}F) \arrow[d, "j_X^*"] \\
\mathrm{Ext}^2_U(j_X^*f_X^*\mathbb{Z}, j_!j^*F) \arrow[r, "j_!j^*F \to F"] \arrow[d, "j^*"] & \mathrm{Ext}^2_U(j_X^*f_X^*\mathbb{Z}, F) \arrow[d, "j^*"] \\
\mathrm{Ext}^2_V(j^*j_X^*f_X^*\mathbb{Z}, j^*j_!j^*F) \arrow[r, equal, "j_!j^*F \to F"] & \mathrm{Ext}^2_V(j^*j_X^*f_X^*\mathbb{Z}, j^*F)
\end{tikzcd}$$

Mais la commutativité de ce diagramme est évidente par fonctorialité.

<u>Carré de droite :</u> Il suffit de vérifier la commutativité de :

$$\begin{tikzcd}
H^2(U,F) \arrow[r] \arrow[d] & H^2(K_v, F_{\overline{\eta}}) \arrow[d, equal] \\
H^2(V,F) \arrow[r] & H^2(K_v, F_{\overline{\eta}})
\end{tikzcd}$$

pour $v \notin U$. Si l'on note $f_v : \mathrm{Spec}\, K_v \to V$, cela revient à montrer la commutativité de :

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Ext}^2_U(\mathbb{Z}, F) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Ext}^2_{K_v}((j_U \circ f_v)^*\mathbb{Z}, (j_U \circ f_v)^*F) \arrow[d, equal] \\
\mathrm{Ext}^2_V(j_U^*\mathbb{Z}, j_U^*F) \arrow[r] & \mathrm{Ext}^2_{K_v}(f_v^*j_U^*\mathbb{Z}, f_v^*j_U^*F)
\end{tikzcd}$$

La commutativité de ce diagramme est évidente par fonctorialité.

□

Remarque 3.1.2. En fait, nous avons des diagrammes commutatifs :

$$\begin{tikzcd}
\bigoplus_{v\notin U} H^{r-1}(K_v, F_{\overline{\eta}}) \arrow[r] \arrow[d] & H^r_c(U,F) \arrow[r] & H^r(U,F) \arrow[r] \arrow[d] & \bigoplus_{v\notin U} H^r(K_v, F_{\overline{\eta}}) \\
\bigoplus_{v\notin V} H^{r-1}(K_v, F_{\overline{\eta}}) \arrow[r] & H^r_c(V,F) \arrow[r] \arrow[u] & H^r(V,F) \arrow[r] & \bigoplus_{v\notin V} H^r(K_v, F_{\overline{\eta}}) \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

pour tout $r \in \mathbb{Z}$: la preuve est identique.

Rappelons aussi que la flèche verticale $H^2_c(V,F) \to H^2_c(U,F)$ du diagramme précédent s'insère dans une suite exacte longue :

$$... \to H^2_c(V,F) \to H^2_c(U,F) \to \bigoplus_{v \in U \setminus V} H^2(k(v), F_{\overline{v}}) \to ...$$

Mais ici, les corps résiduels $k(v)$ sont finis, donc de dimension cohomologique au plus 1. On en déduit que, pour tout $v \in U \setminus V$, $H^2(k(v), F_{\overline{v}}) = 0$. Par conséquent, la flèche $H^2_c(V,F) \to H^2_c(U,F)$ est surjective. Cela implique immédiatement que $\mathcal{D}^2(U,F) \subseteq \mathrm{Ker}(H^2(K, F_{\overline{\eta}}) \to \bigoplus_{v \notin V} H^2(K_v, F_{\overline{\eta}}))$. Cela étant vrai pour tout ouvert non vide V de U, $\mathcal{D}^2(U,M) \subseteq Ш^2_{\Omega_K}(K, F_{\overline{\eta}})$.
Réciproquement, si $c \in Ш^2_{\Omega_K}(K, F_{\overline{\eta}})$, comme $H^2(K, F_{\overline{\eta}}) = \varinjlim_V H^2(V,F)$, on peut choisir $\tilde{c} \in H^2(V,F)$ pour un certain V tel que $\tilde{c}$ s'envoie sur c dans $H^2(K, F_{\overline{\eta}})$. Comme $\tilde{c}$ est dans le noyau de $H^2(V,F) \to \bigoplus_{v \notin V} H^2(K_v, F_{\overline{\eta}})$, il existe $b \in H^2_c(V,F)$ s'envoyant sur $\tilde{c}$ dans $H^2(V,F)$. Ainsi, si $a \in H^2_c(U,F)$ est l'image de c par $H^2_c(V,F) \to H^2_c(U,F)$, alors $f(a) = c$, et $c \in \mathcal{D}^2(U,F)$. Par conséquent, on obtient la proposition :

Proposition 3.1.3. *On a* $\mathcal{D}^2(U,F) = Ш^2_{\Omega_K}(K, F_{\overline{\eta}})$.

3.1.2 Interprétation du premier groupe de Tate-Shafarevich dans le cadre de la cohomologie étale

Pour chaque U ouvert non vide de X, on peut définir comme avant un morphisme $g : H^1(U,F) \to \prod_{v \in \Omega_K} H^1(K_v, F_{\overline{\eta}})$. On note $D^1_{sh}(U,F)$ le noyau de g. On a donc une suite exacte :

$$0 \to D^1_{sh}(U,F) \to H^1(U,F) \to \prod_{v \in \Omega_K} H^1(K_v, F_{\overline{\eta}}).$$

Par exactitude de la limite inductive (puisque nous sommes en présence de catégories filtrées), on obtient :

$$0 \to \varinjlim_U D^1_{sh}(U,F) \to H^1(K, F_{\overline{\eta}}) \to \prod_{v \in \Omega_K} H^1(K_v, F_{\overline{\eta}}).$$

Par conséquent, si l'on note $D^1_{sh}(F) = \varinjlim_U D^1_{sh}(U,F)$:

Proposition 3.1.4. *On a* $D^1_{sh}(F) = Ш^1_{\Omega_K}(K,F)$.

3.1.3 Preuve du théorème de Poitou-Tate dans le cas $S = \Omega_K$

Soit U un ouvert non vide de X sur lequel F est localement constant et $|F_{\overline{\eta}}|$ est inversible. Afin de mettre en évidence la dualité, il convient d'insérer $\mathcal{D}^2(U,F)$

dans une suite exacte, qui sera en fait la suite exacte duale de :

$$0 \to \varinjlim_U D^1_{sh}(U,F) \to H^1(K,F_{\overline{\eta}}) \to \prod_{v\in\Omega_K} H^1(K_v,F_{\overline{\eta}}).$$

Remarquons que le diagramme commutatif du lemme 3.1.1 permet de définir un morphisme $\bigoplus_{v\in\Omega_K} H^1(K_v,F_{\overline{\eta}}) \to H^2_c(U,F)$. Nous allons montrer que :

Proposition 3.1.5. *La suite :*

$$\bigoplus_{v\in\Omega_K} H^1(K_v,F_{\overline{\eta}}) \to H^2_c(U,F) \to \mathcal{D}^2(U,F) \to 0$$

est exacte.

Démonstration. Soit a dans le noyau de f. Comme $H^2(K,F_{\overline{\eta}}) = \varinjlim_V H^2(V,F)$, il existe V ouvert non vide de U tel que l'image de a dans $H^2(V,F)$ par la composée $H^2_c(U,F) \to H^2(U,F) \to H^2(V,F)$ est nulle. Comme $H^2_c(V,F) \to H^2_c(U,F)$ est surjective, on peut trouver $a' \in H^2_c(V,F)$ qui s'envoit sur a, et alors $a' \in \mathrm{Ker}(H^2_c(V,F) \to H^2(V,F))$ d'après le lemme 3.1.1. On en déduit que a' est dans l'image de $\bigoplus_{v\notin V} H^1(K_v,F_{\overline{\eta}}) \to H^2_c(V,F)$ et que a est dans l'image de $\bigoplus_{v\in\Omega_K} H^1(K_v,F_{\overline{\eta}}) \to H^2_c(U,F)$. Donc $\mathrm{Ker}(H^2_c(U,F) \to \mathcal{D}^2(U,F)) \subseteq \mathrm{Im}(\bigoplus_{v\in\Omega_K} H^1(K_v,F_{\overline{\eta}}) \to H^2_c(U,F))$.
Réciproquement, comme pour tout V ouvert non vide de U la suite $\bigoplus_{v\notin V} H^1(K_v,F_{\overline{\eta}}) \to H^2_c(V,F) \to H^2(V,F)$ est exacte, en utilisant la commutativité du lemme 3.1.1, on obtient que $\mathrm{Ker}(H^2_c(U,F) \to \mathcal{D}^2(U,F)) = \mathrm{Im}(\bigoplus_{v\in\Omega_K} H^1(K_v,F_{\overline{\eta}}) \to H^2_c(U,F))$, d'où la proposition. □

Par conséquent, nous disposons de deux suites exactes :

$$0 \to D^1_{sh}(U,F) \to H^1(U,F) \to \prod_{v\in\Omega_K} H^1(K_v,F_{\overline{\eta}}),$$

$$\bigoplus_{v\in\Omega_K} H^1(K_v,F^D_{\overline{\eta}}) \to H^2_c(U,F^D) \to \mathcal{D}^2(U,F^D) \to 0.$$

D'après le théorème d'Artin-Verdier, les groupes $H^1(U,F)$ et $H^2_c(U,F^D)$ sont finis, et donc il en est de même de $D^1_{sh}(U,F)$ et $\mathcal{D}^2(U,F^D)$. D'après les théorèmes de finitude pour les corps locaux, $\prod_{v\in\Omega_K} H^1(K_v,F_{\overline{\eta}})$ est un groupe compact et $\bigoplus_{v\in\Omega_K} H^1(K_v,F^D_{\overline{\eta}})$ est un groupe discret. Par conséquent, la première suite exacte est une suite exacte de groupes profinis, et la deuxième est une suite exacte de groupes discrets.
Rappelons que $A \mapsto A^*$ désigne le foncteur $\mathrm{Hom}_c(-,\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$. C'est en fait une anti-équivalence de catégories entre la catégorie des groupes abéliens profinis et celle

des groupes abéliens discrets de torsion. De plus, le théorème de dualité de Tate impose que $\left(\prod_{v\in\Omega_K} H^1(K_v, F_{\overline{\eta}})\right)^* \cong \bigoplus_{v\in\Omega_K} H^1(K_v, F_{\overline{\eta}}^D)$, et le théorème d'Artin-Verdier entraîne que $H^1(U,F)^* \cong H^2_c(U,F^D)$. On en déduit que la deuxième suite exacte est en fait duale de la première, et donc $D^1_{sh}(U,F)^* \cong \mathcal{D}^2(U,F^D)$. Mais en fait $\mathcal{D}^2(U,F^D)$ est indépendant de U, et donc $D^1_{sh}(U,F)$ l'est aussi. Cela entraîne que $D^1_{sh}(F) = D^1_{sh}(U,F)$. Par conséquent, en regroupant tous les résultats présentés jusqu'ici, on obtient :

Théorème 3.1.6. *Les groupes* $Ш^1_{\Omega_K}(K, F_{\overline{\eta}})$ *et* $Ш^2_{\Omega_K}(K, F^D_{\overline{\eta}})$ *sont finis et duaux.*

3.2 Cas général

Maintenant, on ne suppose plus rien sur S et on fixe un faisceau constructible F sur un ouvert non vide de X contenant $\Omega_K \setminus S$ qui vérifie les deux propriétés suivantes :
(H1) les places de K qui divisent $|F_{\overline{\eta}}|$ sont toutes dans S.
(H2) il existe un ouvert U_0 non vide de X contenant $\Omega_K \setminus S$ tel que $F|_{U_0}$ est localement constant.
Grâce à (H1), on peut supposer que $|F_{\overline{\eta}}|$ est inversible sur U_0. Nous allons procéder de manière analogue au cas où $S = \Omega_K$.

3.2.1 Interprétation du deuxième groupe de Tate-Shafarevich dans le cadre de la cohomologie étale

Soit U un ouvert non vide de U_0 contenant $\Omega_K \setminus S$. Pour V et V' deux ouverts non vides de U avec $V' \subseteq V$, nous disposons d'un morphisme $H^2(V,F) \to H^2(V',F)$. Nous pouvons alors définir la limite inductive $\varinjlim_{V\supseteq\Omega_K\setminus S} H^2(V,F)$, où la limite est prise sur les ouverts non vides V de U contenant $\Omega_K \setminus S$ (bien sûr, ici on utilise l'hypothèse (H2)). On note alors f la composée $H^2_c(U,F) \to H^2(U,F) \to \varinjlim_{V\supseteq\Omega_K\setminus S} H^2(V,F)$. On pose finalement $\mathcal{D}^2_S(U,F) = \mathrm{Im}(f)$.

Exemple 3.2.1. (i) Si $S = \Omega_K$, la limite inductive $\varinjlim_{V\supseteq\Omega_K\setminus S} H^2(V,F)$ n'est autre que $H^2(K, F_{\overline{\eta}})$, f est bien le morphisme défini dans la section précédente, et $\mathcal{D}^2_{\Omega_K}(U,F) = \mathcal{D}^2(U,F)$.
(ii) Si S est fini, la limite inductive $\varinjlim_{V\supseteq\Omega_K\setminus S} H^2(V,F)$ n'est autre que $H^2(X \setminus S, F)$, et $\mathcal{D}^2_S(U,F)$ est en fait le groupe $D^2(U,F)$ défini dans la section II.3 de [Mil06].

Soit V un ouvert non vide de U contenant $\Omega_K\setminus S$. D'après le lemme 2.5.1, pour tout premier l inversible sur V, $H^2(V,F)\{l\} = H^2(G_{K,\Omega_K\setminus V}, F_{\overline{\eta}})\{l\}$ (on utilise toujours (H2)). En particulier, comme V contient $\Omega_K \setminus S$, l'hypothèse (H1) entraîne que cela est vrai dès que l divise $|F_{\overline{\eta}}|$. Les groupes $H^2(V,F)$ et $H^2(G_{K,\Omega_K\setminus V}, F_{\overline{\eta}})$ étant de $|F_{\overline{\eta}}|$-torsion, on en déduit que :

$$H^2(V,F) = H^2(G_{K,\Omega_K\setminus V}, F_{\overline{\eta}}).$$

Ainsi :

$$\varinjlim_{V\supseteq\Omega_K\setminus S} H^2(V,F) = H^2\left(\varprojlim_{V\supseteq\Omega_K\setminus S} G_{K,\Omega_K\setminus V}, F_{\overline{\eta}}\right) = H^2(G_{K,S}, F_{\overline{\eta}}).$$

On prouve alors, exactement de la même manière que dans le cas $S=\Omega_K$, que :

Proposition 3.2.2. *On a* $\mathcal{D}^2_S(U,F) = \text{Ш}^2_S(K,F_{\overline{\eta}})$.

3.2.2 Interprétation du premier groupe de Tate-Shafarevich dans le cadre de la cohomologie étale

Pour chaque U ouvert non vide de U_0 contenant $\Omega_K\setminus S$, on peut définir un morphisme $g : H^1(U,F)\to\prod_{v\in S} H^1(K_v,F_{\overline{\eta}})$. On note $D^1_{sh,S}(U,F)$ le noyau de g. D'où une suite exacte :

$$0\to D^1_{sh,S}(U,F)\to H^1(U,F)\to\prod_{v\in S} H^1(K_v,F_{\overline{\eta}}).$$

Par exactitude de la limite inductive, on obtient :

$$0\to \varinjlim_{U\supseteq\Omega_K\setminus S} D^1_{sh,S}(U,F)\to H^1(G_{K,S},F_{\overline{\eta}})\to\prod_{v\in S} H^1(K_v,F_{\overline{\eta}}).$$

Par conséquent, si l'on note $D^1_{sh,S}(F) = \varinjlim_{U\supseteq\Omega_K\setminus S} D^1_{sh,S}(U,F)$:

Proposition 3.2.3. *On a* $D^1_{sh,S}(F) = \text{Ш}^1_S(K,F_{\overline{\eta}})$.

Exemple 3.2.4. (i) Si $S=\Omega_K$, $D^1_{sh,\Omega_K}(U,F)$ est tout simplement $D^1_{sh}(U,F)$, et $D^1_{sh,\Omega_K}(F)$ est $D^1_{sh}(F)$.
(ii) Si S est fini, $D^1_{sh,S}(F) = D^1_{sh,S}(\Omega_K\setminus S,F)$ n'est autre que le groupe $D^1(\Omega_K\setminus S,F)$ défini dans la section II.3 de [Mil06].

3.2.3 Preuve du théorème de Poitou-Tate

Exactement comme dans le cas où $S=\Omega_K$, on insère $\mathcal{D}^2_S(U,F)$ dans une suite exacte :

Proposition 3.2.5. *La suite :*

$$\bigoplus_{v \in S} H^1(K_v, F_{\overline{\eta}}) \to H^2_c(U, F) \to \mathcal{D}^2_S(U, F) \to 0$$

est exacte.

Démonstration. La preuve est tout à fait analogue à celle de la proposition 3.1.5 □

De manière identique au cas $S = \Omega_K$, cela entraîne que $D^1_{sh,S}(F)$ et $\mathcal{D}^2_S(U, F^D)$ sont finis et duaux dès que U est contenu dans U_0, et donc :

Théorème 3.2.6. *Si F vérifie les hypothèses (H1) et (H2), les groupes $Ш^1_S(K, F_{\overline{\eta}})$ et $Ш^2_S(K, F^D_{\overline{\eta}})$ sont finis et duaux.*

D'après la discussion dans [Mil80] à la suite de la proposition V.1.1, pour chaque partie finie T de Ω_K contenant Ω_K^{∞}, le foncteur $F \mapsto F_{\overline{\eta}}$ est une équivalence de catégories entre les faisceaux constructibles localement constants sur $X \setminus T$ et les $G_{K,T}$-modules discrets. Le théorème de Poitou-Tate en découle :

Théorème 3.2.7. ***(Théorème de Poitou-Tate)***
Soit M un $G_{K,S}$-module discret fini tel que les places de K divisant $|M|$ sont toutes contenues dans S. On pose $M^D = Hom_{\mathbb{Z}}(M, K^{s\times})$. Alors les groupes $Ш^1_S(K, M)$ et $Ш^2_S(K, M^D)$ sont finis et duaux pour la dualité de Pontryagin.

4 Le théorème d'Artin-Verdier pour les corps de fonctions

Dans cette section, nous allons expliquer comment on peut obtenir un théorème analogue à celui d'Artin-Verdier vu précédemment pour un corps de fonctions. En fait, la preuve est très similaire à celle du théorème pour les corps de nombres, et donc nous allons expliquer ici uniquement les points qui changent.
Fixons donc un corps de fonctions K de corps de constantes $\mathbb{F}_q$, où $q = p^a$ avec p premier et a entier naturel non nul. Comme dans le cas des corps de nombres, on note Ω_K l'ensemble des places de K. Pour $v \in \Omega_K$, K_v désigne le corps des fractions de l'hensélisation $\mathcal{O}_v$ de $\mathcal{O}_K$ en v. On fera toujours attention à ne pas confondre K_v et le complété de K par rapport à la valuation v : afin de faire clairement la distinction, nous noterons $\widehat{K_v}$ ce complété et $\widehat{\mathcal{O}_v}$ son anneau des entiers.
Soit maintenant X la courbe projective lisse sur $\mathbb{F}_q$ de corps des fonctions K, et posons $\eta = \text{Spec } K$ et $\overline{\eta} = \text{Spec } \overline{K}$. Soit $g : \eta \to X$. Fixons un ouvert U de X non vide, ainsi qu'un faisceau constructible F sur U. Dans cette section, nous allons établir le théorème d'Artin-Verdier, qui fournira ensuite une dualité entre la cohomologie de F et celle de $\underline{\text{Hom}}_U(F, \mathbb{G}_m)$:

Théorème 4.0.8. ***(Théorème d'Artin-Verdier)***
Pour tout $r \geq 0$, les groupes $Ext^r_U(F, \mathbb{G}_m)$ et $H^{3-r}_c(U, F)$ sont finis et duaux pour la dualité de Pontryagin.

Ici, $H^{3-r}_c(U, F)$ désigne la cohomologie à support compact, que nous définirons dans la section suivante.

4.1 Étape 0 : Définition et propriétés de base de la cohomologie à support compact

La définition de la cohomologie à support est nettement plus simple ici parce qu'il n'y a pas de places réelles desquelles il faudrait tenir compte.

Définition 4.1.1. ***(Cohomologie à support compact)***
Soit $\mathcal{F}$ un faisceau sur U. Notons j_X l'immersion ouverte $j_X : U \hookrightarrow X$. On définit alors la ***cohomologie à support compact de*** *F* ***sur*** *U par $H^r_c(U, F) = H^r(X, j_{X!}F)$.*

Remarque 4.1.2. En fait, comme dans le cas des corps de nombres, on peut définir plus généralement la cohomologie à support compact d'un complexe de faisceaux $\mathcal{F}^\bullet$ par $H^r_c(U, \mathcal{F}^\bullet) = \mathbb{H}^r(\mathrm{Spec}\ \mathbb{Z}, Rf_!\mathcal{F}^\bullet)$ où $f : U \to \mathrm{Spec}\ \mathbb{Z}$.

Les propriétés de base de la cohomologie à support compact sont les mêmes que dans le cas d'un corps de nombres :

Proposition 4.1.3. *(i) Une suite exacte courte de faisceaux sur U :*

$$0 \to \mathcal{F}' \to \mathcal{F} \to \mathcal{F}'' \to 0$$

donne lieu à une suite exacte longue en cohomologie à support compact :

$$... \to H^r_c(U, \mathcal{F}') \to H^r_c(U, \mathcal{F}) \to H^r_c(U, \mathcal{F}'') \to ...$$

(ii) Pour toute immersion fermée $i : Z \hookrightarrow U$ avec $Z \neq U$ et tout faisceau $\mathcal{F}$ sur Z, les groupes $H^r_c(U, i_*\mathcal{F})$ et $H^r(Z, \mathcal{F})$ sont isomorphes.
(iii) Pour toute immersion ouverte $j : V \hookrightarrow U$ et tout faisceau $\mathcal{F}$ sur V, les groupes $H^r_c(U, j_!\mathcal{F})$ et $H^r_c(V, \mathcal{F})$ sont isomorphes.
(iv) Pour toute immersion ouverte $j : V \hookrightarrow U$ et tout faisceau $\mathcal{F}$ sur U, on dispose d'une suite exacte longue qui permet de comparer la cohomologie à support compact sur U à celle sur V :

$$... \to H^r_c(V, j^*\mathcal{F}) \to H^r_c(U, \mathcal{F}) \to \bigoplus_{v \in U \setminus V} H^r(k(v), \mathcal{F}_{\overline{v}}) \to ...$$

(v) Pour tout faisceau $\mathcal{F}$ sur U, on dispose d'une suite exacte longue qui permet de comparer la cohomologie à support compact à la cohomologie usuelle :

$$... \to H^r_c(U, \mathcal{F}) \to H^r(U, \mathcal{F}) \to \bigoplus_{v \notin U} H^r(K_v, \mathcal{F}_{\overline{\eta}}) \to ...$$

Les preuves des propriétés sont similaires à celles des propriétés analogues pour les corps de nombres (elles sont même plus simples). Nous les laissons au lecteur.

4.2 Étape 1 : Définition de l'accouplement

Comme pour les corps de nombres, la proposition 2.1.3(i) nous permet alors de définir un accouplement :

$$\mathrm{Ext}^r_U(F, \mathbb{G}_m) \times H^{3-r}_c(U, F) \to H^3_c(U, \mathbb{G}_m).$$

Calculons $H^3_c(U, \mathbb{G}_m)$:

Lemme 4.2.1. ***(Cohomologie de $\mathbb{G}_m$)***
Notons $S = \Omega_K \setminus U$.
(i) Le groupe $H^r(U, \mathbb{G}_m)$ est isomorphe à $\mathcal{O}^\times_{K,S}$ pour $r = 0$, à $Pic(\mathcal{O}_{K,S})$ pour $r = 1$, et est nul pour $r \geq 4$. De plus, on a une suite exacte :

$$0 \to H^2(U, \mathbb{G}_m) \to \bigoplus_{v \in S} Br(K_v) \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \to H^3(U, \mathbb{G}_m) \to 0.$$

(ii) Le groupe $H^r_c(U, \mathbb{G}_m)$ est nul pour $r = 2$ et $r \geq 4$, et isomorphe à $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ pour $r = 3$.

La preuve est identique à celle du lemme analogue pour les corps de nombres. On dispose alors d'un accouplement :

$$\mathrm{Ext}^r_U(F, \mathbb{G}_m) \times H^{3-r}_c(U, F) \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}.$$

Cela fournit un morphisme $\alpha^r(U, F) : \mathrm{Ext}^r_U(F, \mathbb{G}_m) \to H^{3-r}_c(U, F)^*$.

4.3 Étape 2 : Cas d'un faisceau à support dans un fermé strict

Cette étape est identique à l'étape 2 pour les corps de nombres. Les résultats suivants sont toujours valables, et les preuves sont les mêmes :

Lemme 4.3.1. *Supposons que F est à support dans un fermé strict Z de U. Alors, pour tout $r \geq 0$,*

$$\bigoplus_{v \in Z} Ext_v^{r-1}(i_v^* F, \mathbb{Z}) \cong Ext_U^r(F, \mathbb{G}_m),$$

où, pour $v \in Z$, i_v désigne l'immersion fermée Spec $k(v) \hookrightarrow U$.

Proposition 4.3.2. *Supposons que F est à support dans un fermé strict Z de U. Alors $\alpha^r(U, F)$ est un isomorphisme pour tout entier r.*

4.4 Étape 3 : Le théorème d'Artin-Verdier est vrai pour F sur U si, et seulement si, il est vrai pour la restriction de F à un certain ouvert V de U

Cette étape est encore identique à l'étape 3 pour les corps de nombres.

Lemme 4.4.1. *Soit $0 \to F' \to F \to F'' \to 0$ une suite exacte de faisceaux constructibles sur U. Si $\alpha^r(U, F')$ et $\alpha^r(U, F'')$ sont des isomorphismes pour tout r, alors $\alpha^r(U, F)$ est un ismorphisme pour tout $r \geq 0$.*

Proposition 4.4.2. *Soit V un ouvert non vide de U. Alors $\alpha^r(U, F)$ est un isomorphisme pour tout r si, et seulement si, $\alpha^r(V, F|_V)$ l'est.*

4.5 Étape 4 : Annulation de $H_c^r(U, F)$ pour r assez grand

Dans cette étape, nous modifions légèrement le lemme suivant, parce que nous aurons besoin de tenir compte du premier $p = \mathrm{car}(K)$.

Lemme 4.5.1. *Soit V un ouvert affine non vide de U sur lequel F est localement constant. Soit $S = \Omega_K \setminus V$. Alors $H^r(V, F)$ est un groupe de torsion pour $r > 0$ et $H^r(V, F) \cong H^r(G_{K,S}, F_{\overline{\eta}})$.*

Démonstration. On prouve de la même manière que pour les corps de nombres que $H^r(V, F)$ est de torsion et que $H^r(V, F)\{l\} \cong H^r(G_{K,S}, F_{\overline{\eta}})\{l\}$ pour $l \neq p$. Reste donc à prouver que $H^r(V, F)\{p\} \cong H^r(G_{K,S}, F_{\overline{\eta}})\{p\}$.
Notons $\tilde{V}$ le recouvrement étale universel de V. Nous allons encore exploiter la suite spectrale de Hochschild-Serre :

$$H^r(G_{K,S}, H^s(\tilde{V}, f^* F)) \Rightarrow H^{r+s}(V, F),$$

où $f : \tilde{V} \to V$. Notons F le Frobenius sur V. Nous disposons alors de la suite exacte de faisceaux sur V :

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{G}_a \xrightarrow{\mathrm{Id}-F} \mathbb{G}_a \longrightarrow 0.$$

La suite exacte longue associée donne $H^s(\tilde{V}, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) = 0$ pour $s \geq 2$. On sait de plus que :

$$H^1(\tilde{U}, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) = \mathrm{Hom}_c(\pi_1(\tilde{V}), F(\tilde{V})) = 0.$$

Par décalage, pour tout n entier naturel non nul et tout $s > 0$, on a $H^s(\tilde{V}, \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}) = 0$. Comme f^*F est constant, on déduit que $H^r(V, F)\{p\} \cong H^r(G_{K,S}, F_{\overline{\eta}})\{p\}$ et donc que $H^r(V, F) \cong H^r(G_{K,S}, F_{\overline{\eta}})$ pour $r > 0$. $\square$

Le lemme suivant se prouve de la même manière que pour les corps de nombres :

Lemme 4.5.2. *Soit V un ouvert affine non vide de U sur lequel F est localement constant et tel que $|F_{\overline{\eta}}|$ soit inversible sur V. Alors $H^r_c(V, F) = 0$ pour $r \geq 4$.*

Par contre, dans la proposition suivante, il faut faire attention si l'ordre de la tige de F au point générique est multiple de p :

Proposition 4.5.3. *On a $H^r_c(U, F) = 0$ pour $r \geq 4$.*

Démonstration. Nous pouvons écrire $F = \bigoplus_{l \text{ premier}} F_l$ où F_l est de torsion l-primaire. On prouve comme dans le cas d'un corps de nombres que $H^r_c(V, \bigoplus_{l \neq p} F_l) = 0$. Reste donc à prouver que $H^r_c(V, F_p) = 0$ pour $r \geq 4$.
On remarque que $H^r(U, F_p) = H^r_c(U, F_p)$ pour $r \geq 4$. De plus, d'après le corollaire 5.2 de l'exposé X de [SGA73], on a $\mathrm{cd}_p(U) \leq \dim(U) + 1 = 2$. On en déduit que $H^r_c(U, F_p) = 0$ pour $r \geq 4$. $\square$

4.6 Étape 5 : Annulation du groupe $\mathrm{Ext}^r_U(F, \mathbb{G}_m)$ pour r assez grand

Le lemme suivant est modifié par rapport aux corps de nombres :

Lemme 4.6.1. *Soit V un ouvert affine non vide de U sur lequel F est localement constant (et constructible). Le groupe $H^r(V, \underline{\mathrm{Ext}}^s_V(F, \mathbb{G}_m))$ est nul dès que $r+s \geq 4$.*

Démonstration. Nous pouvons écrire $F = \bigoplus_{l \text{ premier}} F_l$ où F_l est de torsion l-primaire. On prouve comme dans le cas d'un corps de nombres que $H^r(V, \underline{\mathrm{Ext}}^s_V(\bigoplus_{l \neq p} F_l, \mathbb{G}_m)) = 0$ pour $r + s \geq 4$. Montrons que $H^r(V, \underline{\mathrm{Ext}}^s_V(F_p, \mathbb{G}_m)) = 0$ dès que $s \geq 2$ ou $r \geq 3$.
Pour $s \geq 2$, on a $\underline{\mathrm{Ext}}^s_V(F_p, \mathbb{G}_m)) = 0$: il suffit de calculer les tiges.
Reste à étudier le cas $r \geq 3$. D'après le corollaire 5.2 de l'exposé X de [SGA73], $\mathrm{cd}_p(V) \leq \dim(V) + 1 = 2$. Donc $H^r(V, \underline{\mathrm{Ext}}^s_V(F_p, \mathbb{G}_m)) = 0$ si $r \geq 3$. $\square$

Par contre, les preuves du lemme et de la proposition ci-dessous sont identiques à celles pour les corps de nombres.

Lemme 4.6.2. *Soit V un ouvert affine non vide de U sur lequel F est localement constant (et constructible). Alors $\mathrm{Ext}^r_V(F, \mathbb{G}_m) = 0$ pour $r \geq 4$.*

Proposition 4.6.3. *Pour $r \geq 4$, on a $\mathrm{Ext}^r_U(F, \mathbb{G}_m) = 0$.*

4.7 Étape 6 : Décomposition de F

Cette étape est identique à l'étape analogue pour les corps de nombres.

Proposition 4.7.1. *Soit V un ouvert non vide de U tel que $F|_V$ est localement constant. Soit L une extension finie de K telle que la normalisation $\pi_V : V_n \to V$ de V dans L est étale et $F|_{V_n}$ est constant. Soit $\pi_U : U_n \to U$ la normalisation de U dans L. Soit $m > 0$ tel que $mF = 0$. Il existe alors un faisceau F_n constructible constant sur U_n de m-torsion, un faisceau F_f constructible sur U à support fini et un morphisme injectif $F \hookrightarrow \pi_{U*}F_n \oplus F_f$.*

4.8 Étape 7 : Comportement vis-à-vis de la normalisation

Encore une fois, cette étape est identique à l'étape analogue pour les corps de nombres. On adopte les mêmes notations et définitions et on a les mêmes résultats :

Lemme 4.8.1. *Soit $\mathcal{F}_n$ un faisceau constructible sur U_n. Pour tout $r \in \mathbb{Z}$, la composée*

$$N^r(\mathcal{F}_n) : Ext^r_{U_n}(\mathcal{F}_n, \mathbb{G}_m) \to Ext^r_U(\pi_*\mathcal{F}_n, \pi_*\mathbb{G}_m) \to Ext^r_U(\pi_*\mathcal{F}_n, \mathbb{G}_m),$$

où le premier morphisme est induit par le foncteur exact π_* et le second par la norme $N_{U_n/U}$, est un isomorphisme.

Proposition 4.8.2. *Soient $\mathcal{F}_n$ un faisceau constructible sur U_n et $r \in \mathbb{Z}$. Alors $\alpha^r(U_n, \mathcal{F}_n)$ est un isomorphisme si, et seulement si, $\alpha^r(U, \pi_*\mathcal{F}_n)$ est un isomorphisme.*

4.9 Étape 8 : Réduction au cas où $U = X$

Comme pour les corps de nombres, nous allons voir que nous pouvons supposer que $U = X$. Bien évidemment, cette fois-ci, nous n'avons pas à nous occuper d'éventuelles places réelles !

Proposition 4.9.1. *Supposons que, pour tout corps de fonctions K, pour tout faisceau constructible $\mathcal{F}$ sur X, pour tout r, $\alpha^r(X, \mathcal{F})$ est un isomorphisme. Alors, pour tout corps de fonctions K, pour tout ouvert non vide V de X, pour tout faisceau constructible $\mathcal{F}$ sur V, pour tout r, $\alpha^r(V, \mathcal{F})$ est un isomorphisme.*

La preuve est identique à celle de la proposition analogue pour les corps de nombres.

4.10 Étape 9 : Propriété d'hérédité

Encore une fois, cette étape est identique à l'étape analogue pour les corps de nombres.

Lemme 4.10.1. *Soit $\mathcal{F}$ un faisceau de torsion sur X (pas nécessairement constructible). Alors les sous-faisceaux constructibles de $\mathcal{F}$ forment un système inductif filtré et $\mathcal{F}$ en est la limite inductive.*

Lemme 4.10.2. *Soit $\mathcal{F}$ un faisceau constructible sur X. Alors il existe un morphisme injectif $\mathcal{F} \hookrightarrow \mathcal{I}$ où $\mathcal{I}$ est un faisceau flasque de torsion.*

Proposition 4.10.3. *Soit $r_0 \leq 3$ un entier. Supposons que $\alpha^r(X, \mathcal{F})$ soit un isomorphisme pour tout corps de fonctions K, pour tout faisceau constructible $\mathcal{F}$ sur X et pour tout $r > r_0$.*

(i) Supposons $r_0 \neq 3$. Pour tout corps de fonctions K et pour tout faisceau constructible $\mathcal{F}$ sur X, le morphisme $\alpha^{r_0}(X, \mathcal{F})$ est surjectif.

(ii) On ne suppose plus que $r_0 \neq 3$. On suppose par contre que pour tout corps de fonctions K, pour tout faisceau constructible $\mathcal{F}$ sur X et pour tout $m > 0$ tel que K contient toutes les racines m-ièmes de l'unité, $\alpha^{r_0}(X, \mathbb{Z}/m\mathbb{Z})$ est un isomorphisme. Alors pour tout corps de fonctions K et pour tout faisceau constructible $\mathcal{F}$ sur X, le morphisme $\alpha^{r_0}(X, \mathcal{F})$ est un isomorphisme.

4.11 Étape 10 : Considérations combinatoires, caractéristique d'Euler-Poincaré

Encore une fois, cette étape est identique à l'étape analogue pour les corps de nombres, à condition de considérer des ouverts affines :

Proposition 4.11.1. *Soit V un ouvert affine non vide de X. Soit $m > 0$ premier avec p tel que K contient toutes les racines m-ièmes de l'unité.*

(i) Les $H^r(V, \mu_m)$ et les $H^r_c(V, \mu_m)$ sont finis pour $r \geq 0$.

(ii) Notons $\chi(V, \mu_m) = \dfrac{|H^0(V, \mu_m)||H^2(V, \mu_m)|}{|H^1(V, \mu_m)||H^3(V, \mu_m)|}$ et $\chi_c(V, \mu_m) = \dfrac{|H^0_c(V, \mu_m)||H^2_c(V, \mu_m)|}{|H^1_c(V, \mu_m)||H^3_c(V, \mu_m)|}$. Alors

$$\chi(V, \mu_m) = 1,$$
$$\chi_c(V, \mu_m) = 1.$$

Comme pour les corps de nombres, on a la proposition suivante :

Proposition 4.11.2. *Rappelons que U est un ouvert non vide de X et que F est un faisceau constructible sur U. Le groupe $Ext^r_U(F, \mathbb{G}_m)$ est fini pour $r \in \mathbb{Z}$.*

Remarque 4.11.3. La finitude de $H^r_c(U, F)$ découlera immédiatement de la dualité d'Artin-Verdier.

4.12 Étape 11 : Preuve du théorème d'Artin-Verdier

Nous sommes à présent en mesure d'établir le théorème d'Artin-Verdier pour les corps de fonctions. Pour ce faire, on prouve :

Proposition 4.12.1. *Pour tout corps de fonctions K, pour tout faisceau constructible $\mathcal{F}$ sur X et pour tout $r_0 \in \mathbb{Z}$, le morphisme $\alpha^{r_0}(X, \mathcal{F})$ est nul.*

Démonstration. On procède par étapes :

A. Pour $r_0 > 3$:
L'étape 5 entraîne immédiatement que $\alpha^{r_0}(X, \mathcal{F})$ est isomorphisme puisque $\mathrm{Ext}_X^{r_0}(X, \mathcal{F})$ est nul.

B. Pour $r_0 = 3$:
On prouve que $\alpha^3(X, \mathcal{F})$ est un isomorphisme pour tout faisceau constructible $\mathcal{F}$ sur X comme dans le cas de corps de nombres.

C. Pour $r_0 = 2$:
On prouve que $\alpha^2(X, \mathcal{F})$ est un isomorphisme pour tout faisceau constructible $\mathcal{F}$ sur X comme dans le cas de corps de nombres.

D. Pour $r_0 = 1$:
Soit K un corps de fonctions. On prouve que $\alpha^1(X, \mathbb{Z}/m\mathbb{Z})$ est un isomorphisme pour tout faisceau constructible $\mathcal{F}$ sur X et tout $m > 0$ non multiple de p comme dans le cas de corps de nombres. Montrons maintenant que $\alpha^1(X, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ est un isomorphisme.
D'après l'étape 9, $\alpha^1(X, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ est surjectif. Notons F le Frobenius sur U. On dispose d'une suite exacte de faisceaux sur U :
$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{G}_a \xrightarrow{\mathrm{Id}-F} \mathbb{G}_a \longrightarrow 0.$$
Comme $H^r(X, \mathbb{G}_a) = 0$ pour $r > \dim(X) = 1$, la suite exacte longue de cohomologie donne que $H^r(X, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) = 0$ pour $r > 2$. De plus $\mathrm{Hom}_X(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, \mathbb{G}_m) = 0$, et donc $\alpha^0(X, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ est un isomorphisme. D'autre part, on dispose d'une autre suite exacte de faisceaux sur U :
$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \longrightarrow 0.$$
Comme $\mathrm{Ext}_X^r(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, \mathbb{G}_m)$ et $H_c^{3-r}(X, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$ sont isomorphes pour $r > 1$ et $r = 0$, les suites exactes longues de cohomologie imposent que $\mathrm{Ext}_X^1(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, \mathbb{G}_m)$ et $H^2(X, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ ont même cardinal. On en déduit que $\alpha^1(X, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ est un isomorphisme. Par dévissage, on prouve que, pour tout entier naturel n, $\alpha^1(X, \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})$ est un isomorphisme, et donc $\alpha^1(X, \mathbb{Z}/m\mathbb{Z})$ est un isomorphisme pour tout $m > 0$. L'étape 9 impose alors que $\alpha^1(X, \mathcal{F})$ est un isomorphisme pour tout faisceau constructible $\mathcal{F}$ sur X.

E. Pour $r_0 = 0$:
Reprenons les notations de l'étape D. Comme dans le cas des corps de nombres, on prouve que $\alpha^0(X, \mathbb{Z}/m\mathbb{Z})$ est un isomorphisme pour m non multiple de p. De

plus, nous avons vu que $\alpha^0(X, \mathbb{Z}/m\mathbb{Z})$ est un isomorphisme pour $m = p$. Par dévissage, cette propriété est vraie pour m une puissance de p, et donc pour tout $m > 0$. L'étape 9 entraîne donc que $\alpha^0(X, \mathcal{F})$ est un isomorphisme pour tout faisceau constructible $\mathcal{F}$ sur X.

F. Pour $r_0 < 0$:
L'étape 4 entraîne immédiatement que $\alpha^{r_0}(X, \mathcal{F})$ est isomorphisme puisque $H_c^{3-r_0}(X, \mathcal{F})$ est nul.

□

Les étapes 8 et 10 permettent alors de déduire le théorème d'Artin-Verdier en toute généralité :

Théorème 4.12.2. ***(Théorème d'Artin-Verdier)***
Soit K un corps de fonctions de corps des constantes $\mathbb{F}_q$. Soit X la courbe lisse projective sur $\mathbb{F}_q$ de corps de fonctions K. Soit U un ouvert non vide de X. Soit F un faisceau constructible sur U. Alors pour tout $r \in \mathbb{Z}$, le morphisme $\alpha^r(U, F)$ est un isomorphisme de groupes abéliens finis.

Remarque 4.12.3.
- Comme pour les corps de nombres, en travaillant juste un peu plus, il est possible de prouver un théorème d'Artin-Verdier pour des faisceaux $\mathbb{Z}$-constructibles.
- Remarquons que le théorème est vrai même si le faisceau F a de la p-torsion. C'est en fait uniquement dans le corollaire qui suit qu'il faudra supposer que F n'a pas de p-torsion.

4.13 Un corollaire fondamental

Nous avons le même corollaire que pour les corps de nombres et la preuve est identique :

Corollaire 4.13.1. *Soit F un faisceau constructible localement constant sur U tel qu'il existe un entier m premier avec p vérifiant $mF = 0$. Notons $F^D = \underline{Hom}_U(F, \mathbb{G}_m)$. Il existe alors un accouplement parfait de groupes finis :*

$$H^r(U, F^D) \times H_c^{3-r}(U, F) \to H_c^3(U, \mathbb{G}_m) = \mathbb{Q}/\mathbb{Z}.$$

4.14 Une autre preuve à partir de la dualité de Poincaré

Nous allons donner ici une autre preuve du corollaire précédent en utilisant la dualité de Poincaré. Cette preuve ne donne cependant pas le théorème 4.12.2 et ne permet pas de traiter le cas des corps de nombres.
Commençons par rappeler le théorème de dualité de Poincaré :

Théorème 4.14.1. ***(Dualité de Poincaré)***
Soient $\overline{X}$ une courbe projective lisse sur $\mathbb{F}_q^s$, et $\overline{U}$ un ouvert de $\overline{X}$. Fixons un entier naturel m premier avec p. Alors on dispose d'un isomorphisme naturel $H_c^2(\overline{U}, \mu_m) \to \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$, et pour tout faisceau constructible $\overline{F}$ sur $\overline{U}$ tel que $m\overline{F} = 0$ l'accouplement canonique :

$$Ext^r_{\overline{U},\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}}(\overline{F}, \mu_m) \times H_c^{2-r}(\overline{U}, \overline{F}) \to H_c^2(\overline{U}, \mu_m) \cong \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$$

est un accouplement parfait de groupes finis.

Remarque 4.14.2.
- Ici on a noté $H_c^r(\overline{U}, \overline{F}) = H^r(\overline{X}, j_{\overline{X}!}\overline{F})$ où $j_{\overline{X}} : \overline{U} \hookrightarrow \overline{X}$ désigne l'immersion ouverte. De plus, $\mathrm{Ext}^r_{\overline{U},\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}}(-, \mu_m)$ désigne le r-ième foncteur dérivé du foncteur qui à un faisceau $\overline{F}$ de $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$-modules sur $\overline{U}$ associe $\mathrm{Hom}^r_{\overline{U}}(\overline{F}, \mu_m)$.
- Le théorème est encore vrai lorsqu'on remplace $\mathbb{F}_q^s$ par un corps algébriquement clos quelconque de caractéristique première avec m. Plus généralement, si $\overline{X}$ est une variété lisse de dimension d sur un corps séparablement clos de caractéristique première à m, il existe un isomorphisme naturel $H_c^{2d}(\overline{X}, \mu_m^{\otimes d}) \to \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ et l'accouplement canonique :

$$\mathrm{Ext}^r_{\overline{X},\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}}(\overline{F}, \mu_m^{\otimes d}) \times H_c^{2d-r}(\overline{X}, \overline{F}) \to H_c^{2d}(\overline{X}, \mu_m^{\otimes d}) \cong \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$$

  est un accouplement parfait de groupes finis si $\overline{F}$ est un faisceau constructible de m-torsion.
- Pour une preuve du théorème, on pourra aller voir le théorème V.2.1 de [Mil80].

Corollaire 4.14.3. *Soient $\overline{X}$ une courbe projective lisse sur $\mathbb{F}_q^s$, et $\overline{U}$ un ouvert de $\overline{X}$. Fixons un entier naturel m premier avec p. Alors pour tout faisceau constructible localement constant $\overline{F}$ sur $\overline{U}$ tel que $m\overline{F} = 0$ il existe un accouplement parfait de groupes finis :*

$$H^r(\overline{U}, \overline{F}^D) \times H_c^{2-r}(\overline{U}, \overline{F}) \to H_c^2(\overline{U}, \mu_m) \cong \mathbb{Z}/m\mathbb{Z},$$

où $\overline{F}^D = \underline{Hom}_{\overline{U}}(\overline{F}, \mu_m) = \underline{Hom}_{\overline{U}}(\overline{F}, \mathbb{G}_m)$.

Remarque 4.14.4. Dans la preuve, on notera $\underline{\mathrm{Hom}}_{\overline{U},\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}}(-, \mu_m)$ le foncteur qui à un faisceau $\overline{F}$ de $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$-modules sur $\overline{U}$ associe $\underline{\mathrm{Hom}}_{\overline{U}}(\overline{F}, \mu_m)$, et $\underline{\mathrm{Ext}}^r_{\overline{U},\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}}(-, \mu_m)$ son r-ième foncteur dérivé.

Démonstration. D'après le théorème de dualité de Poincaré, il suffit de montrer que $\mathrm{Ext}^r_{\overline{U},\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}}(\overline{F}, \mu_m) \cong H^r(\overline{U}, \overline{F}^D)$. Pour ce faire, on écrit la suite spectrale des Ext :

$$H^r(\overline{U}, \underline{\mathrm{Ext}}^s_{\overline{U},\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}}(\overline{F}, \mu_m)) \Rightarrow \mathrm{Ext}^{r+s}_{\overline{U},\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}}(\overline{F}, \mu_m).$$

Or, pour $s > 0$ et $v \in \overline{U}$, on a $\underline{\mathrm{Ext}}^s_{\overline{U},\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}}(\overline{F}, \mu_m)_{\overline{v}} \cong \mathrm{Ext}^s_{\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}}(\overline{F}_{\overline{v}}, \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) = 0$ puisque $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ est un $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$-module injectif. Donc $\underline{\mathrm{Ext}}^s_{\overline{U},\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}}(\overline{F}, \mu_m) = 0$ pour $s > 0$ et la suite spectrale fournit des isomorphismes :

$$H^r(\overline{U}, \overline{F}^D) \cong \mathrm{Ext}^r_{\overline{U},\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}}(\overline{F}, \mu_m).$$

□

Corollaire 4.14.5. *Soit F un faisceau constructible localement constant sur U tel qu'il existe un entier m premier avec p vérifiant $mF = 0$. Notons $F^D = \underline{Hom}_U(F, \mu_m)$. Il existe alors un accouplement parfait de groupes finis :*

$$H^r(U, F^D) \times H^{3-r}_c(U, F) \to H^3_c(U, \mu_m) = \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}.$$

Démonstration. Remarquons d'abord que, comme $H^r(U, F^D) \cong \mathrm{Ext}^r_{U,\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}}(F, \mu_m)$, on dispose bien d'un accouplement canonique :

$$H^r(U, F^D) \times H^{3-r}_c(U, F) \to H^3_c(U, \mu_m) = \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}.$$

Notons maintenant :
- $\overline{X} = X \times_{\mathbb{F}_q} \mathbb{F}^s_q$.
- $\overline{U} = U \times_{\mathbb{F}_q} \mathbb{F}^s_q$
- $p_X : \overline{X} \to X$ et $p_U : \overline{U} \to U$ les projections canoniques.
- $j_X : U \to X$ et $j_{\overline{X}} : \overline{U} \to \overline{X}$ les immersions ouvertes.
- $\overline{F} = p_U^* F$.

Comme les morphismes p_X et p_U sont galoisiens de groupe $\mathrm{Gal}(\mathbb{F}^s_q/\mathbb{F}_q)$, on dispose de deux suites spectrales de Hochschild-Serre :

$$H^r(\mathrm{Gal}(\mathbb{F}^s_q/\mathbb{F}_q), H^s(\overline{U}, \overline{F^D})) \Rightarrow H^{r+s}(U, F^D)$$

$$H^r(\mathrm{Gal}(\mathbb{F}^s_q/\mathbb{F}_q), H^s(\overline{X}, p_X^* j_{X!} F)) \Rightarrow H^{r+s}(X, j_{X!} F).$$

Or $p_X^* j_{X!} F \cong j_{\overline{X}!} \overline{F}$ et $\overline{F^D} = \overline{F}^D$. Les suites spectrales s'écrivent donc :

$$H^r(\mathrm{Gal}(\mathbb{F}^s_q/\mathbb{F}_q), H^s(\overline{U}, \overline{F}^D)) \Rightarrow H^{r+s}(U, F^D)$$

$$H^r(\mathrm{Gal}(\mathbb{F}^s_q/\mathbb{F}_q), H^s_c(\overline{U}, \overline{F})) \Rightarrow H^{r+s}_c(U, F).$$

De plus, comme le corps $\mathbb{F}_q$ est de dimension cohomologique au plus 1, on a $H^r(\mathrm{Gal}(\mathbb{F}^s_q/\mathbb{F}_q), H^s(\overline{U}, \overline{F}^D)) = H^r(\mathrm{Gal}(\mathbb{F}^s_q/\mathbb{F}_q), H^s_c(\overline{U}, \overline{F})) = 0$ dès que $r > 1$. On en déduit des suites exactes :

$$0 \to H^1(\mathrm{Gal}(\mathbb{F}^s_q/\mathbb{F}_q), H^{2-r}(\overline{U}, \overline{F}^D)) \to H^{3-r}(U, F^D) \to H^0(\mathrm{Gal}(\mathbb{F}^s_q/\mathbb{F}_q), H^{3-r}(\overline{U}, \overline{F}^D)) \to 0$$

$$0 \to H^1(\mathrm{Gal}(\mathbb{F}_q^s/\mathbb{F}_q), H_c^{r-1}(\overline{U}, \overline{F})) \to H_c^r(U,F) \to H^0(\mathrm{Gal}(\mathbb{F}_q^s/\mathbb{F}_q), H_c^r(\overline{U}, \overline{F})) \to 0$$

Ces suites permettent d'établir la finitude de $H^{3-r}(U, F^D)$ et $H_c^r(U,F)$. De plus, grâce au corollaire 4.14.3, on dispose d'isomorphismes :

$$\begin{aligned} H^1(\mathrm{Gal}(\mathbb{F}_q^s/\mathbb{F}_q), H_c^{r-1}(\overline{U}, \overline{F})) &\cong H^0(\mathrm{Gal}(\mathbb{F}_q^s/\mathbb{F}_q), H_c^{r-1}(\overline{U}, \overline{F})^*)^* \\ &\cong H^0(\mathrm{Gal}(\mathbb{F}_q^s/\mathbb{F}_q), H^{3-r}(\overline{U}, \overline{F}^D))^* \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H^0(\mathrm{Gal}(\mathbb{F}_q^s/\mathbb{F}_q), H_c^{r}(\overline{U}, \overline{F})) &\cong H^1(\mathrm{Gal}(\mathbb{F}_q^s/\mathbb{F}_q), H_c^{r}(\overline{U}, \overline{F})^*)^* \\ &\cong H^1(\mathrm{Gal}(\mathbb{F}_q^s/\mathbb{F}_q), H_c^{r-1}(\overline{U}, \overline{F}^D))^*. \end{aligned}$$

Par conséquent, on obtient un diagramme commutatif à lignes exactes :

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & H^1(\mathrm{Gal}(\mathbb{F}_q^s/\mathbb{F}_q), H_c^{r-1}(\overline{U}, \overline{F})) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & H_c^r(U,F) \arrow[r] \arrow[d] & H^0(\mathrm{Gal}(\mathbb{F}_q^s/\mathbb{F}_q), H_c^r(\overline{U}, \overline{F})) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & H^0(\mathrm{Gal}(\mathbb{F}_q^s/\mathbb{F}_q), H^{3-r}(\overline{U}, \overline{F}^D))^* \arrow[r] & H^{3-r}(U, F^D)^* \arrow[r] & H^1(\mathrm{Gal}(\mathbb{F}_q^s/\mathbb{F}_q), H^{2-r}(\overline{U}, \overline{F}^D))^* \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Le lemme des cinq permet donc de conclure. □

5 Le théorème de Poitou-Tate pour les corps de fonctions

Fixons un corps de fonctions K de corps de constantes $\mathbb{F}_q$, où $q = p^a$ avec p premier et a entier naturel non nul. Soient K^s une clôture séparable de K, et G_K le groupe de Galois absolu $\mathrm{Gal}(K^s/K)$ de K. On appelle Ω_K l'ensemble des places (toutes non archimédiennes) de K et on fixe une partie <u>non vide</u> S de Ω_K. On note alors K_S la plus grande extension de K contenue dans K^s non ramifiée en dehors de S, et $G_{K,S} = \mathrm{Gal}(K_S/K)$. Ainsi, si $S = \Omega_K$, on a $G_{K,S} = G_K$. Comme pour les corps de nombres, le théorème de Poitou-Tate permet alors de relier la cohomologie du groupe de Galois $G_{K,S}$ à la cohomologie des groupes de Galois absolus des complétés de K. Il concerne toujours les groupes de Tate-Shavarevich qui sont définis comme dans la section 3 :

Définition 5.0.6. ***(Groupes de Tate-Shafarevich)***
Soit M un $G_{K,S}$-module discret. On appelle ***groupes de Tate-Shafarevich*** *de M les groupes :*

$$Ш^1_S(K,M) = Ker\left(H^1(G_{K,S}, M) \to \prod_{v \in S} H^1(G_v, M)\right)$$

$$Ш^2_S(K,M) = Ker\left(H^2(G_{K,S},M) \to \prod_{v\in S} H^2(G_v,M)\right)$$

où G_v désigne le groupe de Galois absolu du complété $\widehat{K_v}$ de K par rapport à la valuation v.

Le théorème de Poitou-Tate s'exprime alors de la manière suivante :

Théorème 5.0.7. ***(Théorème de Poitou-Tate)***
Soit M un $G_{K,S}$-module discret fini d'ordre premier avec p. On pose $M^D = Hom_{\mathbb{Z}}(M, K^{s\times})$. Alors les groupes $Ш^1_S(K,M)$ et $Ш^2_S(K,M^D)$ sont finis et duaux pour la dualité de Pontryagin.

Nous allons voir qu'il est possible de retrouver le théorème de Poitou-Tate à partir du théorème d'Artin-Verdier. La méthode est très similaire à celle des corps de nombres.
Fixons un faisceau constructible F sur un ouvert non vide de X qui vérifie les deux propriétés suivantes :
(H1) le nombre premier p ne divise pas $|F_{\overline{\eta}}|$.
(H2) il existe un ouvert U_0 non vide de X contenant $\Omega_K \setminus S$ tel que $F|_{U_0}$ est localement constant.
Nous allons procéder de manière analogue au cas où K était un corps de nombres.

5.1 Interprétation du deuxième groupe de Tate-Shafarevich dans le cadre de la cohomologie étale

Soit U un ouvert non vide de U_0 contenant $\Omega_K \setminus S$. Pour V et V' deux ouverts non vides de U avec $V' \subseteq V$, nous disposons d'un morphisme $H^2(V,F) \to H^2(V',F)$. Nous pouvons alors définir la limite inductive $\varinjlim_{V\supseteq \Omega_K\setminus S} H^2(V,F)$, où la limite est prise sur les ouverts non vides V de U contenant $\Omega_K \setminus S$ (bien sûr, ici on utilise l'hypothèse (H2)). On note alors f la composée $H^2_c(U,F) \to H^2(U,F) \to \varinjlim_{V\supseteq \Omega_K\setminus S} H^2(V,F)$. On pose finalement $\mathcal{D}^2_S(U,F) = \mathrm{Im}(f)$.
Pour mieux comprendre le morphisme f, le lemme suivant, analogue au lemme 3.1.1, sera très utile :

Lemme 5.1.1. *Soit V un ouvert non vide de U. Le diagramme suivant est commutatif à lignes exactes :*

$$\begin{tikzcd}
\bigoplus_{v\notin U} H^1(K_v,F_{\overline{\eta}}) \arrow[r] \arrow[d] & H^2_c(U,F) \arrow[r] & H^2(U,F) \arrow[r] \arrow[d] & \bigoplus_{v\notin U} H^2(K_v,F_{\overline{\eta}}) \\
\bigoplus_{v\notin V} H^1(K_v,F_{\overline{\eta}}) \arrow[r] & H^2_c(V,F) \arrow[r] \arrow[u] & H^2(V,F) \arrow[r] & \bigoplus_{v\notin V} H^2(K_v,F_{\overline{\eta}}) \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

Démonstration. La preuve est similaire à celle du lemme 3.1.1. Il suffit de vérifier les commutativités de diagrammes. On notera $j : V \hookrightarrow U$ et $j_X : U \hookrightarrow X$.

Carré de gauche : Il suffit de vérifier la commutativité de :

$$\begin{tikzcd} H^1(K_v, F_{\overline{\eta}}) \arrow[r] & H^2_c(U,F) \\ H^1(K_v, F_{\overline{\eta}}) \arrow[r] \arrow[u, equal] & H^2_c(V,F) \arrow[u] \end{tikzcd}$$

pour $v \in X \setminus U$. Si l'on note $i_v : \mathrm{Spec}\ k(v) \hookrightarrow X$, la commutativité du premier diagramme se ramène à la commutativité de :

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Ext}^2_X(i_{v*}\mathbb{Z}, j_{X!}F) \arrow[r, "\mathbb{Z}\to i_{v*}\mathbb{Z}"] & \mathrm{Ext}^2_X(\mathbb{Z}, j_{X!}F) \\ \mathrm{Ext}^2_X(i_{v*}\mathbb{Z}, j_{X!}j_!j^*F) \arrow[r, "\mathbb{Z}\to i_{v*}\mathbb{Z}"] \arrow[u, "j_!j^*F\to F"] & \mathrm{Ext}^2_X(\mathbb{Z}, j_{X!}j_!j^*F) \arrow[u, "j_!j^*F\to F"'] \end{tikzcd}$$

Mais la commutativité de ce diagramme est évidente par fonctorialité.

Carré central : En écrivant les groupes de cohomologie avec des Ext et en explicitant les différents morphismes, la commutatitivité du carré central est équivalente à la commutativité du diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Ext}^2_X(\mathbb{Z}, j_{X!}j_!j^*F) \arrow[r, "j_!j^*F\to F"] \arrow[d, "j_X^*"] & \mathrm{Ext}^2_X(\mathbb{Z}, j_{X!}F) \arrow[d, "j_X^*"] \\ \mathrm{Ext}^2_U(j_X^*\mathbb{Z}, j_!j^*F) \arrow[r, "j_!j^*F\to F"] \arrow[d, "j^*"] & \mathrm{Ext}^2_U(j_X^*\mathbb{Z}, F) \arrow[d, "j^*"] \\ \mathrm{Ext}^2_V(j^*j_X^*\mathbb{Z}, j^*j_!j^*F) \arrow[r, equal, "j_!j^*F\to F"] & \mathrm{Ext}^2_V(j^*j_X^*\mathbb{Z}, j^*F) \end{tikzcd}$$

Mais la commutativité de ce diagramme est évidente par fonctorialité.

Carré de droite : La preuve est identique à celle de 3.1.1

□

Soit V un ouvert affine non vide de U contenant $\Omega_K \setminus S$. D'après le lemme 4.5.1, on a $H^2(V,F) = H^2(G_{K,\Omega_K\setminus V}, F_{\overline{\eta}})$ (on utilise toujours (H2)). Ainsi :

$$\varinjlim_{V\supseteq\Omega_K\setminus S} H^2(V,F) = H^2\left(\varprojlim_{V\supseteq\Omega_K\setminus S} G_{K,\Omega_K\setminus V}, F_{\overline{\eta}}\right) = H^2(G_{K,S}, F_{\overline{\eta}}).$$

Remarque 5.1.2. C'est ici que l'on utilise que S est non vide !

On prouve alors, exactement de la même manière que dans le cas des corps de nombres, que :

Proposition 5.1.3. *On a* $\mathcal{D}^2_S(U,F) = Ш^2_S(K, F_{\overline{\eta}})$.

5.2 Interprétation du premier groupe de Tate-Shafarevich dans le cadre de la cohomologie étale

Pour chaque U ouvert non vide de U_0 contenant $\Omega_K \setminus S$, on peut définir un morphisme $g : H^1(U,F) \to \prod_{v\in S} H^1(K_v, F_{\overline{\eta}})$. On note $D^1_{sh,S}(U,F)$ le noyau de g. D'où une suite exacte :

$$0 \to D^1_{sh,S}(U,F) \to H^1(U,F) \to \prod_{v\in S} H^1(K_v, F_{\overline{\eta}}).$$

Par exactitude de la limite inductive, on obtient :

$$0 \to \varinjlim_{U\supseteq \Omega_K\setminus S} D^1_{sh,S}(U,F) \to H^1(G_{K,S}, F_{\overline{\eta}}) \to \prod_{v\in S} H^1(K_v, F_{\overline{\eta}}).$$

Remarque 5.2.1. Ici aussi on utilise que $S \neq \emptyset$.

Par conséquent, si l'on note $D^1_{sh,S}(F) = \varinjlim_{U\supseteq \Omega_K\setminus S} D^1_{sh,S}(U,F)$:

Proposition 5.2.2. *On a* $D^1_{sh,S}(F) = Ш^1_S(K, F_{\overline{\eta}})$.

5.3 Preuve du théorème de Poitou-Tate

Exactement comme dans le cas des corps de nombres, on insère $\mathcal{D}^2_S(U,F)$ dans une suite exacte :

Proposition 5.3.1. *La suite :*

$$\bigoplus_{v\in S} H^1(K_v, F_{\overline{\eta}}) \to H^2_c(U,F) \to \mathcal{D}^2_S(U,F) \to 0$$

est exacte.

Démonstration. La preuve est tout à fait analogue à celle de la proposition 3.1.5. □

De manière identique au cas des corps de nombres, cela entraîne, grâce au théorème d'Artin-Verdier, que $D^1_{sh,S}(F)$ et $\mathcal{D}^2_S(U,F^D)$ sont finis et duaux dès que U est contenu dans U_0, puisque p ne divise pas $|F_{\overline{\eta}}|$, et donc :

Théorème 5.3.2. *Si F vérifie les hypothèses (H1) et (H2), les groupes* $Ш^1_S(K, F_{\overline{\eta}})$ *et* $Ш^2_S(K, F^D_{\overline{\eta}})$ *sont finis et duaux.*

Exactement comme dans le cas des corps de nombres, le théorème de Poitou-Tate en découle.

6 Le théorème de Cassels-Tate pour les variétés abéliennes

Dans cette section, nous allons montrer comment obtenir le théorème de Cassels-Tate pour les variétés abéliennes à l'aide du théorème d'Artin-Verdier. Nous suivons la partie II.5 de [Mil06].
Soit K un corps de nombres. On note comme d'habitude X le spectre de son anneau des entiers. Soient U un ouvert non vide de X et $\mathcal{A}$ un schéma abélien sur U (c'est-à-dire un schéma en groupes sur U propre, lisse, dont les fibres géométriques sont connexes). On note alors $A = \mathcal{A} \times_U K$: c'est une variété abélienne sur K. On rappelle que, dans ce contexte, $\mathcal{A}$ est le modèle de Néron de A, c'est-à-dire que $\mathcal{A}$ représente le faisceau g_*A, où $g : \text{Spec } K \to U$. En particulier, $\mathcal{A}(U) = A(K)$, et donc le théorème de Mordell-Weil impose que $\mathcal{A}(U)$ est un groupe abélien de type fini. D'autre part, pour chaque entier naturel m, on dispose du noyau $\mathcal{A}[m]$ de la multiplication par m sur $\mathcal{A}$. Lorsque m est inversible sur U, le schéma en groupes $\mathcal{A}[m]$ est fini étale sur U : il représente donc un faisceau constructible localement constant. Finalement, nous rappelons qu'il existe un schéma abélien dual de $\mathcal{A}$, que l'on note $\mathcal{A}^t$ et qui représente le faisceau $\underline{\text{Ext}}^1_U(\mathcal{A}, \mathbb{G}_m)$, ainsi qu'une variété abélienne duale de A, que l'on note A^t, qui représente le faisceau $\underline{\text{Ext}}^1_K(A, \mathbb{G}_m)$ et qui n'est autre que la fibre de $\mathcal{A}^t$ au point générique. De plus, on a des isomorphismes $(\mathcal{A}^t)^t \cong \mathcal{A}$ et $(A^t)^t \cong A$, et pour tout entier naturel m inversible sur U, $\mathcal{A}^t[m]$ représente le faisceau $\underline{\text{Hom}}_U(\mathcal{A}[m], \mathbb{G}_m)$.
Fixons un nombre premier p inversible sur U. On notera alors :

- $H\{p\} = \varinjlim_n H[p^n]$ la torsion p-primaire d'un groupe abélien H de torsion.
- $H^r(U, \mathcal{A}\{p\}) = \varinjlim_n H^r(U, \mathcal{A}[p^n])$.
- $T_pH = \varprojlim_p A[p^n]$ pour chaque groupe abélien H.
- $H^r(U, T_p\mathcal{A}) = \varprojlim_n H^r(U, \mathcal{A}[p^n])$.
- $H^{(p)} = \varprojlim_n H/p^n$ le complété pour la topologie p-adique de chaque groupe abélien H.
- $H_{\text{div}} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} nH$ pour chaque groupe abélien H.

Nous avons d'abord besoin de quelques lemmes techniques. Le premier porte sur la nature des groupes de cohomologie du schéma abélien $\mathcal{A}$:

Lemme 6.0.3. *(i) Le groupe $H^0(U, \mathcal{A})$ est de type fini.*
(ii) Pour $r > 0$, le groupe $H^r(U, \mathcal{A})$ est de torsion et sa partie p-primaire est de type cofini.
(iii) Le groupe $H^2_c(U, \mathcal{A})$ est de torsion et sa partie p-primaire est de type cofini.

Démonstration. (i) Ce n'est autre que le théorème de Mordell-Weil !
(ii) On sait que $\mathcal{A}$ représente le faisceau g_*A sur U. On peut alors écrire la suite

spectrale de Leray :

$$H^r(U, R^s g_* A) \Rightarrow H^{r+s}(K, A).$$

En calculant les tiges de $R^s g_* A$, on prouve aisément que, pour $s > 0$, $R^s g_* A$ est un faisceau de torsion. Comme U est quasi-compact, cela entraîne que $H^r(U, R^s g_* A)$ est de torsion pour $r \geq 0$ et $s > 0$. De plus, $H^r(K, A)$ est de torsion pour $r > 0$. La suite spectrale entraîne alors que $H^r(U, \mathcal{A})$ est bien de torsion.

Reste à prouver que $H^r(U, \mathcal{A})[p]$ est fini. On dispose d'une suite exacte :

$$0 \to \mathcal{A}[p] \to \mathcal{A} \to \mathcal{A} \to 0.$$

Comme $\mathcal{A}[p]$ représente un faisceau constructible localement constant de p-torsion avec p inversible sur U, $H^r(U, \mathcal{A}[p])$ est fini pour tout r. La suite exacte longue de cohomologie permet alors de déduire la finitude de $H^r(U, \mathcal{A})[p]$.

(iii) On a une suite exacte :

$$\ldots \to \bigoplus_{v \in \Omega_K \setminus U} H^1(K_v, A) \to H^2_c(U, \mathcal{A}) \to H^2(U, \mathcal{A}) \to \ldots$$

Comme les $H^1(K_v, A)$ sont de torsion et comme les $H^1(K_v, A)[p]$ sont finis, grâce à (ii), on conclut que $H^2_c(U, \mathcal{A})$ est de torsion et sa partie p-primaire est de type cofini.

□

Nous aurons aussi besoin des suites exactes suivantes, qui relient $H^1(U, \mathcal{A}^t\{p\})$ à $H^1(U, \mathcal{A}^t)\{p\}$ et $H^2_c(U, T_p\mathcal{A})$ à $T_p H^2_c(U, \mathcal{A})$:

Lemme 6.0.4. *Il existe des suites exactes :*

$$0 \to H^0(U, \mathcal{A}^t) \otimes_{\mathbb{Z}} (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})\{p\} \to H^1(U, \mathcal{A}^t\{p\}) \to H^1(U, \mathcal{A}^t)\{p\} \to 0,$$

$$0 \to H^1_c(U, \mathcal{A})^{(p)} \to H^2_c(U, T_p\mathcal{A}) \to T_p H^2_c(U, \mathcal{A}) \to 0.$$

Démonstration. • Pour chaque entier naturel n on dispose d'une suite exacte :

$$0 \to \mathcal{A}^t[p^n] \to \mathcal{A}^t \to \mathcal{A}^t \to 0.$$

La suite exacte longue de cohomologie fournit alors une suite exacte courte :

$$0 \to H^0(U, \mathcal{A}^t)/p^n \to H^1(U, \mathcal{A}^t[p^n]) \to H^1(U, \mathcal{A}^t)[p^n] \to 0.$$

En prenant la limite inductive, on obtient la suite exacte :

$$0 \to H^0(U, \mathcal{A}^t) \otimes_{\mathbb{Z}} (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})\{p\} \to H^1(U, \mathcal{A}^t\{p\}) \to H^1(U, \mathcal{A}^t)\{p\} \to 0.$$

- Pour chaque entier naturel n on dispose d'une suite exacte :

$$0 \to \mathcal{A}[p^n] \to \mathcal{A} \to \mathcal{A} \to 0.$$

La suite exacte longue de cohomologie fournit alors une suite exacte courte :

$$0 \to H^1_c(U, \mathcal{A})/p^n \to H^2_c(U, \mathcal{A}[p^n]) \to H^2_c(U, \mathcal{A})[p^n] \to 0.$$

Comme $H^2_c(U, \mathcal{A}[p^n])$ est fini, $H^1_c(U, \mathcal{A})/p^n$ l'est aussi, et donc $\varprojlim_n^{(1)} H^1_c(U, \mathcal{A})/p^n = 0$. Par conséquent, par passage à la limite projective, on dispose d'une suite exacte :

$$0 \to H^1_c(U, \mathcal{A})^{(p)} \to H^2_c(U, T_p\mathcal{A}) \to T_p H^2_c(U, \mathcal{A}) \to 0.$$

□

Nous aurons finalement besoin des accouplements suivants, qui proviennent du théorème d'Artin-Verdier :

Lemme 6.0.5. *(i) Il existe un accouplement canonique :*

$$H^1(U, \mathcal{A}^t\{p\}) \times H^2_c(U, T_p\mathcal{A}) \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$$

qui est non dégénéré.
(ii) Il existe un accouplement canonique :

$$H^1(U, \mathcal{A}^t) \times H^1_c(U, \mathcal{A}) \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}.$$

Démonstration.

(i) Pour chaque entier naturel n, les schémas en groupes $\mathcal{A}[p^n]$ et $\mathcal{A}^t[p^n]$ représentent des faisceaux constructibles localement constants sur U et le faisceau représenté par $\mathcal{A}^t[p^n]$ est $(\mathcal{A}[p^n])^D = \underline{\mathrm{Hom}}_U(\mathcal{A}[p^n], \mathbb{G}_m)$. D'après le corollaire 4.13.1, on dispose d'un accouplement canonique :

$$H^1(U, \mathcal{A}^t[p^n]) \times H^2_c(U, \mathcal{A}[p^n]) \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z},$$

qui est non dégénéré. Il suffit alors de passer à la limite pour obtenir un accouplement non dégénéré :

$$H^1(U, \mathcal{A}^t\{p\}) \times H^2_c(U, T_p\mathcal{A}) \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}.$$

(ii) On dispose d'un accouplement canonique :

$$\mathrm{Ext}^2_U(\mathcal{A}, \mathbb{G}_m) \times H^1_c(U, \mathcal{A}) \to H^3_c(U, \mathbb{G}_m) \cong \mathbb{Q}/\mathbb{Z}.$$

De plus, la suite spectrale des Ext s'écrit :

$$H^r(U, \underline{\mathrm{Ext}}^s_U(\mathcal{A}, \mathbb{G}_m)) \Rightarrow \mathrm{Ext}^{r+s}_U(\mathcal{A}, \mathbb{G}_m).$$

Or $\underline{\mathrm{Hom}}_U(\mathcal{A}, \mathbb{G}_m) = 0$. On en déduit l'existence d'un morphisme naturel :

$$H^1(U, \underline{\mathrm{Ext}}^1_U(\mathcal{A}, \mathbb{G}_m)) \to \mathrm{Ext}^2_U(\mathcal{A}, \mathbb{G}_m).$$

Mais $\mathcal{A}^t$ représente le faisceau $\underline{\mathrm{Ext}}^1_U(\mathcal{A}, \mathbb{G}_m)$, d'où un morphisme :

$$H^1(U, \mathcal{A}^t) \to \mathrm{Ext}^2_U(\mathcal{A}, \mathbb{G}_m)$$

et un accouplement :

$$H^1(U, \mathcal{A}^t) \times H^1_c(U, \mathcal{A}) \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}.$$

□

Nous allons maintenant passer à la preuve du théorème de Cassels-Tate. Pour ce faire, nous posons $D^1(U, \mathcal{A}) = \mathrm{Im}(H^1_c(U, \mathcal{A}) \to H^1(U, \mathcal{A})) = \mathrm{Ker}(H^1(U, \mathcal{A}) \to \bigoplus_{v \in \Omega_K \setminus U} H^1(K_v, A))$. C'est un groupe de torsion dont la composante p-primaire est de type cofini. L'intérêt de définir ce groupe vient du fait qu'il est isomorphe au groupe de Shafarevich :

Lemme 6.0.6. *L'application naturelle $H^1(U, \mathcal{A}) \to H^1(K, A)$ induit un isomorphisme $D^1(U, \mathcal{A}) \cong Ш^1(K, A)$, où $Ш^1(K, A) = Ker(H^1(K, A) \to \prod_{v \in \Omega_K} H^1(K_v, A))$.*

Démonstration. Rappelons que $\mathcal{A}$ représente le faisceau g_*A. Or la suite spectrale de Leray s'écrit :

$$H^r(U, R^s g_* A) \Rightarrow H^{r+s}(K, A).$$

Cela fournit alors une suite exacte courte :

$$0 \to H^1(U, \mathcal{A}) \to H^1(K, A) \to H^0(U, R^1 g_* A).$$

Soit P un ensemble de points géométriques tels que, pour tout $v \in U$, il existe un unique élément de P d'image v. On sait alors que $R^1 g_* A$ s'injecte dans $\prod_{u \in P} u_* u^* R^1 g_* A$ (c'est le premier terme de la résolution de Godement). On en déduit que $H^0(U, R^1 g_* A)$ s'injecte dans $\prod_{u \in P} u_* u^* R^1 g_* A(U) = \prod_{v \in U} (R^1 g_* A)_{\overline{v}} = \prod_{v \in U \setminus \{\eta\}} H^1(K_v^{nr}, A)$. De plus, comme A a bonne réduction sur U (puisque $\mathcal{A}$ est un schéma abélien sur U tel que $A \cong \mathcal{A} \times_U \mathrm{Spec}\ K$), d'après la proposition I.3.8 de [Mil06], on a $H^1(\mathrm{Gal}(K_v^{nr}/K_v), A(K_v^{nr})) = 0$. Par conséquent, d'après la suite d'inflation-restriction, la restriction $\prod_{v \in U \setminus \{\eta\}} H^1(K_v, A) \to \prod_{v \in U \setminus \{\eta\}} H^1(K_v^{nr}, A)$ est injective, et donc on obtient une suite exacte :

$$0 \to H^1(U, \mathcal{A}) \to H^1(K, A) \to \prod_{v \in U \setminus \{\eta\}} H^1(K_v, A).$$

De plus, on dispose aussi de la suite exacte :

$$0 \to D^1(U, \mathcal{A}) \to H^1(U, A) \to \bigoplus_{v \in \Omega_K \setminus U} H^1(K_v, A).$$

On déduit que la suite suivante est exacte :

$$0 \to D^1(U, \mathcal{A}) \to H^1(K, A) \to \prod_{v \in \Omega_K} H^1(K_v, A),$$

d'où le résultat. □

Afin d'établir un théorème de dualité pour le groupe de Shafarevich, il convient donc d'établir un théorème de dualité pour le groupe $D^1(U, \mathcal{A})$:

Proposition 6.0.7. *Il existe un accouplement canonique :*

$$D^1(U, \mathcal{A}^t)\{p\}/(D^1(U, \mathcal{A}^t)\{p\})_{div} \times D^1(U, \mathcal{A})\{p\}/(D^1(U, \mathcal{A})\{p\})_{div} \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$$

qui est non dégénéré.

Il convient d'établir préalablement le lemme suivant :

Lemme 6.0.8. *La suite :*

$$\bigoplus_{v \in \Omega_K \setminus U} H^0(K_v, A)^{(p)} \to H^1_c(U, \mathcal{A})^{(p)} \to D^1(U, \mathcal{A})^{(p)} \to 0$$

est exacte.

Démonstration. Nous disposons d'une suite exacte :

$$\bigoplus_{v \in \Omega_K \setminus U} H^0(K_v, A) \to H^1_c(U, \mathcal{A}) \to D^1(U, \mathcal{A}) \to 0,$$

d'où des suites exactes pour tout n :

$$\bigoplus_{v \in \Omega_K \setminus U} H^0(K_v, A)/p^n \to H^1_c(U, \mathcal{A})/p^n \to D^1(U, \mathcal{A})/p^n \to 0.$$

Notons $K_n = \mathrm{Ker}(H^1_c(U, \mathcal{A})/p^n \to D^1(U, \mathcal{A})/p^n)$ et $K'_n = \mathrm{Ker}(\bigoplus_{v \in \Omega_K \setminus U} H^0(K_v, A)/p^n \to K_n)$. On obtient alors deux suites exactes :

$$0 \to K_n \to H^1_c(U, \mathcal{A})/p^n \to D^1(U, \mathcal{A})/p^n \to 0,$$

$$0 \to K'_n \to \bigoplus_{v \in \Omega_K \setminus U} H^0(K_v, A)/p^n \to K_n \to 0.$$

Comme K_n et K'_n sont finis, on a $\varprojlim_n^{(1)} K_n = \varprojlim_n^{(1)} K'_n = 0$. On peut donc passer à la limite projective dans les deux suites précédentes, ce qui fournit la suite exacte :

$$\bigoplus_{v \in \Omega_K \setminus U} H^0(K_v, A)^{(p)} \to H^1_c(U, \mathcal{A})^{(p)} \to D^1(U, \mathcal{A})^{(p)} \to 0.$$

□

Démonstration. (De la proposition 6.0.7)

- Rappelons que, d'après le lemme 6.0.5, nous disposons d'un accouplement non dégénéré :
$$H^1(U, \mathcal{A}^t\{p\}) \times H^2_c(U, T_p\mathcal{A}) \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z},$$
d'où un isomorphisme $H^1(U, \mathcal{A}^t\{p\}) \to H^2_c(U, T_p\mathcal{A})^*$. On dispose aussi d'un accouplement :
$$H^1(U, \mathcal{A}^t) \times H^1_c(U, \mathcal{A}) \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$$
qui induit pour chaque entier naturel n un accouplement :
$$H^1(U, \mathcal{A}^t)[p^n] \times H^1_c(U, \mathcal{A})/p^n \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$$
d'où un accouplement obtenu par passage à la limite :
$$H^1(U, \mathcal{A}^t)\{p\} \times H^1_c(U, \mathcal{A})^{(p)} \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}.$$
Ainsi on obtient un diagramme commutatif à lignes exactes (que l'on appellera diagramme (1)) :
$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & H^0(U, \mathcal{A}^t) \otimes_{\mathbb{Z}} (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})\{p\} \arrow[r] \arrow[d] & H^1(U, \mathcal{A}^t\{p\}) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & H^1(U, \mathcal{A}^t)\{p\} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\ 0 \arrow[r] & (T_p H^2_c(U, \mathcal{A}))^* \arrow[r] & (H^2_c(U, T_p\mathcal{A}))^* \arrow[r] & (H^1_c(U, \mathcal{A})^{(p)})^* \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$
De plus, nous disposons aussi d'un autre diagramme diagramme commutatif à lignes exactes (que l'on appellera diagramme (2)) :
$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & D^1(U, \mathcal{A}^t)\{p\} \arrow[r] \arrow[d] & H^1(U, \mathcal{A}^t)\{p\} \arrow[r] \arrow[d] & \bigoplus_{v \in \Omega_K \setminus U} H^1(K_v, A^t)\{p\} \arrow[d, "\cong"] \\ 0 \arrow[r] & (D^1(U, \mathcal{A})^{(p)})^* \arrow[r] & (H^1_c(U, \mathcal{A})^{(p)})^* \arrow[r] & \bigoplus_{v \in \Omega_K \setminus U} (H^0(K_v, A)^{(p)})^* \end{tikzcd}$$
Le morphisme vertical de droite est bien un isomorphisme d'après le théorème de dualité pour les variétés abéliennes sur un corps local (corollaire I.3.4 de [Mil06]).
- Montrons d'abord que $\mathrm{Ker}(D^1(U, \mathcal{A}^t)\{p\} \to (D^1(U, \mathcal{A})^{(p)})^*)$ est divisible. En utilisant les diagrammes (1) et (2) et le lemme du serpent, on obtient :
$$\begin{aligned} \mathrm{Ker}(D^1(U, \mathcal{A}^t)\{p\} \to (D^1(U, \mathcal{A})^{(p)})^*) &\cong \mathrm{Ker}(H^1(U, \mathcal{A}^t)\{p\} \to (H^1_c(U, \mathcal{A})^{(p)})^*) \\ &\cong \mathrm{Coker}(H^0(U, \mathcal{A}^t) \otimes_{\mathbb{Z}} (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})\{p\} \to (T_p H^2_c(U, \mathcal{A}))^*) \end{aligned}$$

Comme $H^2_c(U,\mathcal{A})$ est de torsion et $H^2_c(U,\mathcal{A})\{p\}$ est de torsion de type cofini, le groupe $(T_pH^2_c(U,\mathcal{A}))^* = (T_p(H^2_c(U,\mathcal{A})\{p\}))^*$ est isomorphe à $(\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p)^r$ pour un certain entier r : il est donc divisible. On en déduit que $\mathrm{Ker}(D^1(U,\mathcal{A}^t)\{p\} \to (D^1(U,\mathcal{A})^{(p)})^*)$ est divisible.

- Remarquons maintenant que $D^1(U,\mathcal{A})$ est de torsion et que sa partie p-primaire est de type cofini. Cela entraîne que le morphisme naturel $D^1(U,\mathcal{A})\{p\} \to D^1(U,\mathcal{A})^{(p)}$ induit un isomorphisme $D^1(U,\mathcal{A})\{p\}/(D^1(U,\mathcal{A})\{p\})_{\mathrm{div}} \cong D^1(U,\mathcal{A})^{(p)}$. On en déduit d'une part que

$$\mathrm{Ker}(D^1(U,\mathcal{A}^t)\{p\} \to (D^1(U,\mathcal{A})\{p\})^*) = \mathrm{Ker}(D^1(U,\mathcal{A}^t)\{p\} \to (D^1(U,\mathcal{A})^{(p)})^*)$$

est divisible et d'autre part que $\mathrm{Ker}(D^1(U,\mathcal{A})\{p\} \to (D^1(U,\mathcal{A}^t)\{p\})^*)$ contient $(D^1(U,\mathcal{A})\{p\})_{\mathrm{div}}$. En remplaçant $\mathcal{A}$ par $\mathcal{A}^t$, on obtient aussi que $\mathrm{Ker}(D^1(U,\mathcal{A})\{p\} \to (D^1(U,\mathcal{A}^t)\{p\})^*)$ est divisible et que $\mathrm{Ker}(D^1(U,\mathcal{A}^t)\{p\} \to (D^1(U,\mathcal{A})\{p\})^*)$ contient $(D^1(U,\mathcal{A}^t)\{p\})_{\mathrm{div}}$. Cela fournit donc un accouplement non dégénéré :

$$D^1(U,\mathcal{A}^t)\{p\}/(D^1(U,\mathcal{A}^t)\{p\})_{\mathrm{div}} \times D^1(U,\mathcal{A})\{p\}/(D^1(U,\mathcal{A})\{p\})_{\mathrm{div}} \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}.$$

□

Donnons-nous maintenant une variété abélienne A sur K (qui n'est pas définie comme la fibre au point générique d'un schéma abélien) et montrons enfin le théorème de Cassels-Tate pour les variétés abéliennes :

Théorème 6.0.9. ***(Théorème de Cassels-Tate pour les variétés abéliennes)*** *Soit A une variété abélienne sur K. Alors il existe un accouplement non dégénéré de groupes de torsion*

$$Ш^1(K,A^t)/Ш^1(K,A^t)_{div} \times Ш^1(K,A)/Ш^1(K,A)_{div} \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}.$$

De plus, $Ш^1(K,A^t)$ et $Ш^1(K,A)$ sont de torsion, et leurs composantes p-primaires sont de type cofini pour tout premier p.

Démonstration. Soit p un nombre premier. Soit U un ouvert non vide de X sur lequel A a bonne réduction et sur lequel p est inversible. Sous de telles hypothèses, le modèle de Néron $\mathcal{A}$ de A sur U est un schéma abélien. On déduit alors de tout ce qui précède que l'on a des isomorphismes $Ш^1(K,A) \cong D^1(U,\mathcal{A})$ et $Ш^1(K,A^t) \cong D^1(U,\mathcal{A}^t)$. Cela impose que $Ш^1(K,A)$ et $Ш^1(K,A^t)$ sont de torsion, que leurs composantes p-primaires sont de type cofini, et qu'il existe un accouplement non dégénéré :

$$Ш^1(K,A^t)\{p\}/(Ш^1(K,A^t)\{p\})_{\mathrm{div}} \times Ш^1(K,A)\{p\}/(Ш^1(K,A)\{p\})_{\mathrm{div}} \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}.$$

Cela étant vrai pour tout p, on obtient bien un accouplement non dégénéré :

$$Ш^1(K,A^t)/Ш^1(K,A^t)_{\mathrm{div}} \times Ш^1(K,A)/Ш^1(K,A)_{\mathrm{div}} \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}.$$

□

Références

[CS86] Gary Cornell and Joseph H. Silverman, editors. *Arithmetic geometry.* Springer-Verlag, New York, 1986. Papers from the conference held at the University of Connecticut, Storrs, Connecticut, July 30–August 10, 1984.

[Del77] P. Deligne. *Cohomologie étale.* Lecture Notes in Mathematics, Vol. 569. Springer-Verlag, Berlin, 1977. Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois-Marie SGA 4 1/2, Avec la collaboration de J. F. Boutot, A. Grothendieck, L. Illusie et J. L. Verdier.

[FK88] Eberhard Freitag and Reinhardt Kiehl. *Étale cohomology and the Weil conjecture*, volume 13 of *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (3) [Results in Mathematics and Related Areas (3)].* Springer-Verlag, Berlin, 1988. Translated from the German by Betty S. Waterhouse and William C. Waterhouse, With an historical introduction by J. A. Dieudonné.

[Fu11] Lei Fu. *Etale cohomology theory*, volume 13 of *Nankai Tracts in Mathematics.* World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Hackensack, NJ, 2011.

[Hab78] Klaus Haberland. *Galois cohomology of algebraic number fields.* VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1978. With two appendices by Helmut Koch and Thomas Zink.

[Kat86] Kazuya Kato. A Hasse principle for two-dimensional global fields. *J. Reine Angew. Math.*, 366 :142–183, 1986. With an appendix by Jean-Louis Colliot-Thélène.

[Mil80] James S. Milne. *Étale cohomology*, volume 33 of *Princeton Mathematical Series.* Princeton University Press, Princeton, N.J., 1980.

[Mil06] J. S. Milne. *Arithmetic duality theorems.* BookSurge, LLC, Charleston, SC, second edition, 2006.

[Mum70] David Mumford. *Abelian varieties.* Tata Institute of Fundamental Research Studies in Mathematics, No. 5. Published for the Tata Institute of Fundamental Research, Bombay, 1970.

[NSW08] Jürgen Neukirch, Alexander Schmidt, and Kay Wingberg. *Cohomology of number fields*, volume 323 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences].* Springer-Verlag, Berlin, second edition, 2008.

[Poi67] G. Poitou. *Cohomologie galoisienne des modules finis.* Séminaire de l'Institut de Mathématiques de Lille, sous la direction de G. Poitou. Travaux et Recherches Mathématiques, No. 13. Dunod, Paris, 1967.

[SGA73] *Théorie des topos et cohomologie étale des schémas.* Lecture Notes in Mathematics, Vol. 269, 270, 305. Springer-Verlag, Berlin, 1972-1973. Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois-Marie 1963–1964 (SGA 4), Dirigé par M. Artin, A. Grothendieck et J. L. Verdier. Avec la collaboration de P. Deligne et B. Saint-Donat.

[Sha72] Stephen S. Shatz. *Profinite groups, arithmetic, and geometry.* Princeton University Press, Princeton, N.J., 1972. Annals of Mathematics Studies, No. 67.

[Tam94] Günter Tamme. *Introduction to étale cohomology.* Universitext. Springer-Verlag, Berlin, 1994. Translated from the German by Manfred Kolster.

[Tat63] John Tate. Duality theorems in Galois cohomology over number fields. In *Proc. Internat. Congr. Mathematicians (Stockholm, 1962)*, pages 288–295. Inst. Mittag-Leffler, Djursholm, 1963.