Dualité et principe local-global sur les corps de fonctions

Soutenance de thèse de Diego Izquierdo

Université Paris-Sud et École normale supérieure

14 octobre 2016

Jury de soutenance:

Jean-Louis Colliot-Thélène
David Harari (directeur de thèse)
Bruno Kahn
Cédric Pépin
Alexei Skorobogatov
Tamás Szamuely

Introduction : Corps de nombres

Soient K un corps de nombres et Ω_K l'ensemble des places de K.
Pour $v \in \Omega_K$, on note K_v le complété de K par rapport à v.

Introduction : Corps de nombres

Soient K un corps de nombres et Ω_K l'ensemble des places de K. Pour $v \in \Omega_K$, on note K_v le complété de K par rapport à v.

Définition

Soit $\mathcal{F}$ une famille de K-variétés. On dit qu'elle vérifie le **principe local-global** si tout élément de $\mathcal{F}$ ayant des K_v-points pour tout $v \in \Omega_K$ a en fait des points rationnels.

Introduction : Corps de nombres

Soient K un corps de nombres et Ω_K l'ensemble des places de K. Pour $v \in \Omega_K$, on note K_v le complété de K par rapport à v.

Définition

Soit $\mathcal{F}$ une famille de K-variétés. On dit qu'elle vérifie le **principe local-global** si tout élément de $\mathcal{F}$ ayant des K_v-points pour tout $v \in \Omega_K$ a en fait des points rationnels.

Exemple

A. Théorème de Hasse-Minkowski (1924) : toute quadrique dans $\mathbb{P}^n_K$ vérifie le principe local-global.

Introduction : Corps de nombres

Soient K un corps de nombres et Ω_K l'ensemble des places de K. Pour $v \in \Omega_K$, on note K_v le complété de K par rapport à v.

Définition

Soit $\mathcal{F}$ une famille de K-variétés. On dit qu'elle vérifie le **principe local-global** si tout élément de $\mathcal{F}$ ayant des K_v-points pour tout $v \in \Omega_K$ a en fait des points rationnels.

Exemple

A. Théorème de Hasse-Minkowski (1924) : toute quadrique dans $\mathbb{P}^n_K$ vérifie le principe local-global.

B. Contre-exemple de Selmer (1951) : cubique d'équation $3x^3 + 4y^3 + 5z^3 = 0$ dans $\mathbb{P}^2_{\mathbb{Q}}$.

Introduction : Corps de nombres

Soit V une K-variété. On introduit le **groupe de Brauer** de V : $\mathrm{Br}\, V := H^2_{\text{ét}}(V, \mathbb{G}_m)$,

Introduction : Corps de nombres

Soit V une K-variété. On introduit le **groupe de Brauer** de V : $\mathrm{Br}\ V := H^2_{\text{ét}}(V, \mathbb{G}_m)$, ainsi que l'accouplement de **Brauer-Manin** :

$$\begin{aligned} V(\mathbb{A}_K) \times \mathrm{Br}\ V &\to \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \\ ((p_v)_{v \in \Omega_K}, \alpha) &\mapsto \sum_{v \in \Omega_K} \mathrm{inv}_v(p_v^* \alpha), \end{aligned}$$

$$p_v^* : \mathrm{Br}\ V \to \mathrm{Br}\ K_v, \qquad \mathrm{inv}_v : \mathrm{Br}\ K_v \hookrightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$$

Introduction : Corps de nombres

Soit V une K-variété. On introduit le **groupe de Brauer** de V : $\mathrm{Br}\, V := H^2_{\text{ét}}(V, \mathbb{G}_m)$, ainsi que l'accouplement de **Brauer-Manin** :

$$\begin{aligned} V(\mathbb{A}_K) \times \mathrm{Br}\, V &\to \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \\ ((p_v)_{v\in\Omega_K}, \alpha) &\mapsto \sum_{v\in\Omega_K} \mathrm{inv}_v(p_v^*\alpha), \end{aligned}$$

$$p_v^* : \mathrm{Br}\, V \to \mathrm{Br}\, K_v, \qquad \mathrm{inv}_v : \mathrm{Br}\, K_v \hookrightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$$

Fait (Manin)

$$V(K) \subseteq V(\mathbb{A}_K)^{\mathrm{Br}},$$

où $V(\mathbb{A}_K)^{\mathrm{Br}}$ est l'orthogonal de $\mathrm{Br}\, V$ dans l'accouplement de Brauer-Manin.

Introduction : Corps de nombres

Définition

Soit $\mathcal{F}$ une famille de K-variétés. On dit que l'**obstruction de Brauer-Manin** est la seule obstruction au principe local-global pour les éléments de $\mathcal{F}$ si :

$$\forall V \in \mathcal{F}, V(\mathbb{A}_K)^{\mathrm{Br}} \neq \emptyset \Rightarrow V(K) \neq \emptyset.$$

Introduction : Corps de nombres

Définition

Soit $\mathcal{F}$ une famille de K-variétés. On dit que l'**obstruction de Brauer-Manin** est la seule obstruction au principe local-global pour les éléments de $\mathcal{F}$ si :

$$\forall V \in \mathcal{F}, V(\mathbb{A}_K)^{\mathrm{Br}} \neq \emptyset \Rightarrow V(K) \neq \emptyset.$$

Théorème (Sansuc 1981)

L'obstruction de Brauer-Manin est la seule obstruction au principe local-global pour les K-espaces principaux homogènes sous des K-groupes linéaires connexes.

Introduction : Corps de nombres

Définition

Soit M un $\mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$-module discret. Pour $r \in \{1,2\}$, on définit les **groupes de Tate-Shafarevich** :

$$Ш^r(K,M) = \mathrm{Ker}\left(H^r(K,M) \to \prod_{v\in\Omega_K} H^r(K_v,M)\right).$$

Introduction : Corps de nombres

Définition

Soit M un $\mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$-module discret. Pour $r \in \{1, 2\}$, on définit les **groupes de Tate-Shafarevich** :

$$Ш^r(K, M) = \mathrm{Ker}\left(H^r(K, M) \to \prod_{v \in \Omega_K} H^r(K_v, M)\right).$$

Théorème (Poitou, Tate, 1962-1967)

Soient T un K-tore et $\hat{T}$ son module des caractères. Pour $r \in \{1, 2\}$, il existe un accouplement parfait de groupes finis :

$$Ш^r(K, T) \times Ш^{3-r}(K, \hat{T}) \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}.$$

Corps de fonctions de courbes : Corps étudiés

Notations

k : corps.

Corps de fonctions de courbes : Corps étudiés

Notations

k : corps.

X : courbe projective lisse géométriquement intègre sur k.

Corps de fonctions de courbes : Corps étudiés

Notations

k : corps.

X : courbe projective lisse géométriquement intègre sur k.

$K = k(X)$: corps des fonctions de X.

Corps de fonctions de courbes : Corps étudiés

Notations

k : corps.

X : courbe projective lisse géométriquement intègre sur k.

$K = k(X)$: corps des fonctions de X.

$X^{(1)}$: points de codimension 1 dans X.

Corps de fonctions de courbes : Corps étudiés

Deux points de vue possibles :

A. Tenir compte de toutes les places de K.

Corps de fonctions de courbes : Corps étudiés

Deux points de vue possibles :

A. Tenir compte de toutes les places de K.

B. Tenir compte uniquement des places de K provenant de $X^{(1)}$.

Corps de fonctions de courbes : Corps étudiés

Deux points de vue possibles :

A. Tenir compte de toutes les places de K.

Harbater, Hartmann, Kraschen ; Colliot-Thélène, Parimala, Suresh

B. Tenir compte uniquement des places de K provenant de $X^{(1)}$.

Corps de fonctions de courbes : Corps étudiés

Deux points de vue possibles :

A. Tenir compte de toutes les places de K.

Harbater, Hartmann, Kraschen ; Colliot-Thélène, Parimala, Suresh

B. Tenir compte uniquement des places de K provenant de $X^{(1)}$.

Harari, Scheiderer, Szamuely ; Colliot-Thélène, Harari

Corps de fonctions de courbes : Corps étudiés

Deux points de vue possibles :

A. Tenir compte de toutes les places de K.

Harbater, Hartmann, Kraschen ; Colliot-Thélène, Parimala, Suresh

B. Tenir compte uniquement des places de K provenant de $X^{(1)}$.

Harari, Scheiderer, Szamuely ; Colliot-Thélène, Harari

Attention !

Dans toute la suite, nous adopterons le second point de vue. Ainsi, on dira qu'une famille $\mathcal{F}$ de K-variétés vérifie le principe local-global si :

$$\forall V \in \mathcal{F}, \prod_{v \in X^{(1)}} V(K_v) \neq \emptyset \Rightarrow V(K) \neq \emptyset.$$

Corps de fonctions de courbes : Corps étudiés

Définition

Les corps **0-locaux** sont les corps finis et $\mathbb{C}((t))$. Un **corps** d**-local** ($d \geq 1$) est un corps de valuation discrète complet dont le corps résiduel est $(d-1)$-local.

Corps de fonctions de courbes : Corps étudiés

Définition

Les corps **0-locaux** sont les corps finis et $\mathbb{C}((t))$. Un **corps** d**-local** ($d \geq 1$) est un corps de valuation discrète complet dont le corps résiduel est $(d-1)$-local.

Exemple

A. Corps 1-locaux : corps p-adiques, $\mathbb{F}_q((t))$ et $\mathbb{C}((t_0))((t_1))$.

Corps de fonctions de courbes : Corps étudiés

Définition

Les corps **0-locaux** sont les corps finis et $\mathbb{C}((t))$. Un **corps** d**-local** ($d \geq 1$) est un corps de valuation discrète complet dont le corps résiduel est $(d-1)$-local.

Exemple

A. Corps 1-locaux : corps p-adiques, $\mathbb{F}_q((t))$ et $\mathbb{C}((t_0))((t_1))$.

B. Les corps $\mathbb{Q}_p((t))$ et $\mathbb{C}((t_0))((t_1))((t_2))$ sont 2-locaux.

Corps de fonctions de courbes : Corps étudiés

Définition

Les corps **0-locaux** sont les corps finis et $\mathbb{C}((t))$. Un **corps** d**-local** ($d \geq 1$) est un corps de valuation discrète complet dont le corps résiduel est $(d-1)$-local.

Exemple

A. Corps 1-locaux : corps p-adiques, $\mathbb{F}_q((t))$ et $\mathbb{C}((t_0))((t_1))$.

B. Les corps $\mathbb{Q}_p((t))$ et $\mathbb{C}((t_0))((t_1))((t_2))$ sont 2-locaux.

Notations

Dans toute la suite, k sera un corps d-local et on notera k_i le corps i-local correspondant (pour $0 \leq i \leq d$).

Corps de fonctions de courbes : Corps étudiés

Théorème

Si $car(k_1) = 0$, *alors on a une dualité parfaite de groupes finis :*

$$H^r(k, M) \times H^{d+1-r}(k, Hom(M, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(d))) \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z},$$

pour tout $Gal(\overline{k}/k)$*-module discret fini* M*.*

Corps de fonctions de courbes : Corps étudiés

Théorème

Si $car(k_1) = 0$, *alors on a une dualité parfaite de groupes finis :*

$$H^r(k, M) \times H^{d+1-r}(k, Hom(M, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(d))) \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z},$$

pour tout $Gal(\overline{k}/k)$*-module discret fini* M*.*

Hypothèse

On supposera que $\mathrm{car}(k_1) = 0$, de sorte que $k = k_1((t_2))...((t_d))$ avec k_1 corps p-adique ou $k = \mathbb{C}((t_0))...((t_d))$.

Corps de fonctions de courbes : Corps étudiés

Théorème

Si $car(k_1) = 0$, *alors on a une dualité parfaite de groupes finis :*

$$H^r(k, M) \times H^{d+1-r}(k, Hom(M, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(d))) \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z},$$

pour tout $Gal(\overline{k}/k)$*-module discret fini* M*.*

Hypothèse

On supposera que $\mathrm{car}(k_1) = 0$, de sorte que $k = k_1((t_2))...((t_d))$ avec k_1 corps p-adique ou $k = \mathbb{C}((t_0))...((t_d))$.

Remarque

$$\mathrm{cd}\ k = d + 1, \qquad \mathrm{cd}\ K = d + 2.$$

Corps de fonctions de courbes : Dualité pour les tores

k	K	cd K	dual d'un tore T
	$\mathbb{Q}(i)$	2	$\hat{T} = \hat{T} \otimes \mathbb{Z}$

Corps de fonctions de courbes : Dualité pour les tores

k	K	cd K	dual d'un tore T
	$\mathbb{Q}(i)$	2	$\hat{T} = \hat{T} \otimes \mathbb{Z}$
$\mathbb{F}_q$	$k(X)$	2	$\hat{T} = \hat{T} \otimes \mathbb{Z}$
$\mathbb{C}((t))$	$k(X)$	2	$\hat{T} = \hat{T} \otimes \mathbb{Z}$

Corps de fonctions de courbes : Dualité pour les tores

k	K	cd K	dual d'un tore T
	$\mathbb{Q}(i)$	2	$\hat{T} = \hat{T} \otimes \mathbb{Z}$
$\mathbb{F}_q$	$k(X)$	2	$\hat{T} = \hat{T} \otimes \mathbb{Z}$
$\mathbb{C}((t))$	$k(X)$	2	$\hat{T} = \hat{T} \otimes \mathbb{Z}$
p-adique	$k(X)$	3	$T' = \hat{T} \otimes \mathbb{G}_m$

Corps de fonctions de courbes : Dualité pour les tores

k	K	cd K	dual d'un tore T
	$\mathbb{Q}(i)$	2	$\hat{T} = \hat{T} \otimes \mathbb{Z}$
$\mathbb{F}_q$	$k(X)$	2	$\hat{T} = \hat{T} \otimes \mathbb{Z}$
$\mathbb{C}((t))$	$k(X)$	2	$\hat{T} = \hat{T} \otimes \mathbb{Z}$
p-adique	$k(X)$	3	$T' = \hat{T} \otimes \mathbb{G}_m$
d-local	$k(X)$	$d+2$	$\tilde{T} = \hat{T} \otimes ?$

Corps de fonctions de courbes : Dualité pour les tores

Complexes de Bloch

Soient E un corps et Y un schéma séparé lisse sur E. Soit $i \geq 0$. Il existe un complexe $\mathbb{Z}(i)$ de faisceaux étales sur Y tel que :

Corps de fonctions de courbes : Dualité pour les tores

Complexes de Bloch

Soient E un corps et Y un schéma séparé lisse sur E. Soit $i \geq 0$. Il existe un complexe $\mathbb{Z}(i)$ de faisceaux étales sur Y tel que :

A. $\mathbb{Z}(0) \cong \mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z}(1) \cong \mathbb{G}_m[-1]$.

Corps de fonctions de courbes : Dualité pour les tores

Complexes de Bloch

Soient E un corps et Y un schéma séparé lisse sur E. Soit $i \geq 0$. Il existe un complexe $\mathbb{Z}(i)$ de faisceaux étales sur Y tel que :

A. $\mathbb{Z}(0) \cong \mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z}(1) \cong \mathbb{G}_m[-1]$.

B. (Geisser-Levine 2001) Pour m inversible sur E :

$$\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \otimes^{\mathbf{L}} \mathbb{Z}(i) \cong \mu_m^{\otimes i}.$$

Corps de fonctions de courbes : Dualité pour les tores

Complexes de Bloch

Soient E un corps et Y un schéma séparé lisse sur E. Soit $i \geq 0$. Il existe un complexe $\mathbb{Z}(i)$ de faisceaux étales sur Y tel que :

A. $\mathbb{Z}(0) \cong \mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z}(1) \cong \mathbb{G}_m[-1]$.

B. (Geisser-Levine 2001) Pour m inversible sur E :

$$\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \otimes^{\mathbf{L}} \mathbb{Z}(i) \cong \mu_m^{\otimes i}.$$

C. (Beilinson-Lichtenbaum, conséquence de Bloch-Kato)

$$H^{i+1}(E, \mathbb{Z}(i)) = 0.$$

Corps de fonctions de courbes : Dualité pour les tores

k	K	cd K	dual d'un tore T
	$\mathbb{Q}(i)$	2	$\hat{T} = \hat{T} \otimes \mathbb{Z} = \hat{T} \otimes \mathbb{Z}(0)$
$\mathbb{F}_q$	$k(X)$	2	$\hat{T} = \hat{T} \otimes \mathbb{Z} = \hat{T} \otimes \mathbb{Z}(0)$
$\mathbb{C}((t))$	$k(X)$	2	$\hat{T} = \hat{T} \otimes \mathbb{Z} = \hat{T} \otimes \mathbb{Z}(0)$
p-adique	$k(X)$	3	$T' = \hat{T} \otimes \mathbb{G}_m = \hat{T} \otimes \mathbb{Z}(1)[1]$
d-local	$k(X)$	$d+2$	$\tilde{T} = \hat{T} \otimes^{\mathbf{L}} \mathbb{Z}(d)$

Corps de fonctions de courbes : Dualité pour les tores

Théorème (I. 2014)

Soit T un K-tore. Soit $\tilde{T} = \hat{T} \otimes^{\mathbf{L}} \mathbb{Z}(d)$.

Corps de fonctions de courbes : Dualité pour les tores

Théorème (I. 2014)

Soit T un K-tore. Soit $\tilde{T} = \hat{T} \otimes^{\mathbf{L}} \mathbb{Z}(d)$. On a des accouplements parfaits de groupes finis :

$$Ш^1(K, T) \times \overline{Ш^{d+2}(K, \tilde{T})} \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z},$$

Corps de fonctions de courbes : Dualité pour les tores

Théorème (I. 2014)

Soit T un K-tore. Soit $\tilde{T} = \hat{T} \otimes^{\mathbf{L}} \mathbb{Z}(d)$. On a des accouplements parfaits de groupes finis :

$$Ш^1(K, T) \times \overline{Ш^{d+2}(K, \tilde{T})} \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z},$$

$$Ш^{d+1}(K, \tilde{T}) \times \overline{Ш^2(K, T)} \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}.$$

Corps de fonctions de courbes : Dualité pour les tores

Remarque

A. Symétrisation.

Corps de fonctions de courbes : Dualité pour les tores

Remarque

A. Symétrisation.

B. Preuve = Dualité d'Artin-Verdier + Dualité locale.

Corps de fonctions de courbes : Dualité pour les tores

Remarque

A. Symétrisation.

B. Preuve = Dualité d'Artin-Verdier + Dualité locale.

C. Modules finis, groupes de type multiplicatif et complexes à deux termes de tores (I. 2014).

Corps de fonctions de courbes : Dualité pour les tores

Remarque

A. Symétrisation.

B. Preuve = Dualité d'Artin-Verdier + Dualité locale.

C. Modules finis, groupes de type multiplicatif et complexes à deux termes de tores (I. 2014).

D. Variétés abéliennes (I. 2015).

Corps de fonctions de courbes : Dualité pour les tores

Remarque

A. Symétrisation.

B. Preuve = Dualité d'Artin-Verdier + Dualité locale.

C. Modules finis, groupes de type multiplicatif et complexes à deux termes de tores (I. 2014).

D. Variétés abéliennes (I. 2015). Soit A une variété abélienne sur $L = \mathbb{C}((t_0))((t_1))$ de variété abélienne duale A^t.

Corps de fonctions de courbes : Dualité pour les tores

Remarque

A. Symétrisation.

B. Preuve = Dualité d'Artin-Verdier + Dualité locale.

C. Modules finis, groupes de type multiplicatif et complexes à deux termes de tores (I. 2014).

D. Variétés abéliennes (I. 2015). Soit A une variété abélienne sur $L = \mathbb{C}((t_0))((t_1))$ de variété abélienne duale A^t. On a alors un accouplement $H^1(L, A) \times H^0(L, A^t)^\wedge \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$, qui est parfait modulo divisibles.

Corps de fonctions de courbes : Dualité pour les tores

Remarque

A. Symétrisation.

B. Preuve = Dualité d'Artin-Verdier + Dualité locale.

C. Modules finis, groupes de type multiplicatif et complexes à deux termes de tores (I. 2014).

D. Variétés abéliennes (I. 2015). Soit A une variété abélienne sur $L = \mathbb{C}((t_0))((t_1))$ de variété abélienne duale A^t. On a alors un accouplement $H^1(L,A) \times H^0(L,A^t)^\wedge \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$, qui est parfait modulo divisibles. Plus précisément, on a une suite exacte : $0 \to (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^{m(A)} \to H^1(L,A) \to (H^0(L,A^t)^\wedge)^D \to 0$ où $m(A)$ est un entier naturel inférieur ou égal à $4 \dim A$.

Corps de fonctions de courbes : Dualité pour les tores

Remarque

A. Symétrisation.

B. Preuve = Dualité d'Artin-Verdier + Dualité locale.

C. Modules finis, groupes de type multiplicatif et complexes à deux termes de tores (I. 2014).

D. Variétés abéliennes (I. 2015). Soit A une variété abélienne sur $L = \mathbb{C}((t_0))((t_1))$ de variété abélienne duale A^t. On a alors un accouplement $H^1(L, A) \times H^0(L, A^t)^\wedge \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$, qui est parfait modulo divisibles. Plus précisément, on a une suite exacte : $0 \to (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^{m(A)} \to H^1(L, A) \to (H^0(L, A^t)^\wedge)^D \to 0$ où $m(A)$ est un entier naturel inférieur ou égal à $4 \dim A$.

E. Suites exactes de Poitou-Tate.

Corps de fonctions de courbes : Exemples et applications
Nullité de $Ш^2(K, \mathbb{G}_m)$

Théorème (Harari-Szamuely, 2013)

Si k est un corps p-adique, alors $Ш^2(K, \mathbb{G}_m) = 0$.

Corps de fonctions de courbes : Exemples et applications
Nullité de $Ш^2(K, \mathbb{G}_m)$

Théorème (Harari-Szamuely, 2013)

Si k est un corps p-adique, alors $Ш^2(K, \mathbb{G}_m) = 0$.

Exemple (I. 2014)

Dans les cas qui suivent, $Ш^2(K, \mathbb{G}_m) \neq 0$.

A. $k = \mathbb{Q}_p((t))$ et $X : y^2 = x(1-x)(x-p)$.

Corps de fonctions de courbes : Exemples et applications
Nullité de $Ш^2(K, \mathbb{G}_m)$

Théorème (Harari-Szamuely, 2013)

Si k est un corps p-adique, alors $Ш^2(K, \mathbb{G}_m) = 0$.

Exemple (I. 2014)

Dans les cas qui suivent, $Ш^2(K, \mathbb{G}_m) \neq 0$.

A. $k = \mathbb{Q}_p((t))$ et $X : y^2 = x(1-x)(x-p)$.

B. $k = \mathbb{C}((t_0))((t_1))$ et $X : y^2 = x(1-x)(x-t_0)$.

Corps de fonctions de courbes : Exemples et applications
Nullité de $Ш^2(K, \mathbb{G}_m)$

Théorème (I. 2014)

A. *On suppose que k_1 est un corps p-adique.*

Corps de fonctions de courbes : Exemples et applications
Nullité de $Ш^2(K, \mathbb{G}_m)$

Théorème (I. 2014)

A. *On suppose que k_1 est un corps p-adique. Soient $P \in \mathcal{O}_{k_1}[x, y, z]$ homogène et :*

$$\mathcal{X}_0 = Proj(\mathcal{O}_{k_1}[x, y, z]/(P)).$$

Corps de fonctions de courbes : Exemples et applications
Nullité de $Ш^2(K, \mathbb{G}_m)$

Théorème (I. 2014)

A. *On suppose que k_1 est un corps p-adique. Soient $P \in \mathcal{O}_{k_1}[x,y,z]$ homogène et :*

$$\mathcal{X}_0 = Proj(\mathcal{O}_{k_1}[x,y,z]/(P)).$$

Supposons que X est la courbe $\mathcal{X}_0 \times k$ et que $\mathcal{X}_0 \times k_0$ est une courbe lisse géométriquement intègre.

Corps de fonctions de courbes : Exemples et applications
Nullité de $Ш^2(K, \mathbb{G}_m)$

Théorème (I. 2014)

A. *On suppose que k_1 est un corps p-adique. Soient $P \in \mathcal{O}_{k_1}[x, y, z]$ homogène et :*

$$\mathcal{X}_0 = Proj(\mathcal{O}_{k_1}[x, y, z]/(P)).$$

Supposons que X est la courbe $\mathcal{X}_0 \times k$ et que $\mathcal{X}_0 \times k_0$ est une courbe lisse géométriquement intègre. Alors $Ш^2(K, \mathbb{Z}) = Ш^2(K, \mathbb{G}_m) = 0$.

Corps de fonctions de courbes : Exemples et applications
Nullité de $Ш^2(K, \mathbb{G}_m)$

Théorème (I. 2014)

A. *On suppose que k_1 est un corps p-adique. Soient $P \in \mathcal{O}_{k_1}[x, y, z]$ homogène et :*

$$\mathcal{X}_0 = Proj(\mathcal{O}_{k_1}[x, y, z]/(P)).$$

Supposons que X est la courbe $\mathcal{X}_0 \times k$ et que $\mathcal{X}_0 \times k_0$ est une courbe lisse géométriquement intègre. Alors $Ш^2(K, \mathbb{Z}) = Ш^2(K, \mathbb{G}_m) = 0$.

B. *On suppose que $k_0 = \mathbb{C}((t))$.*

Corps de fonctions de courbes : Exemples et applications
Nullité de $Ш^2(K, \mathbb{G}_m)$

Théorème (I. 2014)

A. *On suppose que k_1 est un corps p-adique. Soient $P \in \mathcal{O}_{k_1}[x,y,z]$ homogène et :*

$$\mathcal{X}_0 = Proj\left(\mathcal{O}_{k_1}[x,y,z]/(P)\right).$$

Supposons que X est la courbe $\mathcal{X}_0 \times k$ et que $\mathcal{X}_0 \times k_0$ est une courbe lisse géométriquement intègre. Alors $Ш^2(K, \mathbb{Z}) = Ш^2(K, \mathbb{G}_m) = 0$.

B. *On suppose que $k_0 = \mathbb{C}((t))$. Soit X_0 la $\mathbb{C}((t))$-courbe elliptique d'équation $y^2 = x^3 + Ax + B$.*

Corps de fonctions de courbes : Exemples et applications
Nullité de $\text{Ш}^2(K,\mathbb{G}_m)$

Théorème (I. 2014)

A. *On suppose que k_1 est un corps p-adique. Soient $P \in \mathcal{O}_{k_1}[x,y,z]$ homogène et :*

$$\mathcal{X}_0 = Proj(\mathcal{O}_{k_1}[x,y,z]/(P)).$$

Supposons que X est la courbe $\mathcal{X}_0 \times k$ et que $\mathcal{X}_0 \times k_0$ est une courbe lisse géométriquement intègre. Alors $\text{Ш}^2(K,\mathbb{Z}) = \text{Ш}^2(K,\mathbb{G}_m) = 0$.

B. *On suppose que $k_0 = \mathbb{C}((t))$. Soit X_0 la $\mathbb{C}((t))$-courbe elliptique d'équation $y^2 = x^3 + Ax + B$. On suppose que X_0 a réduction modulo t de type additif et que $X = X_0 \times k$.*

Corps de fonctions de courbes : Exemples et applications
Nullité de $Ш^2(K, \mathbb{G}_m)$

Théorème (I. 2014)

A. *On suppose que k_1 est un corps p-adique. Soient $P \in \mathcal{O}_{k_1}[x, y, z]$ homogène et :*

$$\mathcal{X}_0 = Proj(\mathcal{O}_{k_1}[x, y, z]/(P)).$$

Supposons que X est la courbe $\mathcal{X}_0 \times k$ et que $\mathcal{X}_0 \times k_0$ est une courbe lisse géométriquement intègre. Alors $Ш^2(K, \mathbb{Z}) = Ш^2(K, \mathbb{G}_m) = 0$.

B. *On suppose que $k_0 = \mathbb{C}((t))$. Soit X_0 la $\mathbb{C}((t))$-courbe elliptique d'équation $y^2 = x^3 + Ax + B$. On suppose que X_0 a réduction modulo t de type additif et que $X = X_0 \times k$. Alors $Ш^2(K, \mathbb{Z}) = Ш^2(K, \mathbb{G}_m) = 0$.*

Corps de fonctions de courbes : Exemples et applications
Approximation faible

Soit T un K-tore.

Corps de fonctions de courbes : Exemples et applications
Approximation faible

Soit T un K-tore.

Définition

A. On dit que T vérifie l'**approximation faible** si $T(K)$ est dense dans $\prod_{v \in X^{(1)}} T(K_v)$.

Corps de fonctions de courbes : Exemples et applications
Approximation faible

Soit T un K-tore.

Définition

A. On dit que T vérifie l'**approximation faible** si $T(K)$ est dense dans $\prod_{v \in X^{(1)}} T(K_v)$.

B. On dit que T vérifie l'**approximation faible faible** s'il existe une partie finie S de $X^{(1)}$ telle que $T(K)$ est dense dans $\prod_{v \in X^{(1)} \setminus S} T(K_v)$.

Corps de fonctions de courbes : Exemples et applications
Approximation faible

Soit T un K-tore.

Définition

A. On dit que T vérifie l'**approximation faible** si $T(K)$ est dense dans $\prod_{v\in X^{(1)}} T(K_v)$.

B. On dit que T vérifie l'**approximation faible faible** s'il existe une partie finie S de $X^{(1)}$ telle que $T(K)$ est dense dans $\prod_{v\in X^{(1)}\setminus S} T(K_v)$.

C. On dit que T vérifie l'**approximation faible faible dénombrable** s'il existe une partie dénombrable S de $X^{(1)}$ telle que $T(K)$ est dense dans $\prod_{v\in X^{(1)}\setminus S} T(K_v)$.

Corps de fonctions de courbes : Exemples et applications
Approximation faible

On introduit le groupe :

$$Ш^{d+2}_{\omega}(K, \tilde{T}) = \{x \in H^{d+2}(K, \tilde{T}) | x_v = 0 \in H^{d+2}(K_v, \tilde{T}) \text{ pour presque tout } v\}.$$

Corps de fonctions de courbes : Exemples et applications
Approximation faible

On introduit le groupe :

$$Ш^{d+2}_{\omega}(K,\tilde{T}) = \{x \in H^{d+2}(K,\tilde{T}) | x_v = 0 \in H^{d+2}(K_v,\tilde{T}) \text{ pour presque tout } v\}.$$

Théorème (I. 2014)

A. *Le tore T vérifie l'approximation faible si, et seulement si,* $Ш^{d+2}(K,\tilde{T}) = Ш^{d+2}_{\omega}(K,\tilde{T})$.

Corps de fonctions de courbes : Exemples et applications
Approximation faible

On introduit le groupe :

$$Ш^{d+2}_{\omega}(K, \tilde{T}) = \{x \in H^{d+2}(K, \tilde{T}) | x_v = 0 \in H^{d+2}(K_v, \tilde{T}) \text{ pour presque tout } v\}.$$

Théorème (I. 2014)

A. *Le tore T vérifie l'approximation faible si, et seulement si,* $Ш^{d+2}(K, \tilde{T}) = Ш^{d+2}_{\omega}(K, \tilde{T})$.

B. *Le tore T vérifie l'approximation faible faible si, et seulement si, la n-torsion de $Ш^{d+2}_{\omega}(K, \tilde{T})$ est finie pour tout n.*

Corps de fonctions de courbes : Exemples et applications
Approximation faible

On introduit le groupe :

$$Ш^{d+2}_{\omega}(K, \tilde{T}) = \{x \in H^{d+2}(K, \tilde{T}) | x_v = 0 \in H^{d+2}(K_v, \tilde{T}) \text{ pour presque tout } v\}.$$

Théorème (I. 2014)

A. *Le tore T vérifie l'approximation faible si, et seulement si,* $Ш^{d+2}(K, \tilde{T}) = Ш^{d+2}_{\omega}(K, \tilde{T})$.

B. *Le tore T vérifie l'approximation faible faible si, et seulement si, la n-torsion de $Ш^{d+2}_{\omega}(K, \tilde{T})$ est finie pour tout n.*

C. *Le tore T vérifie l'approximation faible faible dénombrable si, et seulement si, $Ш^{d+2}_{\omega}(K, \tilde{T})$ est dénombrable.*

Corps de fonctions de courbes : Exemples et applications
Principe local-global

Supposons que $k = \mathbb{C}((t))$.
Soit H un K-groupe réductif connexe.

Corps de fonctions de courbes : Exemples et applications
Principe local-global

Supposons que $k = \mathbb{C}((t))$.
Soit H un K-groupe réductif connexe.

Définition

$$Ш^1(K, H) = \mathrm{Ker}\left(H^1(K, H) \to \prod_{v \in X^{(1)}} H^1(K_v, H)\right),$$

Corps de fonctions de courbes : Exemples et applications
Principe local-global

Supposons que $k = \mathbb{C}((t))$.
Soit H un K-groupe réductif connexe.

Définition

$$Ш^1(K,H) = \mathrm{Ker}\left(H^1(K,H) \to \prod_{v \in X^{(1)}} H^1(K_v,H)\right),$$

$$Б(H) = \mathrm{Ker}\left(\mathrm{Br}_{\mathrm{al}}(H) \to \prod_{v \in X^{(1)}} \mathrm{Br}_{\mathrm{al}}(H \times K_v)\right),$$

$$\mathrm{Br}_{\mathrm{al}}(H) = \mathrm{Ker}\left(\mathrm{Br}(H) \to \mathrm{Br}(H \times \overline{K})\right) / \mathrm{Im}\left(\mathrm{Br}(K) \to \mathrm{Br}(H)\right).$$

Corps de fonctions de courbes : Exemples et applications
Principe local-global

Théorème (I. 2014)

Il est possible de définir un accouplement :

$$Ш^1(H) \times Б(H) \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$$

qui induit une bijection $Ш^1(H) \to Hom(\overline{Б(H)}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$.

Corps de fonctions de courbes : Exemples et applications
Principe local-global

Remarque

A. L'obstruction au principe local-global pour les espaces principaux homogènes sous H est totalement contrôlée par le groupe de Brauer.

Corps de fonctions de courbes : Exemples et applications
Principe local-global

Remarque

A. L'obstruction au principe local-global pour les espaces principaux homogènes sous H est totalement contrôlée par le groupe de Brauer.

B. Lorsque k est d-local, l'obstruction au principe local-global pour les espaces principaux homogènes sous des tores est totalement contrôlée par le $H^{d+2}(V, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(d))$.

Anneaux locaux de dimension 2 : Corps étudiés

Notations

k : corps.

Anneaux locaux de dimension 2 : Corps étudiés

Notations

k : corps.

R : k-algèbre commutative, locale, géométriquement intègre (ie $R \otimes \overline{k}$ intègre), normale, hensélienne, excellente, de dimension 2 et de corps résiduel k.

Anneaux locaux de dimension 2 : Corps étudiés

Notations

k : corps.

R : k-algèbre commutative, locale, géométriquement intègre (ie $R \otimes \overline{k}$ intègre), normale, hensélienne, excellente, de dimension 2 et de corps résiduel k.

X : Spec $R \setminus \{s\}$, où s est le point fermé de Spec R.

Anneaux locaux de dimension 2 : Corps étudiés

Notations

k : corps.

R : k-algèbre commutative, locale, géométriquement intègre (ie $R \otimes \overline{k}$ intègre), normale, hensélienne, excellente, de dimension 2 et de corps résiduel k.

X : Spec $R \setminus \{s\}$, où s est le point fermé de Spec R.

K : corps des fractions de R.

Anneaux locaux de dimension 2 : Corps étudiés

Notations

k : corps.

R : k-algèbre commutative, locale, géométriquement intègre (ie $R \otimes \overline{k}$ intègre), normale, hensélienne, excellente, de dimension 2 et de corps résiduel k.

X : Spec $R \setminus \{s\}$, où s est le point fermé de Spec R.

K : corps des fractions de R.

Exemple

$$R = k[[x, y]] \text{ et } K = k((x, y)).$$

Anneaux locaux de dimension 2 : Dualité d'Artin-Verdier

Théorème (I. 2016)

Supposons k algébriquement clos de caractéristique 0.

Anneaux locaux de dimension 2 : Dualité d'Artin-Verdier

Théorème (I. 2016)

Supposons k algébriquement clos de caractéristique 0. Soient $j : U \hookrightarrow X$ une immersion ouverte (avec U non vide) et F un schéma en groupe fini étale sur U de n-torsion et de dual de Cartier $F' = \underline{Hom}_U(F, \mu_n)$.

Anneaux locaux de dimension 2 : Dualité d'Artin-Verdier

Théorème (I. 2016)

Supposons k algébriquement clos de caractéristique 0. Soient $j : U \hookrightarrow X$ une immersion ouverte (avec U non vide) et F un schéma en groupe fini étale sur U de n-torsion et de dual de Cartier $F' = \underline{Hom}_U(F, \mu_n)$. Il existe alors un accouplement parfait de groupes finis :

$$H^r(U, F') \times H^{3-r}(X, j_! F) \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}.$$

Anneaux locaux de dimension 2 : Dualité d'Artin-Verdier

Théorème (I. 2016)

Supposons k algébriquement clos de caractéristique 0 (resp. fini) . Soient $j : U \hookrightarrow X$ une immersion ouverte (avec U non vide) et F un schéma en groupe fini étale sur U de n-torsion et de dual de Cartier $F' = \underline{Hom}_U(F, \mu_n)$. Il existe alors un accouplement parfait de groupes finis :

$$H^r(U, F') \times H^{3-r}(X, j_! F) \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}.$$

Anneaux locaux de dimension 2 : Dualité d'Artin-Verdier

Théorème (I. 2016)

Supposons k algébriquement clos de caractéristique 0 (resp. fini) . Soient $j : U \hookrightarrow X$ une immersion ouverte (avec U non vide) et F un schéma en groupe fini étale sur U de n-torsion et de dual de Cartier $F' = \underline{Hom}_U(F, \mu_n)$ (resp. on note $F' = \underline{Hom}_U(F, \mu_n^{\otimes 2})$). Il existe alors un accouplement parfait de groupes finis :

$$H^r(U, F') \times H^{3-r}(X, j_! F) \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}.$$

Anneaux locaux de dimension 2 : Dualité d'Artin-Verdier

Théorème (I. 2016)

Supposons k algébriquement clos de caractéristique 0 (resp. fini) . Soient $j : U \hookrightarrow X$ une immersion ouverte (avec U non vide) et F un schéma en groupe fini étale sur U de n-torsion et de dual de Cartier $F' = \underline{Hom}_U(F, \mu_n)$ (resp. on note $F' = \underline{Hom}_U(F, \mu_n^{\otimes 2})$). Il existe alors un accouplement parfait de groupes finis :

$$H^r(U, F') \times H^{3-r}(X, j_! F) \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}.$$

$$(\text{resp. } H^r(U, F') \times H^{4-r}(X, j_! F) \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}).$$

Anneaux locaux de dimension 2 : Dualité d'Artin-Verdier

Théorème (I. 2016)

A. *Supposons k algébriquement clos de caractéristique 0. Soit T un K-tore.*

Anneaux locaux de dimension 2 : Dualité d'Artin-Verdier

Théorème (I. 2016)

A. *Supposons k algébriquement clos de caractéristique 0. Soit T un K-tore. On a des accouplements parfaits de groupes finis :*

$$Ш^1(K, \hat{T}) \times \overline{Ш^2(K, T)} \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z},$$

Anneaux locaux de dimension 2 : Dualité d'Artin-Verdier

Théorème (I. 2016)

A. *Supposons k algébriquement clos de caractéristique 0. Soit T un K-tore. On a des accouplements parfaits de groupes finis :*

$$Ш^1(K,\hat{T}) \times \overline{Ш^2(K,T)} \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z},$$

$$Ш^1(K,T) \times \overline{Ш^2(K,\hat{T})} \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}.$$

Anneaux locaux de dimension 2 : Dualité d'Artin-Verdier

Théorème (I. 2016)

A. *Supposons k algébriquement clos de caractéristique 0. Soit T un K-tore. On a des accouplements parfaits de groupes finis :*

$$Ш^1(K, \hat{T}) \times \overline{Ш^2(K, T)} \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z},$$

$$Ш^1(K, T) \times \overline{Ш^2(K, \hat{T})} \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}.$$

B. *Supposons k fini. Soient T un K-tore et ℓ un nombre premier différent de car k.*

Anneaux locaux de dimension 2 : Dualité d'Artin-Verdier

Théorème (I. 2016)

A. *Supposons k algébriquement clos de caractéristique 0. Soit T un K-tore. On a des accouplements parfaits de groupes finis :*

$$Ш^1(K, \hat{T}) \times \overline{Ш^2(K, T)} \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z},$$

$$Ш^1(K, T) \times \overline{Ш^2(K, \hat{T})} \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}.$$

B. *Supposons k fini. Soient T un K-tore et ℓ un nombre premier différent de car k. On a un accouplement parfait de groupes finis :*

$$Ш^1(K, T)\{\ell\} \times Ш^2(K, T')\{\ell\} \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}.$$

Anneaux locaux de dimension 2 : Principe local-global

« Théorème » (I. 2016)

A. Lorsque k est algébriquement clos de caractéristique nulle, l'obstruction au principe local-global pour les espaces principaux homogènes sous des groupes linéaires connexes est totalement contrôlée par le groupe de Brauer.

Anneaux locaux de dimension 2 : Principe local-global

« Théorème » (I. 2016)

A. Lorsque k est algébriquement clos de caractéristique nulle, l'obstruction au principe local-global pour les espaces principaux homogènes sous des groupes linéaires connexes est totalement contrôlée par le groupe de Brauer.

B. Lorsque k est fini, l'obstruction au principe local-global pour les espaces principaux homogènes sous des tores est contrôlée par le $H^3(V, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))$.

Anneaux locaux de dimension 2 : Principe local-global

Théorème (I. 2016)

Supposons k fini de caractéristique p. Soit T un tore stablement rationnel sur K.

Anneaux locaux de dimension 2 : Principe local-global

Théorème (I. 2016)

Supposons k fini de caractéristique p. Soit T un tore stablement rationnel sur K. Soit V un espace principal homogène sous T qui a des points dans K_v pour tout $v \in X^{(1)}$ et qui devient trivial sur une extension finie de K de degré premier à p.

Anneaux locaux de dimension 2 : Principe local-global

Théorème (I. 2016)

Supposons k fini de caractéristique p. Soit T un tore stablement rationnel sur K. Soit V un espace principal homogène sous T qui a des points dans K_v pour tout $v \in X^{(1)}$ et qui devient trivial sur une extension finie de K de degré premier à p. Alors V a un point rationnel.

Merci !

Merci pour votre attention !