TD10 : Finitude en algèbre commutative

Diego Izquierdo

Les exercices 0, 1 et 2 sont à préparer avant le TD. Pendant la séance de TD, les exercices seront traités dans l'ordre suivant : 0, 1, 2, 7, 13, 14. Si le temps le permet nous traiterons aussi les exercices 15, 17 et 18

Exercice 0 (à préparer) : Exercices de théorie de Galois
Faire le(s) exercice(s) du TD9 que nous n'avons pas eu le temps de traiter. Faire aussi l'exercice 14 du TD9.

Exercice 1 (à préparer) : Vrai ou faux ?

1. La $\mathbb{C}$-algèbre $\mathbb{C}[T, T^{-1}]$ est de type fini et il existe $a \in \mathbb{C}[T, T^{-1}]$ tel que $\mathbb{C}[T, T^{-1}]$ est une $\mathbb{C}[a]$ algèbre finie.

2. Si α est un nombre algébrique, alors $\mathbb{Z}[\alpha]$ est une $\mathbb{Z}$-algèbre de type fini qui n'est pas forcément finie.

3. Si α est un entier algébrique, alors $\mathbb{Z}[\alpha]$ est une $\mathbb{Z}$-algèbre finie.

4. L'anneau intègre $\mathbb{Q}[X, Y]/(X^3 - Y^5)$ est intégralement clos.

5. Le nombre $\frac{1+\sqrt[3]{3}+3\sqrt[3]{3}}{2}$ est un entier algébrique.

6. Soit p un nombre premier. L'ensemble des polynômes $Q \in \mathbb{F}_p[X_1, ..., X_p]$ tels que $Q(X_1, ..., X_p) = Q(X_2 + 1, X_3 + 1, ..., X_p + 1, X_1 + 1)$ est une $\mathbb{F}_p$-algèbre de type fini.

7. Soit A un anneau principal. Soit B une A-algèbre de type fini. Il existe alors des éléments $a_1, ..., a_d \in B$ algébriquement indépendants sur A tels que $A[a_1, ..., a_d] \subseteq B$ est une extension finie d'anneaux.

Exercice 2 (à préparer) : Anneau des entiers d'une extension quadratique de $\mathbb{Q}$
Soit d un entier différent de 0 et 1 et sans facteurs carrés. Soit $K = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$. On cherche à déterminer l'anneau des entiers $\mathcal{O}_K$.

1. Montrer qu'un élément de K est un entier algébrique si, et seulement si, $N_{K/\mathbb{Q}}(x)$ et $\mathrm{Tr}_{K/\mathbb{Q}}(x)$ sont dans $\mathbb{Z}$.

2. En déduire que $\mathcal{O}_K = \mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ si $d \not\equiv 1 \mod 4$ et que $\mathcal{O}_K = \mathbb{Z}\left[\frac{1+\sqrt{d}}{2}\right]$ si $d \equiv 1 \mod 4$.

Exercice 3 : Extensions biquadratiques
Soient $m, n \in \mathbb{Z} \setminus \{0, 1\}$ distincts sans facteurs carrés. Soit $K = \mathbb{Q}(\sqrt{m}, \sqrt{n})$.

1. Calculer l'anneau des entiers $\mathcal{O}_K$ de K en fonction de m et n. En particulier, montrer que $\mathcal{O}_K = \mathbb{Z}\left[\frac{1+\sqrt{m}}{2}, \frac{1+\sqrt{n}}{2}\right]$ si $m \equiv n \equiv 1 \mod 4$.

2. Dans le cas $m \equiv n \equiv 1 \mod 8$, montrer qu'il n'existe pas d'élément $x \in \mathcal{O}_K$ tel que $\mathcal{O}_K = \mathbb{Z}[x]$. On pourra déterminer le cardinal de l'ensemble des morphismes d'anneaux de $\mathcal{O}_K$ à valeurs dans $\mathbb{Z}$.

Exercice 4 : Anneaux d'entiers d'extensions cubiques 1

1. Montrer que l'anneau des entiers de $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$ est $\mathbb{Z}[\sqrt[3]{2}]$.

2. Soit $\theta \in \mathbb{C}$ tel que $\theta^3 - \theta - 4 = 0$. Montrer que $(1, \theta, \frac{\theta+\theta^2}{2})$ est une $\mathbb{Z}$-base de l'anneau des entiers de $\mathbb{Q}(\theta)$.

Exercice 5 : Anneaux d'entiers et polynômes d'Eisenstein

Soit $K = \mathbb{Q}$ une extension finie de degré n, soit $u \in \mathcal{O}_K$ tel que $K = Q(u)$. Soit p un nombre premier tel que le polynôme minimal de u sur $\mathbb{Q}$ soit d'Eisenstein en p. L'objectif de l'exercice est de montrer que p ne divise pas l'indice de $\mathbb{Z}[u]$ dans $\mathcal{O}_K$.

1. Montrer que $\frac{u^n}{p} \in \mathcal{O}_K$ et que p^2 ne divise pas $N_{K/\mathbb{Q}}(u)$.

2. Supposons que $p|[\mathcal{O}_K : \mathbb{Z}[u]]$.

(a) Montrer qu'il existe $x \in \mathcal{O}_K \setminus \mathbb{Z}[u]$ tel que $px \in \mathbb{Z}[u]$. En déduire qu'il existe $b_0, ..., b_{n-1} \in \mathbb{Z}$ non tous divisibles par p tels que $x = \frac{b_0+...+b_{n-1}u^{n-1}}{p}$.

(b) Notons r le plus petit entier tel que b_r n'est pas divisible par p. Montrer que $y = \frac{b_r u^r+...+b_{n-1}u^{n-1}}{p}$ est dans $\mathcal{O}_K$.

(c) Montrer que $z = \frac{b_r u^{n-1}}{p} \in \mathcal{O}_K$.

(d) Obtenir une contradiction en calculant la norme de z.

3. Si q est une puissance de p et $K = \mathbb{Q}(\sqrt[q]{p})$, montrer que $\mathcal{O}_K = \mathbb{Z}[\sqrt[q]{p}]$.

Exercice 6 : Anneaux d'entiers d'extensions cubiques 2

Soit $d \in \mathbb{Z}$, $d > 1$ sans facteur cubique. Notons $\theta = \sqrt[3]{d}$ et $K = \mathbb{Q}(\theta)$. On cherche à déterminer l'anneau des entiers $\mathcal{O}_K$ de K.

1. Montrer que la base $(1, \theta, \theta^2)$ est de discriminant $\Delta = -27d^2$.

2. On écrit $d = ab^2$, avec $a, b \in \mathbb{N}$ sans facteur carré. On pose $\theta' = \sqrt[3]{a^2b}$. Montrer que $K = \mathbb{Q}(\theta')$ et calculer le discriminant Δ' de la base $(1, \theta', \theta'^2)$.

3. Montrer que $(1, \theta, \theta')$ est une $\mathbb{Q}$-base de K et calculer son discriminant Δ''.

4. On note f, f' et f'' les indices respectifs de $\mathbb{Z}[\theta]$, $\mathbb{Z}[\theta]$ et $\mathbb{Z}[\theta]$ dans $\mathcal{O}_K$.

(a) Montrer que toutes les $\mathbb{Z}$-bases de $\mathcal{O}_K$ ont même discriminant. On le note Δ_K.

(b) Montrer que $f^2 = \frac{\Delta}{\Delta_K}$, $f'^2 = \frac{\Delta'}{\Delta_K}$ et $f''^2 = \frac{\Delta''}{\Delta_K}$

(c) Montrer que $a \wedge f = 1$ et que $b \wedge f' = 1$. On pourra utiliser l'exercice 5.

(d) En déduire les assertions suivantes :

(i) $\Delta_K < 0$;

(ii) $a^2b^2 | \Delta_K | 27a^2b^2$;

(iii) si $3|a$, alors $27a^2 | \Delta_K$;

(iv) si $3|b$, alors $27b^2 | \Delta_K$.

5. Montrer que si $3|d$, alors $\Delta_K = -27a^2b^2$ et $(1, \theta, \theta')$ est une base de $\mathcal{O}_K$.

6. Supposons que 3 ne divise pas d et que $d \pm 1$ n'est pas multiple de 9. Montrer que le polynôme minimal de $\theta - d$ est 3-Eisenstein. En procédant comme dans les questions précédentes, en déduire que $\Delta_K = -27a^2b^2$ et $(1, \theta, \theta')$ est une base de $\mathcal{O}_K$.

7. On suppose $d \equiv 1 \mod 9$. On pose $\alpha = \frac{1+\theta+\theta^2}{3}$.

(i) Montrer que $\alpha \in \mathcal{O}_K$ et calculer son polynôme minimal.

(ii) En déduire que $3|f''$, puis que $\Delta_K = -3a^2b^2$.

(iii) Montrer que $(\alpha, \theta, \theta')$ est une $\mathbb{Z}$-base de $\mathcal{O}_K$.

8. Supposons $d \equiv -1 \mod 9$. On pose $\alpha' = \frac{1-\theta+\theta^2}{3}$. Montrer que $(\alpha', \theta, \theta')$ est une $\mathbb{Z}$-base de $\mathcal{O}_K$.

Exercice 7 : Anneaux d'entiers de corps cyclotomiques 1

Soient p un nombre premier et $k \geq 1$ un entier. Soient $\overline{\mathbb{Q}}$ une clôture algébrique fixée de $\mathbb{Q}$ et $\zeta \in \overline{\mathbb{Q}}$ une racine primitive p^k-ème de l'unité. Soit $\mathcal{O}_{p^k}$ l'anneau des entiers algébriques de $\mathbb{Q}(\zeta)$.

1. Montrer l'identité $p = \prod_{\substack{r=1 \\ p \nmid r}}^{p^k} (1 - \zeta^r)$.

2. En déduire que $(\zeta - 1)\mathcal{O}_{p^k} \cap \mathbb{Z} = p\mathbb{Z}$.

Supposons $k = 1$.

3. En utilisant la trace, montrer que l'anneau $\mathcal{O}_p$ est égal à $\mathbb{Z}[\zeta]$.

Revenons au cas général $k \geq 1$.

4. Montrer que l'on a $\mathcal{O}_{p^k} = \mathbb{Z}[\zeta] + p^m \mathcal{O}_{p^k}$ pour tout $m \geq 0$.

5. Montrer que le discriminant de Φ_{p^k} est, au signe près, une puissance de p (que l'on explicitera).

6. En déduire que l'anneau $\mathcal{O}_{p^k}$ est égal à $\mathbb{Z}[\zeta]$.

Exercice 8 : Anneaux d'entiers de corps cyclotomiques 2

Soient K et L deux extensions galoisiennes finies de $\mathbb{Q}$ telles que $K \cap L = \mathbb{Q}$.

1. Montrer que l'extension composée KL de $\mathbb{Q}$ est galoisienne finie.

2. Montrer que la restriction induit un isomorphisme de groupes $\mathrm{Gal}(KL/L) \cong$

$\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})$.

3. Montrer que l'application canonique $\mathrm{Gal}(KL/\mathbb{Q}) \to \mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q}) \times \mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q})$ est un isomorphisme de groupes.

Soit $\mathcal{O}_K$ (resp. $\mathcal{O}_L$, resp. $\mathcal{O}_{KL}$) l'anneau des entiers de K (resp. L, resp. KL). On note Δ_K (resp. Δ_L, resp. Δ_{KL}) le discriminant de K (resp. de L, resp. de KL), c'est-à-dire le discriminant d'une $\mathbb{Z}$-base de $\mathcal{O}_K$ (resp. $\mathcal{O}_L$, resp. $\mathcal{O}_{KL}$).

4. Expliquer pourquoi Δ_K et Δ_L sont bien définis et sont dans $\mathbb{Z}$.

On suppose que Δ_K et Δ_L sont premiers entre eux. Soient $(a_1, \dots, a_r)$ (resp. $(b_1, \dots, b_s)$) une base du $\mathbb{Z}$-module $\mathcal{O}_K$ (resp. $\mathcal{O}_L$).

Soit $x = \sum_{i,j} x_{ij} a_i b_j \in \mathcal{O}_{KL}$ avec $x_{ij} \in \mathbb{Q}$. Pour $1 \leq i \leq r$, on note $x_i = \sum_j x_{ij} b_j$.

5. Montrer, pour tous i, j, que l'on a $\Delta_K x_i \in \mathcal{O}_L$, et donc $\Delta_K x_{ij} \in \mathbb{Z}$.

6. En déduire que $\mathcal{O}_{KL} = \bigoplus_{\substack{1 \leq i \leq r \\ 1 \leq j \leq s}} a_i b_j \mathbb{Z}$ et que $\Delta_{KL} = \Delta_K^{[L:\mathbb{Q}]} \Delta_L^{[K:\mathbb{Q}]}$.

Soient $m, n \geq 1$ deux entiers premiers entre eux. Soient $\alpha, \beta \in \overline{\mathbb{Q}}$ des racines primitives respectivement m-ème et n-ème de l'unité.

7. Montrer $\mathbb{Q}(\alpha) \cap \mathbb{Q}(\beta) = \mathbb{Q}$.

8. En utilisant l'exercice précédent, en déduire que l'anneau des entiers de $\mathbb{Q}(\alpha)$ est $\mathbb{Z}[\alpha]$.

Exercice 9 : Anneaux intégralement clos et polynômes

Soit A un anneau intégralement clos de corps des fractions K.

1. Soit $P \in A[X]$ tel que $P = QR$, avec $Q, R \in K[X]$ unitaires. Montrer que $Q, R \in A[X]$.

2. Montrer que $A[X]$ est intégralement clos.

Exercice 10 : Extensions quadratiques, le retour

Soit A un anneau factoriel dans lequel 2 est inversible. Soit $a \in A$ qui n'est divisible par le carré d'aucun élément irréductible de A. Montrer que $B = A[X]/(X^2 - a)$ est intégralement clos. Est-il forcément factoriel ?

Exercice 11 : Anneaux normaux et actions de groupes

Soit A un anneau intègre sur lequel agit un groupe fini G. On note A^G l'anneau des invariants.

1. Montrer que l'action de G s'étend en une action sur le corps de fractions K de A.

2. Montrer que le corps des fractions de A^G est K^G.

3. Montrer que, si A est intégralement clos, alors A^G l'est aussi.

Exercice 12 : Normalisation de Noether
Soit $A = \mathbb{C}[X,Y,Z]/(XY+Z^2, X^2Y-XY^3+Z^4-1)$. Exhiber $a_1, ..., a_n \in A$ algébriquement indépendants sur $\mathbb{C}$ tels que $A/\mathbb{C}[a_1, ..., a_n]$ est une extension finie d'anneaux.

Exercice 13 : Variétés et hypersurfaces
Soient k un corps de caractéristique nulle et A une k-algèbre intègre de type fini sur k de corps des fractions K. Montrer qu'il existe un entier naturel n et un polynôme $f \in k[X_1, ..., X_n]$ tels que K est isomorphe au corps des fractions de $B = k[X_1, ..., X_n]/(f)$. Appliquer le résultat à l'anneau :

$$A = \mathbb{C}[X,Y,Z]/(XY + Z^2, X - Z^2Y - 1).$$

En termes géométriques, on dit que toute k-variété intègre est birationnellement équivalente à une hypersurface.

Exercice 14 : Extensions de corps de type fini
Soit $M/L/K$ une tour d'extensions de corps.

1. Soit $\alpha \in M$ (resp. $t \in M$) algébrique sur K (resp. transcendant sur K). Montrer que $[K(\alpha) : K] = [K(\alpha,t) : K(t)]$.
2. Supposons que M/K est une extension de corps de type fini et que L/K est algébrique. Montrer que $[L : K] < +\infty$.
3. Montrer que si M/K est de type fini, L/K est de type fini.

Exercice 15 : Exemples de localisés
Reconnaître $S^{-1}A$ dans las cas suivants :

(i) $A = \mathbb{Z}$ et $S = \mathbb{Z} \setminus \{0\}$;
(ii) $A = \mathbb{Z}$ et $S = \{-1, 1\}$;
(iii) $A = \mathbb{Z}$ et $S = \{10^k | k \geq 0\}$;
(iv) $A = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, $S = \{(0,y) | y \neq 0\} \cup \{(1,1)\}$.
(v) $A = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, $S = \{(x,y) | x \neq 0\}$;
(vi) $A = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, $S = \{(x,y) | x \neq 0, y \neq 0\}$;
(vii) $A = \mathbb{C}[X]/(X^5)$, $S = \{X^k | k \geq 0\}$;
(viii) $A = \mathbb{C}[X,Y]/(X^5Y)$, $S = \{X^k | k \geq 0\}$;
(ix) $A = \mathbb{C}[X,Y]/(X^5Y)$, $S = \{P \in A | P \notin (X)\}$;
(x) $A = \mathbb{C}[X,Y]/(X^5Y)$, $S = \{P \in A | P \notin (Y)\}$;

Exercice 16 : Un contre-exemple
Trouver un sous-anneau de $\mathbb{C}(X,Y)$ contenant $\mathbb{C}[X,Y]$ qui ne soit pas en tant que $\mathbb{C}[X,Y]$-algèbre un localisé de $\mathbb{C}[X,Y]$.

Exercice 17 : Germes de fonctions
Soit $\mathcal{C}$ l'anneau des fonctions continues de $[0,2]$ dans $\mathbb{R}$. Soit $\mathfrak{m}$ l'idéal maximal des fonctions nulles en 1. Soit $S = \mathcal{C} \setminus \mathfrak{m}$. Montrer que $S^{-1}\mathcal{C}$ s'identifie à l'anneau local des germes de fonctions continues en 1.

Exercice 18 : Une suite exacte
Soient A un anneau et $a, b \in A$ tels que $(a,b) = A$. Soit M un A-module. Montrer qu'il existe une suite exacte :

$$0 \to M \to M\left[\frac{1}{a}\right] \oplus M\left[\frac{1}{b}\right] \to M\left[\frac{1}{ab}\right].$$

Généraliser à une famille quelconque $(a_i)_{i\in I}$ de A.