

TD10 : FINITUDE EN ALGÈBRE COMMUTATIVE

Diego Izquierdo

Les exercices 0 et 1 sont à préparer avant le TD. Pendant la séance de TD, les exercices seront traités dans l'ordre suivant : 0, 1, 0', 2, 7.

Exercice 0 (à préparer) : Exercices de théorie de Galois

Faire l'exercice 15 du TD8 et l'exercice 10 du TD9.

Exercice 0' : Et un dernier exercice de théorie de Galois

Faire l'exercice 14 du TD9.

Exercice 1 (à préparer) : Vrai ou faux ?

1. La \mathbb{C} -algèbre $\mathbb{C}[T, T^{-1}]$ est de type fini et il existe $a \in \mathbb{C}[T, T^{-1}]$ tel que $\mathbb{C}[T, T^{-1}]$ est une $\mathbb{C}[a]$ algèbre finie.
2. Si α est un nombre algébrique, alors $\mathbb{Z}[\alpha]$ est une \mathbb{Z} -algèbre de type fini qui n'est pas forcément finie.
3. Si α est un entier algébrique, alors $\mathbb{Z}[\alpha]$ est une \mathbb{Z} -algèbre finie.
4. L'anneau intègre $\mathbb{Q}[X, Y]/(X^3 - Y^5)$ est intégralement clos.
5. Le nombre $\frac{1 + \sqrt[3]{3} + 3\sqrt[3]{9}}{2}$ est un entier algébrique.
6. Soit p un nombre premier. L'ensemble des polynômes $Q \in \mathbb{F}_p[X_1, \dots, X_p]$ tels que $Q(X_1, \dots, X_p) = Q(X_2 + 1, X_3 + 1, \dots, X_p + 1, X_1 + 1)$ est une \mathbb{F}_p -algèbre de type fini.
7. Soit A un anneau principal. Soit B une A -algèbre de type fini. Il existe alors des éléments $a_1, \dots, a_d \in B$ algébriquement indépendants sur A tels que $A[a_1, \dots, a_d] \subseteq B$ est une extension finie d'anneaux.

Exercice 2 : Anneau des entiers d'une extension quadratique de \mathbb{Q}

Soit d un entier différent de 0 et 1 et sans facteurs carrés. Soit $K = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$.

On cherche à déterminer l'anneau des entiers \mathcal{O}_K .

1. Montrer qu'un élément de K est un entier algébrique si, et seulement si, $N_{K/\mathbb{Q}}(x)$ et $\text{Tr}_{K/\mathbb{Q}}(x)$ sont dans \mathbb{Z} .
2. En déduire que $\mathcal{O}_K = \mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ si $d \not\equiv 1 \pmod{4}$ et que $\mathcal{O}_K = \mathbb{Z}\left[\frac{1 + \sqrt{d}}{2}\right]$ si $d \equiv 1 \pmod{4}$.

Exercice 3 : Extensions biquadratiques

Soient $m, n \in \mathbb{Z} \setminus \{0, 1\}$ distincts sans facteurs carrés. Soit $K = \mathbb{Q}(\sqrt{m}, \sqrt{n})$.

1. Calculer l'anneau des entiers \mathcal{O}_K de K en fonction de m et n . En particulier, montrer que $\mathcal{O}_K = \mathbb{Z} \left[\frac{1+\sqrt{m}}{2}, \frac{1+\sqrt{n}}{2} \right]$ si $m \equiv n \equiv 1 \pmod{4}$.
2. Dans le cas $m \equiv n \equiv 1 \pmod{8}$, montrer qu'il n'existe pas d'élément $x \in \mathcal{O}_K$ tel que $\mathcal{O}_K = \mathbb{Z}[x]$. On pourra déterminer le cardinal de l'ensemble des morphismes d'anneaux de \mathcal{O}_K à valeurs dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Exercice 4 : Anneaux d'entiers d'extensions cubiques 1

1. Montrer que l'anneau des entiers de $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$ est $\mathbb{Z}[\sqrt[3]{2}]$.
2. Soit $\theta \in \mathbb{C}$ tel que $\theta^3 - \theta - 4 = 0$. Montrer que $(1, \theta, \frac{\theta+\theta^2}{2})$ est une \mathbb{Z} -base de l'anneau des entiers de $\mathbb{Q}(\theta)$.

Exercice 5 : Anneaux d'entiers et polynômes d'Eisenstein

Soit $K = \mathbb{Q}(u)$ une extension finie de degré n , soit $u \in \mathcal{O}_K$ tel que $K = \mathbb{Q}(u)$. Soit p un nombre premier tel que le polynôme minimal de u sur \mathbb{Q} soit d'Eisenstein en p . L'objectif de l'exercice est de montrer que p ne divise pas l'indice de $\mathbb{Z}[u]$ dans \mathcal{O}_K .

1. Montrer que $\frac{u^n}{p} \in \mathcal{O}_K$ et que p^2 ne divise pas $N_{K/\mathbb{Q}}(u)$.
2. Supposons que $p \mid [\mathcal{O}_K : \mathbb{Z}[u]]$.
 - (a) Montrer qu'il existe $x \in \mathcal{O}_K \setminus \mathbb{Z}[u]$ tel que $px \in \mathbb{Z}[u]$. En déduire qu'il existe $b_0, \dots, b_{n-1} \in \mathbb{Z}$ non tous divisibles par p tels que $x = \frac{b_0 + \dots + b_{n-1}u^{n-1}}{p}$.
 - (b) Notons r le plus petit entier tel que b_r n'est pas divisible par p . Montrer que $y = \frac{b_r u^r + \dots + b_{n-1} u^{n-1}}{p}$ est dans \mathcal{O}_K .
 - (c) Montrer que $z = \frac{b_r u^{n-1}}{p} \in \mathcal{O}_K$.
 - (d) Obtenir une contradiction en calculant la norme de z .
3. Si q est une puissance de p et $K = \mathbb{Q}(\sqrt[q]{p})$, montrer que $\mathcal{O}_K = \mathbb{Z}[\sqrt[q]{p}]$.

Exercice 6 : Anneaux d'entiers d'extensions cubiques 2

Soit $d \in \mathbb{Z}$, $d > 1$ sans facteur cubique. Notons $\theta = \sqrt[3]{d}$ et $K = \mathbb{Q}(\theta)$. On cherche à déterminer l'anneau des entiers \mathcal{O}_K de K .

1. Montrer que la base $(1, \theta, \theta^2)$ est de discriminant $\Delta = -27d^2$.
2. On écrit $d = ab^2$, avec $a, b \in \mathbb{N}$ sans facteur carré. On pose $\theta' = \sqrt[3]{a^2 b}$. Montrer que $K = \mathbb{Q}(\theta')$ et calculer le discriminant Δ' de la base $(1, \theta', \theta'^2)$.
3. Montrer que $(1, \theta, \theta')$ est une \mathbb{Q} -base de K et calculer son discriminant Δ'' .
4. On note f, f' et f'' les indices respectifs de $\mathbb{Z}[\theta], \mathbb{Z}[\theta']$ et $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}\theta \oplus \mathbb{Z}\theta'$ dans \mathcal{O}_K .
 - (a) Montrer que toutes les \mathbb{Z} -bases de \mathcal{O}_K ont même discriminant. On

le note Δ_K .

- (b) Montrer que $f^2 = \frac{\Delta}{\Delta_K}$, $f'^2 = \frac{\Delta'}{\Delta_K}$ et $f''^2 = \frac{\Delta''}{\Delta_K}$
- (c) Montrer que $a \wedge f = 1$ et que $b \wedge f' = 1$. On pourra utiliser l'exercice 5.
- (d) En déduire les assertions suivantes :
- $\Delta_K < 0$;
 - $a^2 b^2 | \Delta_K | 27 a^2 b^2$;
 - si $3|a$, alors $27 a^2 | \Delta_K$;
 - si $3|b$, alors $27 b^2 | \Delta_K$.
5. Montrer que si $3|d$, alors $\Delta_K = -27 a^2 b^2$ et $(1, \theta, \theta')$ est une base de \mathcal{O}_K .
6. Supposons que 3 ne divise pas d et que $d \pm 1$ n'est pas multiple de 9. Montrer que le polynôme minimal de $\theta - d$ est 3-Eisenstein. En procédant comme dans les questions précédentes, en déduire que $\Delta_K = -27 a^2 b^2$ et $(1, \theta, \theta')$ est une base de \mathcal{O}_K .
7. On suppose $d \equiv 1 \pmod{9}$. On pose $\alpha = \frac{1+\theta+\theta^2}{3}$.
- Montrer que $\alpha \in \mathcal{O}_K$ et calculer son polynôme minimal.
 - En déduire que $3|f''$, puis que $\Delta_K = -3 a^2 b^2$.
 - Montrer que $(\alpha, \theta, \theta')$ est une \mathbb{Z} -base de \mathcal{O}_K .
8. Supposons $d \equiv -1 \pmod{9}$. On pose $\alpha' = \frac{1-\theta+\theta^2}{3}$. Montrer que $(\alpha', \theta, \theta')$ est une \mathbb{Z} -base de \mathcal{O}_K .

Exercice 7 : Anneaux d'entiers de corps cyclotomiques 1

Soient p un nombre premier et $k \geq 1$ un entier. Soient $\overline{\mathbb{Q}}$ une clôture algébrique fixée de \mathbb{Q} et $\zeta \in \overline{\mathbb{Q}}$ une racine primitive p^k -ème de l'unité. Soit \mathcal{O}_{p^k} l'anneau des entiers algébriques de $\mathbb{Q}(\zeta)$.

- Montrer l'identité $p = \prod_{r=1}^{p^k} (1 - \zeta^r)$.
- En déduire que $(\zeta - 1)\mathcal{O}_{p^k} \cap \mathbb{Z} = p\mathbb{Z}$.

Supposons $k = 1$.

- En utilisant la trace, montrer que l'anneau \mathcal{O}_p est égal à $\mathbb{Z}[\zeta]$.

Revenons au cas général $k \geq 1$.

- Montrer que l'on a $\mathcal{O}_{p^k} = \mathbb{Z}[\zeta] + p^m \mathcal{O}_{p^k}$ pour tout $m \geq 0$.
- Montrer que le discriminant de Φ_{p^k} est, au signe près, une puissance de p (que l'on explicitera).
- En déduire que l'anneau \mathcal{O}_{p^k} est égal à $\mathbb{Z}[\zeta]$.

Exercice 8 : Anneaux d'entiers de corps cyclotomiques 2

Soient K et L deux extensions galoisiennes finies de \mathbb{Q} telles que $K \cap L = \mathbb{Q}$.

- Montrer que l'extension composée KL de \mathbb{Q} est galoisienne finie.

2. Montrer que la restriction induit un isomorphisme de groupes $\text{Gal}(KL/L) \cong \text{Gal}(K/\mathbb{Q})$.
3. Montrer que l'application canonique $\text{Gal}(KL/\mathbb{Q}) \rightarrow \text{Gal}(K/\mathbb{Q}) \times \text{Gal}(L/\mathbb{Q})$ est un isomorphisme de groupes.

Soit \mathcal{O}_K (resp. \mathcal{O}_L , resp. \mathcal{O}_{KL}) l'anneau des entiers de K (resp. L , resp. KL). On note Δ_K (resp. Δ_L , resp. Δ_{KL}) le discriminant de K (resp. de L , resp. de KL), c'est-à-dire le discriminant d'une \mathbb{Z} -base de \mathcal{O}_K (resp. \mathcal{O}_L , resp. \mathcal{O}_{KL}).

4. Expliquer pourquoi Δ_K et Δ_L sont bien définis et sont dans \mathbb{Z} .

On suppose que Δ_K et Δ_L sont premiers entre eux. Soient (a_1, \dots, a_r) (resp. (b_1, \dots, b_s)) une base du \mathbb{Z} -module \mathcal{O}_K (resp. \mathcal{O}_L).

Soit $x = \sum_{i,j} x_{ij} a_i b_j \in \mathcal{O}_{KL}$ avec $x_{ij} \in \mathbb{Q}$. Pour $1 \leq i \leq r$, on note $x_i = \sum_j x_{ij} b_j$.

5. Montrer, pour tous i, j , que l'on a $\Delta_K x_i \in \mathcal{O}_L$, et donc $\Delta_K x_{ij} \in \mathbb{Z}$.

6. En déduire que $\mathcal{O}_{KL} = \bigoplus_{\substack{1 \leq i \leq r \\ 1 \leq j \leq s}} a_i b_j \mathbb{Z}$ et que $\Delta_{KL} = \Delta_K^{[L:\mathbb{Q}]} \Delta_L^{[K:\mathbb{Q}]}$.

Soient $m, n \geq 1$ deux entiers premiers entre eux. Soient $\alpha, \beta \in \overline{\mathbb{Q}}$ des racines primitives respectivement m -ème et n -ème de l'unité.

7. Montrer $\mathbb{Q}(\alpha) \cap \mathbb{Q}(\beta) = \mathbb{Q}$.
8. En utilisant l'exercice précédent, en déduire que l'anneau des entiers de $\mathbb{Q}(\alpha)$ est $\mathbb{Z}[\alpha]$.

Exercice 9 : Anneaux intégralement clos et polynômes

Soit A un anneau intégralement clos de corps des fractions K .

1. Soit $P \in A[X]$ tel que $P = QR$, avec $Q, R \in K[X]$ unitaires. Montrer que $Q, R \in A[X]$.
2. Montrer que $A[X]$ est intégralement clos.

Exercice 10 : Extensions quadratiques, le retour

Soit A un anneau factoriel dans lequel 2 est inversible. Soit $a \in A$ qui n'est divisible par le carré d'aucun élément irréductible de A et qui n'est pas un carré. Montrer que $B = A[X]/(X^2 - a)$ est intégralement clos. Est-il forcément factoriel ?

Exercice 11 : Anneaux normaux et actions de groupes

Soit A un anneau intègre sur lequel agit un groupe fini G . On note A^G l'anneau des invariants.

1. Montrer que l'action de G s'étend en une action sur le corps de fractions K de A .
2. Montrer que le corps des fractions de A^G est K^G .
3. Montrer que, si A est intégralement clos, alors A^G l'est aussi.