TD11 : Algèbre et géométrie, Nullstellensatz

Diego Izquierdo

L'exercice 0 est à préparer avant le TD. Pendant la séance, nous traiterons les exercices dans l'ordre suivant : 0, questions 1 et 3 de 9, 10, 12.

Exercice 0 (à préparer) : Finitude
Terminer l'exercice 13 du TD10. Faire aussi les exercices 7, 14 et 15 du TD10.

Exercice 1 : Localisation
Soient A un anneau commutatif unitaire et S une partie multiplicative de A.

1. Montrer que l'ensemble des idéaux de $S^{-1}A$ s'injecte dans l'ensemble des idéaux de A n'intersectant pas S. Montrer que l'injection induit une bijection entre les idéaux premiers de $S^{-1}A$ et les idéaux premiers de A n'intersectant pas S.
2. Si A est noethérien, montrer que le localisé $S^{-1}A$ est noethérien.
3. Si A est principal et que S ne contient pas 0, montrer que le localisé $S^{-1}A$ est principal.
4. Si A est factoriel et que S ne contient pas 0, montrer que le localisé $S^{-1}A$ est factoriel.
5. Soit B une extension entière de A. Montrer que, si B est une A-algèbre finie, alors $S^{-1}B$ est une $S^{-1}A$ algèbre finie. Montrer aussi que, si A est intégralement clos dans B, alors $S^{-1}A$ est intégralement clos dans $S^{-1}B$.

Dans les exercices qui suivent, si $\mathfrak{p}$ est un idéal premier d'un anneau A et M est un A-module, on note $M_{\mathfrak{p}}$ le localisé de M par rapport à la partie multiplicative $A \setminus \mathfrak{p}$ de A.

Exercice 2 : Corps résiduel
Soient A un anneau commutatif unitaire et $\mathfrak{p}$ un idéal premier de A.

1. Montrer que $A_{\mathfrak{p}}$ est local, d'idéal maximal $\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}}$.

Notons $k(\mathfrak{p})$ le *corps résiduel* $A_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}}$.

2. Montrer que $A \to k(\mathfrak{p})$ induit une injection $\varphi_{\mathfrak{p}} : A/\mathfrak{p} \hookrightarrow k(\mathfrak{p})$ qui fait de $k(\mathfrak{p})$ le corps des fractions de $A/\mathfrak{p}$.
3. Montrer que $\varphi_{\mathfrak{p}}$ est un isomorphisme si et seulement si $\mathfrak{p}$ est un idéal maximal de A.
4. Soit $f \in A \smallsetminus \mathfrak{p}$. Montrer que $k(\mathfrak{p})$ et $k(\mathfrak{p}A[f^{-1}])$ sont canoniquement isomorphes.

Exercice 3 : Propriétés locales et globales 1
Soit A un anneau.

1. Montrer que A est réduit si, et seulement si, $A_{\mathfrak{m}}$ est réduit pour tout $\mathfrak{m} \in \mathrm{Max}(A)$. On dit que la propriété d'être réduit locale.

2. On suppose A intègre. Montrer que A est normal si, et seulement si, $A_{\mathfrak{m}}$ est normal pour tout $\mathfrak{m} \in \mathrm{Max}(A)$.

3. Est-il vrai que A est intègre si, et seulement si, $A_{\mathfrak{m}}$ est intègre pour tout $\mathfrak{m} \in \mathrm{Spec}(A)$? On dit que la propriété d'être intègre est globale.

Exercice 4 : Propriétés locales et globales 2
Soient A un anneau et M, N et P des A-modules.

1. Montrer que le morphisme naturel $M \to \prod_{\mathfrak{m} \in \mathrm{Max}\, A} M_{\mathfrak{m}}$ est injectif. En déduire que $M = 0$ si, et seulement si, $M_{\mathfrak{m}} = 0$ pour tout $\mathfrak{m} \in \mathrm{Max}(A)$.

2. On se donne deux morphismes de A-modules $f : M \to N$ et $g : N \to P$. Montrer que la suite $0 \to M \to N \to P \to 0$ est exacte si, et seulement si, la suite $0 \to M_{\mathfrak{m}} \to N_{\mathfrak{m}} \to P_{\mathfrak{m}} \to 0$ est exacte pour tout $\mathfrak{m} \in \mathrm{Max}(A)$.

3. Est-il vrai que M est libre si, et seulement si, $M_{\mathfrak{m}}$ est libre pour tout $\mathfrak{m} \in \mathrm{Spec}(A)$?

Remarque : Géométriquement, il faut voir M comme une famille "continue" $(M_{\mathfrak{p}})_{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}\, A}$ de $A_{\mathfrak{p}}$-modules.

Exercice 5 : Anneaux artiniens
Soit A un anneau. On suppose que A est *artinien*, c'est-à-dire que toute suite décroissante d'idéaux stationne.

1. Donner des exemples d'anneaux artiniens. Un anneau noethérien est-il forcément artinien ?

2. Montrer que tout idéal premier de A est maximal. On dit que A est de dimension 0.

3. Montrer que A a un nombre fini d'idéaux premiers.

4. Montrer que A est produit fini d'anneaux locaux artiniens.

5. Dans cette question, on suppose que A est un anneau local artinien d'idéal maximal $\mathfrak{m}$.
   (a) Montrer qu'il existe $n > 0$ tel que $\mathfrak{m}^n = 0$.
   (b) En déduire que A est noethérien.

6. En général, montrer que A est noethérien.

7. Réciproquement, montrer qu'un anneau noethérien de dimension 0 est artinien.

Exercice 6 : Coniques
Soit $P \in \mathbb{C}[X,Y]$ un polynôme irréductible de degré 2. Montrer que $\mathbb{C}[X,Y]/(P)$ est isomorphe soit à $\mathbb{C}[T]$ soit à $\mathbb{C}[T,T^{-1}]$. En fonction du polynôme P, dire dans quelle situation on est. Interpréter géométriquement. Le résultat subsiste-t'il si l'on remplace $\mathbb{C}$ par un autre corps ?

Exercice 7 : Paramétrisations de points rationnels
Soit K un corps de caractéristique nulle. Trouver tous les couples $(x,y) \in K^2$ vérifiant chacune des équations suivantes :

1. $5x^2 + 3y^2 = 2$;

2. $(x^2+y^2)^2 + 3x^2y - y^3 = 0$.

Exercice 8 : Morphismes entre variétés et lemme de Yoneda
Soit K un corps. Soient $f_1, ... f_r \in K[X_1,...,X_n]$ et $g_1,...,g_s \in K[X_1,...,X_m]$. On note $B = K[X_1,...,X_n]/(f_1,...,f_r)$, $C = K[X_1,...,X_m]/(g_1,...,g_s)$, V_B la variété d'équations $f_1 = ... = f_r = 0$ et V_C la variété d'équations $g_1 = ... = g_s = 0$. Montrer que se donner un morphisme $f : B \to C$ est équivalent à se donner un morphisme $f_X^* : V_C(X) \to V_B(X)$ pour chaque K-algèbre X de sorte que, si l'on se donne un morphisme $X \to Y$ de K-algèbres, alors le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} V_C(X) & \longrightarrow & V_B(X) \\ \downarrow & & \downarrow \\ V_C(Y) & \longrightarrow & V_B(Y). \end{array}$$

Cette donnée est ce que l'on appelle un morphisme $f^* : V_C \to V_B$.

Exercice 9 : Normalisation et singularités

1. (a) Montrer que la clôture intégrale de $\mathbb{C}[X,Y]/(Y^3 - X^5)$ est isomorphe à $\mathbb{C}[T]$.

(b) En notant V la courbe d'équation $y^3 = x^5$ dans $\mathbb{A}^2_{\mathbb{C}}$, expliquer pourquoi cela induit un morphisme $f^* : \mathbb{A}^1_{\mathbb{C}} \to V$. On dit qu'on a désingularisé V.

(c) Vérifier que $f^*_{\mathbb{C}} : \mathbb{C} \to V(\mathbb{C})$ est une bijection, mais qu'il n'existe pas de morphisme $g^* : V \to \mathbb{A}^1_{\mathbb{C}}$ tel que $g^*_{\mathbb{C}}$ est la fonction réciproque de $f^*_{\mathbb{C}}$. Cela signifie en particulier que f^* n'est pas un isomorphisme entre V et $\mathbb{A}^1_{\mathbb{C}}$.

(d) Montrer par contre que $\mathbb{C}[X,Y]/(Y^3 - X^5)[X^{-1}]$ et $\mathbb{C}[T,T^{-1}]$ sont isomorphes. Cela signifie que l'ouvert de V défini par $x \neq 0$ est isomorphe à l'ouvert de $\mathbb{A}^1_{\mathbb{C}}$ défini par $t \neq 0$. On dit que V et $\mathbb{A}^1_{\mathbb{C}}$ sont birationnellement équivalents.

2. Quelle est la clôture intégrale de $\mathbb{C}[X,Y]/(Y^2-X^3-X^2)$? Interpréter géométriquement.
3. Même question pour $\mathbb{C}[X,Y]/(Y^2-X^4-X^5)$.
4. Même question pour $\mathbb{C}[X,Y]/(Y^2+2iXY-X^3+X-1)$.

Exercice 10 : Une question de polynômes
Soient P, Q et R des polynômes dans $\mathbb{C}[X_1,...,X_n]$, avec P irréductible. On suppose que, pour tout $x\in\mathbb{C}^n$, si $P(x)=0$ et $Q(x)\neq 0$, alors $R(x)=0$. Montrer que $P|Q$ ou $P|R$.

Exercice 11 : Produit tensoriel d'algèbres réduites
Soit k un corps algébriquement clos. Soient A et B deux k-algèbres de type fini. Montrer que, si A et B sont réduites (resp. intègres), alors $A\otimes_k B$ est réduite (resp. intègre).

Exercice 12 : Vers la théorie des modèles
1. Soit $V\hookrightarrow\mathbb{A}^m_{\mathbb{Q}}$ une variété affine. Montrer que $V(\mathbb{C})=\emptyset$ si, et seulement si, $V(\overline{\mathbb{Q}})=\emptyset$.
2. Soient $f_1,...,f_n\in\mathbb{Z}[X_1,....,X_m]$. Montrer que le système d'équations $f_1(x)=...=f_n(x)=0$ a des solutions dans $\mathbb{C}^m$ si, et seulement si, il a des solutions dans $\overline{\mathbb{F}}_p$ pour presque tout premier p.

Exercice 13 : Fonction zêta du cercle
Soit $A=\mathbb{Z}[X,Y]/(X^2+Y^2-1)$. Exhiber des fractions rationnelles $F_p\in\mathbb{F}_p[X]$ telles que :

$$\zeta(A,s)=\prod_{p\text{ premier}}F_p(p^{-s}).$$

En déduire que :

$$\zeta(A,s)=\zeta(s-1)\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^s}\right).$$

Exercice 14 : Autres fonctions zêta
Calculer les fonctions zêta de :

$$A=\mathbb{Z}[X,Y]/(XY-1),$$
$$B=\mathbb{Z}[X_1,X_2,X_3,X_4,Y]/((X_1X_4-X_2X_3)Y-1),$$
$$C=\mathbb{Z}[X]/(X^{21}-1),$$
$$D=\mathbb{Z}[X,Y]/(X^2-Y^3),$$
$$E=\mathbb{Z}[X,Y]/(Y^2-X^2(X+1)).$$