TD13 : Topologie de Zariski, dimension, lissité, anneaux de valuation discrète

Diego Izquierdo

L'exercice 0, la question 1 de l'exercice 1, l'exercice 2, les questions 1 et 2 de l'exercice 4 et les exercices 21 et 22 sont à préparer avant la séance de TD. Pendant la séance, les exercices seront traités dans l'ordre suivant : 0, question 1 de 1, 2, questions 1 et 2 de 4, 21, 22, question 2 de 26, 31, question 1 de 12, question 1 de 13, 15. Si le temps le permet, nous traiterons aussi les exercices 18, 27, 32 et 36.

Exercice 0 (à préparer) : TD11
Finir l'exercice 5 du TD11.

Exercice 1 (à préparer - question 1) : Spectres d'anneaux

1. Décrire les espaces topologiques suivants :

$$\mathrm{Spec}(\mathbb{C}), \quad \mathrm{Spec}(\mathbb{C}[X]/(X^2)), \quad \mathbb{A}^1_{\mathbb{C}} = \mathrm{Spec}(\mathbb{C}[X]),$$
$$\mathbb{A}^2_{\mathbb{C}} = \mathrm{Spec}(\mathbb{C}[X,Y]), \quad \mathbb{A}^1_{\mathbb{Z}} = \mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[X]).$$

Quelles sont leurs dimensions ?

2. Mêmes questions pour :

$$\mathrm{Spec}(\mathbb{C}[X]/(X^2(X^8+1))), \quad \mathrm{Spec}(\mathbb{R}[X]/(X^3+2X^2+2X)),$$
$$\mathbb{G}_{m,\mathbb{C}} = \mathrm{Spec}(\mathbb{C}[T,T^{-1}]), \quad \mathrm{Spec}(\mathbb{C}[X,Y]/(X^2-Y^2)),$$
$$\mathrm{Spec}(\mathbb{C}[X,Y]/(X^2-X)), \quad \mathrm{Spec}(\mathbb{C}[X,Y]/(X^2)).$$

Exercice 2 (à préparer) : Topologie de Zariski sur l'espace affine
Soient k un corps et $n \geq 1$ un entier. La topologie de Zariski sur k^n est la topologie induite par la topologie de Zariski de $\mathrm{Spec}(k[x_1,\dots,x_n])$ via l'inclusion canonique $k^n \subseteq \mathrm{Spec}(k[x_1,\dots,x_n])$. Supposons k infini. Montrer que la topologie de Zariski sur k^2 n'est pas la topologie produit sur $k \times k$ où k est muni de la topologie de Zariski.

Exercice 3 : Spec versus Max
Soit A une algèbre de type fini sur un corps. On munit $\mathrm{Max}(A) \subseteq \mathrm{Spec}(A)$ de la topologie induite. Construire une bijection entre les fermés de $\mathrm{Spec}(A)$ et ceux de $\mathrm{Max}(A)$. Montrer qu'elle induit une bijection entre les fermés irréductibles de $\mathrm{Spec}(A)$ et ceux de $\mathrm{Max}(A)$. Que se passe-t'il si A n'est pas

une algèbre de type fini sur un corps ?

Exercice 4 (à préparer - questions 1 et 2) : Un exemple
Soit $\Gamma = \{(n, 2^n, 3^n) | n \geq 1\}$, que l'on verra, selon les cas, comme un sous-ensemble de $\mathbb{Q}^3$ ou de $\mathbb{F}_p^3$ pour p premier.

1. Montrer que Γ est Zariski dense dans $\mathbb{C}^3$.

Soient p un nombre premier et $\overline{\mathbb{F}_p}$ une clôture algébrique de $\mathbb{F}_p$.

2. Montrer que Γ est fermé pour la topologie de Zariski dans $\overline{\mathbb{F}_p}^3$.

3. Déterminer explicitement Γ dans $\overline{\mathbb{F}_2}^3$ et $\overline{\mathbb{F}_3}^3$.

Exercice 5 : $V((I : J))$
Soient A un anneau et $J \subseteq I$ des idéaux de A. Soit $(I : J) = \{a \in A | aJ \subseteq I\}$. Montrer que $V((I : J)) = \overline{V(J) \setminus V(I)}$.

Exercice 6 : Anneau de fonctions continues
Soit X un sous-ensemble compact de $\mathbb{R}^n$. On note $C(X, \mathbb{R})$ l'anneau des fonctions continues sur X à valeurs dans $\mathbb{R}$.

1. Montrer que les ensembles $U_f = \{x \in X | f(x) \neq 0\}$ pour $f \in C(X, \mathbb{R})$ forment une base de la topologie de X.

On note $\operatorname{Max} C(X, \mathbb{R})$ le sous-ensemble de $\operatorname{Spec} C(X, \mathbb{R})$ constitué des points fermés. On rappelle que $x \mapsto \mathfrak{M}_x = \{f \in C(X, \mathbb{R}) | f(x) = 0\}$ induit une bijection ensembliste

$$\varphi : X \xrightarrow{\sim} \operatorname{Max} C(X, \mathbb{R}).$$

2. Montrer que, si l'on munit $\operatorname{Max} C(X, \mathbb{R})$ de la topologie de Zariski, φ est homéomorphisme.

Exercice 7 : Fonctorialité

1. Soit $f : A \to B$ un morphisme d'anneaux. Montrer que l'image inverse par f induit une application continue $f^\sharp : \operatorname{Spec} B \to \operatorname{Spec} A$.

2. Soit I un idéal de l'anneau A et soit $p : A \to A/I$ la projection canonique. Montrer que $p^\sharp : \operatorname{Spec} A/I \to \operatorname{Spec} A$ induit un isomorphisme de $\operatorname{Spec} A/I$ sur le fermé $V(I)$ de $\operatorname{Spec} A$.

3. Montrer que $\operatorname{Spec} A^{\mathrm{red}}$ est canoniquement homéomorphe à $\operatorname{Spec} A$.

Exercice 8 : Examen 2012
Soit A une $\mathbb{Z}$-algèbre de type fini.

1. Soit $\mathfrak{m}$ un idéal maximal de A. Dans toute la suite, on note $\mathbb{Z} \cap \mathfrak{m}$ l'image inverse de $\mathfrak{m}$ par l'application canonique $\mathbb{Z} \to A$. Montrer que l'anneau quotient $\mathbb{Z}/(\mathbb{Z} \cap \mathfrak{m})$ est soit $\mathbb{Z}$, soit un corps fini.

2. Montrer que le corps $A/\mathfrak{m}$ est une extension finie du corps des fractions de $\mathbb{Z}/(\mathbb{Z}\cap\mathfrak{m})$.
3. Si $\mathbb{Z}\cap\mathfrak{m}=0$, montrer qu'on arrive à une contradiction. En déduire que le corps $A/\mathfrak{m}$ est fini.
4. Soit $f\in A$ un élément non nilpotent et soit $\mathfrak{n}$ un idéal maximal de l'anneau de fractions (non nul) A_f . Montrer que le corps $A_f/\mathfrak{n}$ est fini.
5. En déduire que $A/(A\cap\mathfrak{n})$ est un corps fini.
6. Montrer que l'intersection de tous les idéaux maximaux de A est $\sqrt{(0)}$.
7. En déduire que les points fermés sont denses dans toute partie fermée de $\operatorname{Spec}(A)$.

Exercice 9 : Topologie de Zariski et irréductibilité
1. Montrer que tout sous-espace de $\mathbb{C}^n$ connexe pour la topologie standard est aussi connexe pour la topologie de Zariski.
2. Exhiber un contre-exemple à la réciproque.
3. Exhiber l'exemple d'un espace Zariski connexe mais non irréductible.

Exercice 10 : Espaces topologiques irréductibles
1. Montrer qu'un espace irréductible est connexe.
2. Montrer que l'image d'un espace irréductible par une application continue est irréductible.
3. Soit V un espace topologique. Soit W une partie dense de V. Montrer que V est irréductible si, et seulement si, W l'est.

Exercice 11 : Composantes irréductibles
Donner les composantes irréductibles de :

$$V(Y^2-X)\subseteq\mathbb{A}^2_{\mathbb{C}},\quad V(XY)\subseteq\mathbb{A}^2_{\mathbb{C}},\quad V(X^2+Y^2)\subseteq\mathbb{A}^2_{\mathbb{C}},$$
$$V(Y^2-X^3-X)\subseteq\mathbb{A}^2_{\mathbb{C}},\quad V(X^2,XY)\subseteq\mathbb{A}^2_{\mathbb{C}},\quad V(XY,YZ,ZX)\subseteq\mathbb{A}^3_{\mathbb{C}},$$
$$V(X^2Y^3-X^3YZ,Y^2Z-XZ^2)\subseteq\mathbb{A}^3_{\mathbb{C}},$$
$$V(ZX^2-2ZY^2,Y^3-Z^3)\subseteq\mathbb{A}^3_{\mathbb{C}},\quad V(ZX^2-2ZY^2,Y^3-Z^3)\subseteq\mathbb{A}^3_{\mathbb{Q}}.$$

Exercice 12 : Dimension de Krull
Soit X un espace topologique.
1. Montrer que, si Y est un sous-espace de X, alors $\dim Y\leq\dim X$.
2. Supposons X irréductible de dimension finie. Soit Y un fermé de X tel que $\dim Y=\dim X$. Montrer que $X=Y$.
3. Supposons X noethérien. Montrer que la dimension de X est le maximum des dimensions de ses composantes irréductibles.
4. Soit (U_i) un recouvrement ouvert de X. Montrer que $\dim X=\sup_i\dim U_i$.

Exercice 13 : Dimension de Krull d'un ouvert d'une variété
Soit k un corps. Soit A une k-algèbre de type fini. Soit $X = \mathrm{Spec}(A)$. Soit U un ouvert non vide de X.

1. Supposons X irréductible. Montrer que $\dim U = \dim X$.
2. Supposons que U est dense dans X ou que toutes les composantes irréductibles de X sont de même dimension (on dit alors que X est pur). Montrer que $\dim U = \dim X$.

Exercice 14 : Dimension de Krull et morphismes

1. Exhiber un morphisme d'anneaux $f : A \to B$ tel que $f^\sharp : \mathrm{Spec}\, B \to \mathrm{Spec}\, A$ est surjectif et $\dim\ A > \dim B$.
2. Soit $f : A \to B$ un morphisme d'anneaux. On suppose que f est fini et que $f^\sharp : \mathrm{Spec}\, B \to \mathrm{Spec}\, A$ est surjectif. Montrer que $\dim\ A = \dim\ B$.
3. Soient k un corps et $f : A \to B$ un morphisme de k-algèbres intègres de type fini. On suppose que $f^*(\{0\}) = \{0\}$ (on dit que f est dominant). Montrer que $\dim\ (f^\sharp)^{-1}(\{0\}) = \dim\ B - \dim\ A$.

Exercice 15 : Going-up ?
Soit k un corps. Soit $A \subseteq B$ une extension entière de k-algèbres de type fini. Soient $\mathfrak{p}_1$ et $\mathfrak{p}_2$ des idéaux premiers de A tels que $\mathfrak{p}_1 \subseteq \mathfrak{p}_2$

1. Expliquer pourquoi il existe des idéaux premiers $\mathfrak{q}_1$ et $\mathfrak{q}_2$ de B tels que $\mathfrak{q}_1 \cap A = \mathfrak{p}_1$, $\mathfrak{q}_2 \cap A = \mathfrak{p}_2$, et $\mathfrak{q}_1 \subseteq \mathfrak{q}_2$.
2. Soit $\mathfrak{p}$ un idéal premier de A tel que $\mathfrak{p}_1 \subsetneq \mathfrak{p} \subsetneq \mathfrak{p}_2$. Montrer qu'il existe un idéal premier $\mathfrak{q}$ de B tel que $\mathfrak{q}_1 \subsetneq \mathfrak{q} \subsetneq \mathfrak{q}_2$. Peut-on imposer que $\mathfrak{q} \cap A = \mathfrak{p}$?

Exercice 16 : Séries formelles
Soit k un corps. Soit l une sous-k-algèbre de $k[[t]]$, qui est un corps. Montrer que $k[[t]]$ n'est pas une l-algèbre de type fini.

Exercice 17 : Un exemple de Nagata
Soient k un corps et $A = k[X_1, \dots, X_n, \dots]$ l'anneau de polynômes en une infinité de variables. Soit (u_n) une suite croissante de $\mathbb{N}$ tendant vers l'infini, avec $u_1 = 0$. On note $\mathfrak{p}_n$ l'idéal premier $(X_{u_n+1}, \dots, X_{u_{n+1}})$. Soit S le complémentaire de la réunion des $\mathfrak{p}_n$.

1. Déterminer les idéaux maximaux de $S^{-1}A$.
2. Exhiber une condition suffisante sur (u_n) pour que la dimension de Krull de $S^{-1}A$ soit infinie.

On suppose désormais que (u_n) vérifie la condition exhibée à la question (b). Soit R un anneau dont les localisés en tout idéal maximal sont noethériens et tel que tout élément $x \in R \setminus \{0\}$ soit contenu dans un nombre fini d'idéaux maximaux.

3. Montrer que R est noethérien.

4. En déduire que $S^{-1}A$ est noethérien.

Exercice 18 : Points fermés de l'espace projectif

Soient k un corps algébriquement clos et $n \in \mathbb{N}$. Soit $\mathbb{P}^n(k)$ l'ensemble des droites de k^{n+1}. Pour $x = (x_0, ..., x_n) \in K^{n+1} \setminus \{0\}$, on note $[x_0 : ... : x_n] \in \mathbb{P}^n(k)$ la droite engendrée par x.

1. Soit I un idéal homogène de $A = k[X_0, ..., X_n]$, c'est-à-dire un idéal engendré par des polynômes homogènes. On note :

$$V(I) = \{[x_0 : ... : x_n] \in \mathbb{P}^n(k) | \forall f \in I \text{ homogène}, f(x_0, ..., x_n) = 0\}.$$

Montrer que on définit une topologie sur $\mathbb{P}^n(k)$ en décrétant que les fermés sont les $V(I)$ pour I idéal homogène de A.

2. Pour I idéal homogène de A, montrer que $V(I) = \emptyset$ si, et seulement si, pour $0 \leq i \leq n$, il existe $d \in \mathbb{N}$ tel que $X_i^d \in I$.

3. Montrer que $\mathbb{P}^n(k)$ est un espace topologique noethérien.

4. Montrer que $\mathbb{P}^n(k)$ s'écrit sous la forme $\bigcup_{i=0}^n U_i$ où chaque U_i est un ouvert dense de $\mathbb{P}^n(k)$ homéomorphe à $k^n \subseteq \mathrm{Spec}(k[Y_1, ..., Y_n])$.

5. En déduire que $\mathbb{P}^n(k)$ est irréductible de dimension n.

Exercice 19 : Espace projectif

Soient k un corps et $n \in \mathbb{N}$. Soient $S = k[X_0, ..., X_n]$ et $\mathbb{P}_k^n$ l'ensemble des idéaux premiers homogènes de S ne contenant pas $S_+ = (X_0, ..., X_n)$. Pour I idéal homogène de S, on note $V_+(I)$ l'ensemble des éléments de $\mathbb{P}_k^n$ contenant I. Pour $f \in S_+$ homogène, on note $D_+(f) = \{\mathfrak{p} \in \mathbb{P}_k^n | f \notin \mathfrak{p}\}$.

1. Montrer que les $V_+(I)$ sont les fermés d'une topologie sur $\mathbb{P}_k^n$. C'est la topologie de Zariski de $\mathbb{P}_k^n$.

2. Montrer que les $D_+(f)$ forment une base de la topologie de $\mathbb{P}_k^n$ et que $\mathbb{P}_k^n$ est recouvert par les $D_+(X_i)$ pour $0 \leq i \leq n$.

3. Montrer que, pour $0 \leq i \leq n$, $D_+(X_i)$ est homéomorphe à $\mathbb{A}_k^n$.

4. Montrer que $\mathbb{P}_k^n$ est un espace topologique noethérien irréductible de dimension n.

Exercice 20 : Lissité

Soit k un corps. La variété

$$V : x^2 - xz - y^2 - 1 = yz - x^2 - z^2 = 0$$

dans $\mathbb{A}_k^3$ est-elle lisse ?

Exercice 21 (à préparer) : Lissité versus régularité
Soient K un corps et $c \in K^\times$. Soit C la courbe d'équation $y^2 = x^3 - c$.

1. Montrer que C est une courbe (ie $\dim C = 1$).
2. Montrer que C est lisse si, et seulement si, K est de caractéristique différente de 2 et 3.
3. Dans le cas où K est de caractéristique 2 ou 3, quels sont les points non lisses de C ? Sont-ils réguliers ?

Exercice 22 (à préparer) : Surface normale singulière
Soit k un corps de caractéristique différente de 2. On considère le cône C d'équation $x^2 + y^2 = z^2$ dans $\mathbb{A}^3_k$. Montrer que le point $(0,0,0)$ est singulier. Y a-t'il d'autres points singuliers ? L'anneau $\mathcal{O}(C)$ est-il normal ?

Exercice 23 : Variété réduite et extension des scalaires
Soient k un corps et A une k-algèbre de type fini réduite. Soit l une extension finie de k. L'algèbre $A \otimes_k l$ est-elle nécessairement réduite ?

Exercice 24 : Différentielles de Kähler
Soient A un anneau et B une A-algèbre. Soit M un B-module. On dit qu'une application A-linéaire $d : B \to M$ est une A-dérivation de B dans M si $d(b_1b_2) = b_1db_2 + b_2db_1$ pour $b_1, b_2 \in B$ et $da = 0$ pour $a \in A$. On note $\mathrm{Der}_A(B, M)$ l'ensemble des A-dérivations de B dans M.

1. Montrer qu'il existe un B-module $\Omega^1_{B/A}$ et une A-dérivation $d : B \to \Omega^1_{B/A}$ tels que, pour chaque B-module M, l'application $\mathrm{Hom}_B(\Omega^1_{B/A}, M) \to \mathrm{Der}_A(B, M), \phi \mapsto \phi \circ d$ est une bijection. Montrer que le couple $(\Omega^1_{B/A}, d)$ est unique à isomorphisme près. On l'appelle le module des formes différentielles relatives de B sur A.
2. Montrer que le couple $(\Omega^1_{B/A}, d)$ s'identifie à $(I/I^2, \delta)$ où I est le noyau de $B \otimes_A B \to B, b \otimes b' \mapsto bb'$ et $\delta : B \to I/I^2, b \mapsto b \otimes 1 - 1 \otimes b$.
3. Calculer $(\Omega^1_{B/A}, d)$ dans les cas suivants :
   (a) $B = A[T_1, ..., T_n]$ pour un certain $n \geq 0$;
   (b) B est un quotient de A ;
   (c) B est un localisé de A.
4. Montrer les propriétés suivantes :
   (a) Pour toute A-algèbre A', si $B' = B \otimes_A A'$, il existe un isomorphisme canonique de B'-modules $\Omega^1_{B'/A'} \cong \Omega^1_{B/A} \otimes_B B'$.
   (b) Si $B \to C$ est un morphisme de A-algèbres, il existe une suite exacte naturelle :

$$\Omega^1_{B/A} \otimes_B C \to \Omega^1_{C/A} \to \Omega^1_{C/B} \to 0.$$

(c) Si S est une partie multiplicative de B, $S^{-1}\Omega^1_{B/A} \cong \Omega^1_{S^{-1}B/A}$.
(d) Si $C = B/J$ pour un certain idéal J, il existe une suite exacte naturelle :

$$I/I^2 \to \Omega^1_{B/A} \otimes_B C \to \Omega^1_{C/A} \to 0.$$

5. Déduire de ce qui précède que, si B est une localisation d'une A-algèbre de type fini, alors $\Omega^1_{B/A}$ est un B-module de type fini. Calculer $(\Omega^1_{B/A}, d)$ lorsque $B = A[X_1, ..., X_n]/(f)$ pour un certain $f \in A[X_1, ..., X_n]$.

6. (a) Supposons que $A = k$ est un corps et que B est une k-algèbre de type fini. Soit $\mathfrak{m} \in \text{Spec } B$ tel que $B/\mathfrak{m} \cong k$. Montrer que $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ et $\Omega^1_{B/k} \otimes_B B/\mathfrak{m}$ sont isomorphes.
(b) Supposons que $A = k$ est un corps algébriquement clos et que B est une k-algèbre intègre de type fini. Soit $X = \text{Spec } B$. Montrer que X est lisse si, et seulement si, $\Omega^1_{B/k}$ est un B-module localement libre de rang dim B. On dit qu'un B-module M est localement libre de rang n si, pour tout idéal premier $\mathfrak{p}$ de B, il existe $f \in B \setminus \mathfrak{p}$ tel que $M[f^{-1}]$ est un $B[f^{-1}]$-module libre de rang n.

Exercice 25 : Ouvert lisse
Soient k un corps algébriquement clos et A une k-algèbre intègre de type fini. Soit $X = \text{Spec } A$. Montrer que X contient un ouvert dense et lisse.

Exercice 26 : Valuations

1. Quelles sont les valuations de $\mathbb{Q}$? Quels sont les anneaux de valuation correspondants ? Quels sont leurs complétés ?

2. Même question pour $\mathbb{F}_q(t)$.

Exercice 27 : Théorème d'approximation faible d'Artin-Whaples
Soit K un corps. Soient $v_1, ..., v_n$ des valuations discrètes deux à deux distinctes sur K. Soient $x_1, ..., x_n$ des éléments de K. Soit $m \in \mathbb{N}$. Montrer qu'il existe $x \in K$ tel que $v_i(x - x_i) > m$ pour chaque i.

Exercice 28 : Valuations et extensions de corps
Soit L/K un extension de corps. Soit v une valuation discrète sur K, qui en fait un corps complet. Montrer qu'il existe une unique valuation discrète sur L qui étend v.

Exercice 29 : Avd complet à corps résiduel $\mathbb{C}$
Quels sont les anneaux de valuation discrète complets à corps résiduel $\mathbb{C}$?

Exercice 30 : Retour au lemme de Hensel
Soit K un corps, muni d'une valuation discrète v qui en fait un corps complet. Soit A l'anneau de valuation. Soit $\mathfrak{p}$ l'idéal maximal de A.

1. Soient $f, g, h \in A[X]$ tels que f est primitif, $\overline{f} = \overline{g}\overline{h} \in A/\mathfrak{p}[X]$ et $\overline{g}$ et $\overline{h}$ sont premiers entre eux. Montrer qu'il existe $G, H \in A[X]$ tels que $f = GH$, $\deg G = \deg \overline{g}$, $\overline{G} = \overline{g}$ et $\overline{H} = \overline{h}$.

2. Soit $f = a_0 + a_1 X + ... + a_n X^n \in K[X]$ un polynôme irréductible avec $a_0 a_n \neq 0$. Montrer que $\min\{v(a_i) | 0 \leq i \leq n\} = \min\{v(a_0), v(a_n)\}$. En déduire que, si $a_n = 1$ et $a_0 \in A$, alors $f \in A[X]$.

Exercice 31 : Exemples d'anneaux de Dedekind
Parmi les anneaux suivants, lesquels sont de Dedekind ?

$$\mathbb{Z}[\sqrt{5}],\ \mathbb{Z}[\frac{1+\sqrt{5}}{2}],\ \mathbb{Z}[\zeta_{81}],\ \mathbb{R}[X,Y]/(X^2+Y^2-1),$$
$$\mathbb{R}[X,Y]/(Y^2-X^3-X^2),\ \mathbb{R}[X,Y,Z]/(X^2+Y^2+Z).$$

Exercice 32 : Anneaux de Dedekind et anneaux principaux
Montrer qu'un anneau de Dedekind possédant un nombre fini d'idéaux premiers est un anneau principal.

Exercice 33 : Idéaux dans les anneaux de Dedekind
Montrer que tout idéal d'un anneau de Dedekind est engendré par deux éléments.

Exercice 34 : "Moving lemma"
Soit I un idéal non nul d'un anneau de Dedekind A de corps des fractions K. Montrer qu'il existe $a \in K^{\times}$ tel que aI est un idéal de A premier avec I.

Exercice 35 : Une réciproque
Soit A un anneau intègre tel que tout idéal non nul s'écrit de manière unique (à l'ordre près) comme produit d'idéaux premiers. Montrer que A est de Dedekind.

Exercice 36 : Produit tensoriel d'idéaux
Soient A un anneau de Dedekind et I et J deux idéaux de A. Montrer que le morphisme de A-modules $f : I \otimes_A J \to IJ, i \otimes j \mapsto ij$ est un isomorphisme. Le résultat subsiste-t'il si A n'est pas de Dedekind ?