TD3: Ensembles algébriques, topologie de Zariski, anneaux noethériens et modules

Diego Izquierdo

Attention: pas de TD le 29 septembre. Deux séances au choix: le 04/10 à 12h30 en salle Verdier ou Henri Cartan (à préciser) et le 04/10 à 15h15 en salle W. Les exercices 0, 1, 4 sont à préparer avant la séance. Nous traiterons les exercices dans l'ordre suivant: 0, 1, 4, 6, 8 (sans la question 3), 10.

Exercice 0 (à préparer) : Retour au TD2

- **1.** Combien l'anneau $\mathbb{R}[X]/(X^5(X^4-1))$ possède-t'il d'idéaux ? d'idéaux premiers ? d'idéaux maximaux ?
- 2. Montrer que, dans $\mathbb{Z}\left[\frac{1+\sqrt{13}}{2}\right]$, l'idéal (3) n'est pas premier, mais il est contenu dans exactement deux idéaux premiers, qui sont maximaux.

Exercice 1 (à préparer) : Topologie de Zariski

Pour chaque idéal I de $\mathbb{C}[X_1,...,X_n]$, on note :

$$V(I) = \{(z_1, ..., z_n) \in \mathbb{C}^n | \forall f \in I, f(z_1, ..., z_n) = 0\}.$$

Les V(I) sont appelés sous-ensembles algébriques de \mathbb{C}^n .

1. Montrer que les sous-ensembles algébriques de \mathbb{C}^n sont les fermés d'une topologie sur \mathbb{C}^n .

On appelle cette topologie la **topologie de Zariski** de \mathbb{C}^n . Si V est un sousensemble algébrique de \mathbb{C}^n , la topologie de Zariski de V est par définition celle induite par la topologie de Zariski sur \mathbb{C}^n .

- 2. Comparer la topologie de Zariski sur \mathbb{C}^n à la topologie usuelle.
- **3.** Pour $f \in \mathbb{C}[X_1, ..., X_n]$, on note D(f) l'ensemble des $(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{C}^n$ tels que $f(x_1, ..., x_n) \neq 0$. Montrer que les D(f) forment une base de voisinages ouverts de \mathbb{C}^n (muni de la topologie de Zariski).
- 4. Décrire explicitement la topologie de Zariski sur C.

Exercice 2 : Produit et topologie de Zariski

- 1. Montrer que la topologie de Zariski sur \mathbb{C}^2 ne coïncide pas la topologie produit sur $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$ où \mathbb{C} est muni de la topologie de Zariski.
- 2. Soit $n \geq 1$ un entier. Montrer que la projection $p: \mathbb{C}^{n-1} \times \{0\} \to \mathbb{C}^{n-1}$ est un homéomorphisme entre $\mathbb{C}^{n-1} \times \{0\}$ muni de la topologie induite par la topologie de Zariski sur \mathbb{C}^n et \mathbb{C}^{n-1} muni de la topologie de Zariski.

Exercice 3: Séparation

Soit $n \geq 1$ un entier. Montrer que la topologie de Zariski sur \mathbb{C}^n n'est pas séparée.

Exercice 4 (à préparer) : Adhérence

On munit toujours \mathbb{C}^n de la topologie de Zariski.

- 1. Quelle est l'adhérence de $\Gamma_1 = \mathbb{Z}$ dans \mathbb{C} ?
- **2.** Quelle est l'adhérence de $\Gamma_2 = \{(t, t^2, t^3) | t \in \mathbb{C}\}$ dans \mathbb{C}^3 ?
- **3.** Quelle est l'adhérence de $\Gamma_3 = \{(n, 2^n, 3^n) | n \in \mathbb{N}\}$ dans \mathbb{C}^3 ?

Exercice 5 : Questions diverses sur l'irréductibilité et la connexité On rappelle qu'un espace topologique non vide est irréductible s'il n'est pas réunion de deux fermés stricts.

- 1. Montrer que tout sous-espace de \mathbb{C}^n connexe pour la topologie standard est aussi connexe pour la topologie de Zariski.
- 2. Exhiber un contre-exemple à la réciproque.
- 3. Exhiber l'exemple d'un espace Zariski connexe mais non irréductible.
- 4. Montrer qu'un espace irréductible est connexe.
- **5.** Montrer que l'image d'un espace irréductible par une application continue est irréductible.
- **6.** Soit V un espace topologique. Soit W une partie dense de V. Montrer que V est irréductible si, et seulement si, W l'est.

Exercice 6 : Connexité et topologie de Zariski

Soit V un sous-ensemble algébrique de \mathbb{C}^n muni de la topologie de Zariski. On admet la conséquence suivante du Nullstellensatz : si I est un idéal propre de $\mathcal{O}(V)$, alors $V(I) \neq \emptyset$.

1. Soit e un idempotent primitif de $\mathcal{O}(V)$. Montrer que

$$V_e = \{(z_1, ..., z_n) \in V | e(z_1, ..., z_n) = 1\}$$

est une composante connexe de V.

- 2. On admet que V possède un nombre fini de composantes connexes. Soit W une composante connexe de V. Montrer qu'il existe un unique idempotent primitif e de $\mathcal{O}(V)$ tel que $W = V_e$.
- 3. On considère la courbe C d'équation

$$xy(xy-1) = 0$$

dans \mathbb{C}^2 . Vérifier que $\mathcal{O}(C) = \mathbb{C}[X,Y]/(XY(XY-1))$. Quelles sont les composantes connexes de C? Sont-elles irréductibles? Quels sont les idempotents primitifs de $\mathcal{O}(C)$ correspondants?

Exercice 7 (culturel): Espace tangent

Soit $A = \mathbb{C}[X_1, ..., X_n]$.

1. Soit $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{C}^n$. Montrer que $\mathfrak{m}_x = \{f \in A | f(x_1, ..., x_n) = 0\}$ est un idéal maximal de A.

- **2.** On note $\overline{X_1},...,\overline{X_n}$ les images de $X_1,...,X_n$ dans A/\mathfrak{m}_x^2 . Vérifier que $\mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2$ est un \mathbb{C} -espace vectoriel de base $\overline{X_1}-x_1,...,\overline{X_n}-x_n$.
- **3.** Montrer que :

$$\phi: A/\mathfrak{m}_x^2 \to A/\mathfrak{m}_x \oplus \mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2$$
$$f \mapsto \left(f(x), \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial X_i}(x) (\overline{X_i} - x_i) \right)$$

est un isomorphisme de \mathbb{C} -espaces vectoriels. En géométrie algébrique, l'**espace cotangent** à \mathbb{C}^n en x est par définition le \mathbb{C} -espace vectoriel $\mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2$ et l'**espace tangent** est $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2,\mathbb{C})$.

- **4.** Plus généralement, soit V un sous-ensemble algébrique de \mathbb{C}^n . Soit $x = (x_1, ..., x_n) \in V$. Montrer que $\mathfrak{m}_{V,x} = \{f \in \mathcal{O}(V) | f(x_1, ..., x_n) = 0\}$ est un idéal maximal de $\mathcal{O}(V)$.
- 5. L'espace cotangent à V en x est par définition le \mathbb{C} -espace vectoriel $T^*_{V,x} = \mathfrak{m}_{V,x}/\mathfrak{m}^2_{V,x}$ et l'espace tangent est $T_{V,x} = \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathfrak{m}_{V,x}/\mathfrak{m}^2_{V,x},\mathbb{C})$. Soit I(V) l'idéal noyau de la surjection $\psi: A \to \mathcal{O}(V)$. Montrer que ψ induit une application linéaire surjective $\psi^*: T^*_{\mathbb{C}^n,x} \to T^*_{V,x}$ de noyau l'image de :

$$d_x : I(V) \to T^*_{\mathbb{C}^n, x}$$

 $f \mapsto \frac{\partial f}{\partial X_i}(x)(\overline{X_i} - x_i).$

- **6.** Soit $d_x X_1^*, ..., d_x X_n^*$ la base de $T_{\mathbb{C}^n,x}$ qui est la base duale de $\overline{X_1} x_1, ..., \overline{X_n} x_n$. Déduire de la question précédente que $T_{V,x}$ s'identifie au sous-espace de $T_{\mathbb{C}^n,x}$ constitué des éléments $\sum_{i=1}^n \lambda_i d_x X_i^*$ tels que $\sum_{i=1}^n \lambda_i \frac{\partial f}{\partial X_i}(x) = 0$.
- 7. Calculer les espaces tangents en (0,0) des courbes d'équations :

$$x^7 + xy = y^7 + y$$
 et $x^2 = y^3$

dans \mathbb{C}^2 .

8. Soit V un sous-ensemble algébrique de \mathbb{C}^n . On note ϵ la classe de X dans $\mathbb{C}[X]/(X^2)$, de sorte que $\mathbb{C}[X]/(X^2) = \mathbb{C}[\epsilon]$. Soit θ la projection naturelle $\mathbb{C}[\epsilon] \to \mathbb{C}$. Elle induit une fonction :

$$\theta^* : \operatorname{Hom}_{\mathbb{C}-\operatorname{alg\`ebres}}(\mathcal{O}(V), \mathbb{C}[\epsilon]) \to \operatorname{Hom}_{\mathbb{C}-\operatorname{alg\`ebres}}(\mathcal{O}(V), \mathbb{C}).$$

Soit $x \in V$. Soit $\operatorname{ev}_x : \mathcal{O}(V) \to \mathbb{C}$ l'évaluation en x. On a $\operatorname{ev}_x \in \operatorname{Hom}_{\mathbb{C}-\operatorname{algèbres}}(\mathcal{O}(V),\mathbb{C})$. Montrer que $(\theta^*)^{-1}(\{\operatorname{ev}_x\})$ s'identifie à l'espace tangent de V en x.

Remarque: Le Nullstellensatz que vous verrez plus tard dans le cours montre que tout morphisme dans $\operatorname{Hom}_{\mathbb{C}-\operatorname{algèbres}}(\mathcal{O}(V),\mathbb{C})$ est de la forme ev_x pour un certain $x \in V$.

Exercice 8 : Un exemple d'anneau non noethérien

Soit $A = \{ P \in \mathbb{Q}[X] \mid P(0) \in \mathbb{Z} \}.$

- 1. Montrer que A n'est pas factoriel.
- 2. Montrer que A n'est pas noethérien.
- **3.** Montrer que A est de Bézout, c'est-à-dire que tout idéal de type fini de A est principal.

Exercice 9: Un autre exemple d'anneau non noethérien

On rappelle qu'un nombre complexe x est un entier algébrique s'il existe un polynôme $P \in \mathbb{Z}[X]$ unitaire tel que l'on ait P(x) = 0. On note $\overline{\mathbb{Z}}$ l'anneau des entiers algébriques.

- 1. Rappeler pourquoi $\overline{\mathbb{Z}}$ est un anneau.
- 2. Montrer que $\overline{\mathbb{Z}}$ n'est pas factoriel
- 3. Montrer que $\overline{\mathbb{Z}}$ n'est pas noethérien.
- 4. Comme dans l'exercice 3, on peut montrer que $\overline{\mathbb{Z}}$ est un anneau de Bézout, mais la preuve dépasse largement le cadre de ce cours.

Exercice 10: Et encore un exemple d'anneau non noethérien

Soit k un corps. Montrer que la sous-k-algèbre de k[X,Y] engendrée par les X^nY pour n>0 n'est pas noethérienne.

Exercice 11: Anneau des fonctions continues

Soit X un espace topologique métrisable. A quelle condition sur X l'anneau des fonctions continues de X dans \mathbb{R} est-il noethérien?

Exercice 12: Modules de type fini

Soient A un anneau, M un A-module de type fini et $n \in \mathbb{N}$. Considérons un morphisme surjectif de A-modules $u: M \to A^n$. Montrer que $\operatorname{Ker}(u)$ est un A-module de type fini.

Exercice 13 : Théorème de Cayley-Hamilton

Soit R un anneau.

1. Soit M un R-module de type fini. Soient $m_1, ..., m_n$ des générateurs de M. Soit f un endomorphisme de M, et considérons une matrice

- $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(R)$ telle que $f(m_i) = \sum_{j=1}^n a_{ij} m_j$ pour $1 \le i \le n$. On note $P(X) = \det(XI_n A)$. Montrer que P(f) = 0.
- **2.** Soit M un R-module de type fini.
 - (a) Soit I un idéal de R tel que IM = M. Montrer qu'il existe $a \in I$ tel que (1 a)M = 0.
 - (b) Déduire qu'un endomorphisme surjectif de M est un isomorphisme. Comparer ce résultat à la question 1. de l'exercice 16 du TD2.
- **3.** Montrer que, si m et n sont deux entiers naturels et $g: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ est un morphisme injectif de R-modules, alors $m \leq n$.

Exercice 14: Modules projectifs et injectifs

Soit A un anneau.

- **1.** Soient M, N et P trois A-modules. Si l'on a une suite exacte $0 \to M \to N \to P \to 0$, peut-on en déduire que $N \cong M \oplus P$?
- **2.** Soient M, N et P trois A-modules. Montrer que les trois conditions suivantes sont équivalentes :
 - il existe un isomorphisme $N \cong M \oplus P$.
 - il existe une suite exacte de A-modules $0 \longrightarrow M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} P \longrightarrow 0$ et un morphisme de A-modules $s: P \to N$ tel que $g \circ s = \mathrm{Id}_P$.
 - il existe une suite exacte de A-modules $0 \longrightarrow M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} P \longrightarrow 0$ et un morphisme de A-modules $t: N \to M$ tel que $t \circ f = \mathrm{Id}_M$.
- **3.** On dit qu'un A-module P est projectif si la propriété suivante est vérifiée : si M et N sont des A-modules tels qu'il existe une suite exacte $0 \to M \to N \to P \to 0$, alors il existe un isomorphisme $N \cong M \oplus P$.
 - (a) Montrer qu'un A-module est projectif si, et seulement si, il est un facteur direct d'un A-module libre.
 - (b) Montrer que si A est un corps, alors tout A-module est projectif.
 - (c) Montrer que si $A = \mathbb{Z}$, un A-module de type fini est projectif si, et seulement si, il est libre. En utilisant la classification des modules de type fini sur un anneau principal que vous verrez en cours plus tard, on peut montrer que ce résultat subsiste si A est principal.
 - (d) Supposons que $A = B \times C$ où B et C sont des anneaux non nuls. Montrer que B est un A-module projectif non libre.
 - On se place dans le cas où A est l'anneau des fonctions continues 2π périodiques de \mathbb{R} dans \mathbb{R} .
 - (e) Soit P le A-module formé des fonctions continues de \mathbb{R} dans \mathbb{R} telles que $f(x+2\pi)=-f(x)$ pour tout $x\in\mathbb{R}$. En construisant un isomorphisme de A-modules $P\oplus P\cong A\oplus A$, montrer que P est projectif. Est-il libre?
 - (f) Soit N le A-module constitué des fonctions continues f de \mathbb{R} dans

 $\mathbb R$ à décroissance rapide (c'est-à-dire telles que, pour tout $n\geq 0,$ on a $\lim_{x\to +\infty} x^n f(x) = \lim_{x\to -\infty} x^n f(x) = 0).$ Montrer qu'il existe un facteur direct du A-module N isomorphe à P.

- **4.** On dit qu'un A-module M est *injectif* si la propriété suivante est vérifiée : si N et P sont des A-modules tels qu'il existe une suite exacte $0 \to M \to N \to P \to 0$, alors il existe un isomorphisme $N \cong M \oplus P$.
 - (a) Montrer qu'un A-module M est injectif si, et seulement si, pour tout idéal I de A, tout morphisme de A-modules $I \to M$ s'étend en un morphisme de A-modules $A \to M$.
 - (b) Montrer que si A est un corps, alors tout A-module est injectif.
 - (c) Est-ce que \mathbb{Z} est un \mathbb{Z} -module injectif? Pour n > 0, est-ce que $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est un $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ -module injectif?

On se place maintenant dans le cas $A = \mathbb{Z}$.

- (d) Montrer qu'un groupe abélien M est injectif si, et seulement si, il est divisible, c'est-à-dire que pour tout $m \in M$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $m' \in M$ tel que m = nm'.
- (e) Quels sont les groupes abéliens de type fini injectifs?
- (f) Montrer que le groupe abélien \mathbb{R}/\mathbb{Z} possède un facteur direct isomorphe à \mathbb{R}/\mathbb{Q} .