

# TD4 : ANNEAUX NOETHÉRIENS ET MODULES

Diego Izquierdo

*Les exercices 1, 3 et 12 sont à préparer avant le TD. Pendant la séance de TD, les exercices seront traités dans l'ordre suivant : 1, 3, 12, 7, 13. Si le temps le permet, nous traiterons ensuite les exercices 19, 17, ... L'exercice 18 est important, mais trop long pour être traité pendant la séance : il est donc vivement conseillé de le faire chez soi.*

## Exercice 1 (à préparer) : Vrai ou faux ?

Soit  $A$  un anneau.

1. Tout sous-anneau d'un anneau noethérien est noethérien.
2. Tout anneau intègre noethérien est factoriel.
3. Si  $A$  est intègre, toute famille libre maximale de  $A^n$  est de cardinal  $n$ .
4. Si  $A$  est intègre, toute famille génératrice minimale de  $A^n$  est de cardinal  $n$ .
5. Si  $M$  est un groupe abélien et  $M_{tor}$  est le sous-module de torsion de  $M$ , alors  $M_{tor}$  a un supplémentaire dans  $M$ .
6. Si  $A$  est intègre, tout sous-module d'un  $A$ -module libre est libre.
7. Il existe un  $\mathbb{Z}$ -module qui n'a pas de famille génératrice minimale.
8. Si  $0 \rightarrow M_1 \rightarrow M_2 \rightarrow M_3 \rightarrow 0$  est une suite exacte de  $A$ -modules et  $M_1$  et  $M_3$  sont de type fini, alors  $M_2$  est de type fini.
9. Pour  $\alpha \in \mathbb{C}$ , l'anneau  $\mathbb{Z}[\alpha]$  est noethérien.
10. Si  $A$  est noethérien, un sous- $A$ -module d'un  $A$ -module de type fini est de type fini.

## Exercice 2 : Vrai ou faux ? Le retour

Soit  $A$  un anneau.

1. Tout quotient d'un anneau noethérien est noethérien.
2. Tout anneau factoriel est noethérien.
3. Tout anneau euclidien est noethérien.
4. Si  $I$  est un idéal de type fini de  $A$  et  $A/I$  est noethérien, alors  $A$  est noethérien.
5. Un produit fini d'anneaux noethériens est un anneau noethérien.
6. Toute famille génératrice minimale de  $A^n$  est de cardinal au moins  $n$ .
7. Toute famille libre maximale de  $A^n$  est une base de  $A^n$ .
8. Toute famille génératrice minimale de  $A^n$  est une base.
9. Il existe un  $\mathbb{Z}$ -module qui n'a pas de famille libre maximale.
10. Un  $\mathbb{Z}$ -module sans torsion est libre.

11. Si  $0 \rightarrow M_1 \rightarrow M_2 \rightarrow M_3 \rightarrow 0$  est une suite exacte de  $A$ -modules et  $M_1$  et  $M_3$  sont libres de rang fini, alors  $M_2$  est libre de rang  $\text{rg}(M_1) + \text{rg}(M_3)$ .

**Exercice 3 (à préparer) : Un exemple d'anneau non noethérien**

Soit  $A = \{P \in \mathbb{Q}[X] \mid P(0) \in \mathbb{Z}\}$ .

1. Montrer que  $A$  n'est pas factoriel.
2. Montrer que  $A$  n'est pas noethérien.
3. Montrer que  $A$  est de Bézout, c'est-à-dire que tout idéal de type fini de  $A$  est principal.

**Exercice 4 : Un autre exemple d'anneau non noethérien**

On rappelle qu'un nombre complexe  $x$  est un *entier algébrique* s'il existe un polynôme  $P \in \mathbb{Z}[X]$  unitaire tel que l'on ait  $P(x) = 0$ . On note  $\overline{\mathbb{Z}}$  l'anneau des entiers algébriques.

1. Rappeler pourquoi  $\overline{\mathbb{Z}}$  est un anneau.
2. Montrer que  $\overline{\mathbb{Z}}$  n'est pas factoriel.
3. Montrer que  $\overline{\mathbb{Z}}$  n'est pas noethérien.
4. Comme dans l'exercice 3, on peut montrer que  $\overline{\mathbb{Z}}$  est un anneau de Bézout, mais la preuve dépasse largement le cadre de ce cours.

**Exercice 5 : Anneau des fonctions continues**

Soit  $X$  un espace topologique métrisable. À quelle condition sur  $X$  l'anneau des fonctions continues de  $X$  dans  $\mathbb{R}$  est-il noethérien ?

**Exercice 6 : Séries formelles**

Soit  $A$  un anneau noethérien. Montrer que  $A[[X]]$  est noethérien.

**Exercice 7 : Idéaux premiers minimaux**

Soit  $A$  un anneau noethérien.

1. En raisonnant par l'absurde, montrer que, pour tout idéal  $I$  de  $A$ , il existe des idéaux premiers  $\mathfrak{p}_i$  vérifiant  $\mathfrak{p}_1 \mathfrak{p}_2 \cdots \mathfrak{p}_{n_I} \subseteq I$ .
2. Montrer que l'on peut exiger  $I \subseteq \mathfrak{p}_i$  pour tout  $1 \leq i \leq n_I$  dans la question précédente.
3. En déduire qu'il existe un nombre fini d'idéaux premiers minimaux.

**Exercice 8 : Noethérianité et factorialité**

Soit  $A$  un anneau intègre noethérien. Montrer que tout élément non nul de  $A$  s'écrit sous la forme  $up_1 \cdots p_n$  avec  $u \in A^\times$  et  $p_i$  irréductible pour chaque  $i$ . L'anneau  $A$  est-il forcément factoriel ?

**Exercice 9 : Une caractérisation des anneaux noethériens**

Soient  $A$  un anneau,  $I$  un idéal de  $A$  et  $a$  un élément de  $A$ . Montrer que si  $I + (a)$  et  $\{x \in A \mid ax \in I\}$  sont des idéaux de type fini de  $A$ , alors  $I$  est de type fini. En déduire que  $A$  est noethérien si, et seulement si, tous ses idéaux premiers sont de type fini.

**Exercice 10 : Modules de type fini**

Soient  $A$  un anneau,  $M$  un  $A$ -module de type fini et  $n \in \mathbb{N}$ . Considérons un morphisme surjectif de  $A$ -modules  $u : M \rightarrow A^n$ . Montrer que  $\text{Ker}(u)$  est un  $A$ -module de type fini.

**Exercice 11 : Sous-groupes du groupe des racines de l'unité**

Faire la liste des sous-groupes du groupe des racines de l'unité dans  $\mathbb{C}^\times$ .

**Exercice 12 (à préparer) : Modules noethériens**

Soit  $A$  un anneau. Soient  $M, N$  et  $P$  trois  $A$ -modules. Supposons qu'il existe un morphisme injectif de  $A$ -modules  $i : M \rightarrow N$  et un morphisme surjectif de  $A$ -modules  $p : N \rightarrow P$  tels que  $p \circ i = 0$ . Montrer que  $N$  est noethérien si, et seulement si,  $M, P$  et  $\text{Ker}(p)/\text{Im}(i)$  sont noethériens.

**Exercice 13 : Endomorphismes surjectifs d'un module noethérien**

Considérons  $A$  un anneau et  $M$  un  $A$ -module noethérien. Soit  $u : M \rightarrow M$  un morphisme de  $A$ -modules. Montrer qu'il existe  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $\text{Ker}(u^n) \cap \text{Im}(u^n) = 0$ . En déduire que, si  $u$  est surjectif, alors  $u$  est un isomorphisme. Ce résultat subsiste-t'il si  $M$  n'est pas supposé noethérien ?

**Exercice 14 : Modules noethériens et polynômes**

Soient  $A$  un anneau et  $M$  un  $A$ -module. Montrer que  $M[X]$  est un  $A[X]$ -module noethérien si, et seulement si,  $M$  est un  $A$ -module noethérien.

**Exercice 15 : Chasses au diagramme**

1. Soit  $A$  un anneau. Soient  $f : M \rightarrow N$  et  $g : N \rightarrow P$  des morphismes de  $A$ -modules. Montrer qu'il existe une suite exacte :

$$0 \rightarrow \text{Ker}(f) \rightarrow \text{Ker}(g \circ f) \rightarrow \text{Ker}(g) \rightarrow \text{Coker}(f) \rightarrow \text{Coker}(g \circ f) \rightarrow \text{Coker}(g) \rightarrow 0.$$

2. On considère un diagramme commutatif de  $A$ -modules à lignes exactes :

$$\begin{array}{ccccccccc} M_1 & \longrightarrow & M_2 & \longrightarrow & M_3 & \longrightarrow & M_4 & \longrightarrow & M_5 \\ \downarrow f_1 & & \downarrow f_2 & & \downarrow f_3 & & \downarrow f_4 & & \downarrow f_5 \\ N_1 & \longrightarrow & N_2 & \longrightarrow & N_3 & \longrightarrow & N_4 & \longrightarrow & N_5. \end{array}$$

On suppose que les morphismes  $f_1, f_2, f_4, f_5$  sont des isomorphismes. Montrer que  $f_3$  est un isomorphisme.

### Exercice 16 : Déterminant

Soient  $R$  un anneau et  $n$  un entier naturel non nul. Soit  $f : R^n \rightarrow R^n$  un morphisme de  $R$ -modules. Soit  $A$  la matrice de  $f$  dans la base canonique de  $R^n$ .

1. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :
  - (i)  $f$  est surjectif ;
  - (ii)  $f$  est un isomorphisme ;
  - (iii)  $\det(A) \in R^\times$ .
2. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :
  - (i)  $f$  est injectif ;
  - (ii)  $\det(A)$  n'est pas un diviseur de 0 dans  $R$ .

### Exercice 17 : Théorème de Cayley-Hamilton

Soit  $R$  un anneau.

1. Soit  $M$  un  $R$ -module de type fini. Soient  $m_1, \dots, m_n$  des générateurs de  $M$ . Soit  $f$  un endomorphisme de  $M$ , et considérons une matrice  $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(R)$  telle que  $f(m_i) = \sum_{j=1}^n a_{ij}m_j$  pour  $1 \leq i \leq n$ . On note  $P(X) = \det(XI_n - A)$ . Montrer que  $P(f) = 0$ .
2. Soit  $M$  un  $R$ -module de type fini.
  - (a) Soit  $I$  un idéal de  $R$  tel que  $IM = M$ . Montrer qu'il existe  $a \in I$  tel que  $(1 - a)M = 0$ .
  - (b) Dédurre qu'un endomorphisme surjectif de  $M$  est un isomorphisme. Comparer ce résultat à la question 1. de l'exercice précédent.
3. Montrer que, si  $m$  et  $n$  sont deux entiers naturels et  $g : R^m \rightarrow R^n$  est un morphisme injectif de  $R$ -modules, alors  $m \leq n$ .

### Exercice 18 (important) : Modules projectifs et injectifs

Soit  $A$  un anneau.

1. Soient  $M, N$  et  $P$  trois  $A$ -modules. Si l'on a une suite exacte  $0 \rightarrow M \rightarrow N \rightarrow P \rightarrow 0$ , peut-on en déduire que  $N \cong M \oplus P$  ?
2. Soient  $M, N$  et  $P$  trois  $A$ -modules. Montrer que les trois conditions suivantes sont équivalentes :
  - il existe un isomorphisme  $N \cong M \oplus P$ .
  - il existe une suite exacte de  $A$ -modules  $0 \longrightarrow M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} P \longrightarrow 0$  et un morphisme de  $A$ -modules  $s : P \rightarrow N$  tel que  $g \circ s = \text{Id}_P$ .
  - il existe une suite exacte de  $A$ -modules  $0 \longrightarrow M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} P \longrightarrow 0$  et un morphisme de  $A$ -modules  $t : N \rightarrow M$  tel que  $t \circ f = \text{Id}_M$ .

3. On dit qu'un  $A$ -module  $P$  est *projectif* si la propriété suivante est vérifiée : si  $M$  et  $N$  sont des  $A$ -modules tels qu'il existe une suite exacte  $0 \rightarrow M \rightarrow N \rightarrow P \rightarrow 0$ , alors il existe un isomorphisme  $N \cong M \oplus P$ .
- Montrer qu'un  $A$ -module est projectif si, et seulement si, il est un facteur direct d'un  $A$ -module libre.
  - Montrer que si  $A$  est un corps, alors tout  $A$ -module est projectif.
  - Montrer que si  $A = \mathbb{Z}$ , un  $A$ -module de type fini est projectif si, et seulement si, il est libre. En utilisant la classification des modules de type fini sur un anneau principal que vous verrez en cours cette semaine, on peut montrer que ce résultat subsiste si  $A$  est principal.
  - Supposons que  $A = B \times C$  où  $B$  et  $C$  sont des anneaux non nuls. Montrer que  $B$  est un  $A$ -module projectif non libre.  
On se place dans le cas où  $A$  est l'anneau des fonctions continues  $2\pi$ -périodiques de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ .
  - Soit  $P$  le  $A$ -module formé des fonctions continues de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  telles que  $f(x + 2\pi) = -f(x)$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$ . En construisant un isomorphisme de  $A$ -modules  $P \oplus P \cong A \oplus A$ , montrer que  $P$  est projectif. Est-il libre ?
  - Soit  $N$  le  $A$ -module constitué des fonctions continues  $f$  de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  à décroissance rapide (c'est-à-dire telles que, pour tout  $n \geq 0$ , on a  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^n f(x) = 0$ ). Montrer qu'il existe un facteur direct du  $A$ -module  $N$  isomorphe à  $P$ .
4. On dit qu'un  $A$ -module  $M$  est *injectif* si la propriété suivante est vérifiée : si  $N$  et  $P$  sont des  $A$ -modules tels qu'il existe une suite exacte  $0 \rightarrow M \rightarrow N \rightarrow P \rightarrow 0$ , alors il existe un isomorphisme  $N \cong M \oplus P$ .
- Montrer qu'un  $A$ -module  $M$  est injectif si, et seulement si, pour tout idéal  $I$  de  $A$ , tout morphisme de  $A$ -modules  $I \rightarrow M$  s'étend en un morphisme de  $A$ -modules  $A \rightarrow M$ .
  - Montrer que si  $A$  est un corps, alors tout  $A$ -module est injectif.
  - Est-ce que  $\mathbb{Z}$  est un  $\mathbb{Z}$ -module injectif? Pour  $n > 0$ , est-ce que  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  est un  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ -module injectif?  
On se place maintenant dans le cas  $A = \mathbb{Z}$ .
  - Montrer qu'un groupe abélien  $M$  est injectif si, et seulement si, il est divisible, c'est-à-dire que pour tout  $m \in M$  et tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , il existe  $m' \in M$  tel que  $m = nm'$ .
  - Quels sont les groupes abéliens de type fini injectifs ?
  - Montrer que le groupe abélien  $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$  possède un facteur direct isomorphe à  $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$ .

**Exercice 19 : Le groupe  $\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$  n'est pas abélien libre**

On considère le groupe abélien  $M = \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ . Le but de cet exercice est de montrer que  $M$  n'est pas abélien libre. On procède par l'absurde en supposant que  $M$  admet une base  $B$ . Pour  $n \in \mathbb{N}$ , on note  $e_n$  l'élément de  $M$  dont tous les termes sont nuls, sauf le  $n$ -ème qui vaut 1. On écrit alors  $e_n$  comme combinaison linéaire d'une partie finie  $B_n$  de  $B$ , et on note  $N$  le sous-groupe de  $M$  engendré par les éléments de  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n$ .

1. Soit  $S = \{(\epsilon_n n!)_{n \in \mathbb{N}} \mid \epsilon_n \in \{-1, 1\}\}$ . Montrer qu'il existe  $s \in S$  tel que  $s \notin N$ .
2. Montrer que, pour chaque  $k \in \mathbb{N}^*$ , il existe  $y \in M/N$  tel que  $\bar{s} = ky$ .
3. En déduire une contradiction.

**Exercice 20 (culturel) : Sous-groupes d'un groupe abélien libre**

Dans cet exercice, nous allons montrer que tout sous-groupe d'un groupe abélien libre est abélien libre. Considérons donc  $A$  un groupe abélien libre, et soit  $X$  une base de  $A$ . Soit  $A_0$  un sous-groupe de  $A$ . Soit  $\mathcal{E}$  l'ensemble des triplets  $(Y, B, \phi)$ , où  $Y$  est une partie de  $X$  telle que  $A_0 \cap A^{(Y)}$  est abélien libre,  $B$  est une base de  $A_0 \cap A^{(Y)}$  et  $\phi : B \rightarrow X$  une injection. Si  $(Y, B, \phi)$  et  $(Y', B', \phi')$  sont deux éléments de  $\mathcal{E}$ , on dira que  $(Y, B, \phi) \preceq (Y', B', \phi')$  si  $Y \subseteq Y'$ ,  $B \subseteq B'$  et  $\phi = \phi'|_B$ . Cela définit une relation d'ordre sur  $\mathcal{E}$ .

1. Montrer que  $\mathcal{E}$  possède un élément maximal pour  $\preceq$ .
2. En déduire que  $A_0$  est abélien libre.

Nous allons maintenant appliquer ce résultat pour montrer que le groupe  $\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$  n'est pas abélien libre par une méthode différente de celle de l'exercice 19. Pour chaque entier  $x$ , on note  $v_2(x)$  la valuation 2-adique de  $x$  (avec la convention  $v_2(0) = +\infty$ ).

3. Soit  $N$  le sous-groupe de  $\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$  constitué des suites  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  telles que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_2(x_n) = +\infty$ . Montrer que  $N/2N$  est un  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -espace vectoriel de dimension dénombrable.
4. En déduire que  $\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$  n'est pas abélien libre.